جامعة الملك سعود	الاختبار الأول	الفصل الدراسي الأول
كلية العلوم	مقرر ١٣١ ريض	الأربعاء ١٩-٣-١٤٤٥هـ
قسم الرياضيات	المدة: ٩٠ دقيقة	يمنع استخدام الآلة الحاسبة

اسم الطالب: الرقم الجامعي:

السؤال الأول: مستخدما التعاريف والنظريات التي درستها، أكمل الفراغ (٨ درجات):

١- $\sim(\forall x \in \mathbb{R}: x+1<5) \equiv \cdots$

٢- $\sim(\exists x \in \Omega \ni x \in A \vee x \notin B) \equiv \cdots$

٣- $\mathrm{A}' = \{\ldots \mid \ldots\}$ (المطلوب تعريف A' رياضيا حيث Ω هي المجموعة الشاملة)

٤- $\sim(A \rightarrow \sim B) \equiv \cdots$

السؤال الثاني: إذا كانت A وB مجموعتين بحيث $|\mathrm{A}|=2$ و$|\mathrm{B}|=3$ و$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$، فاحسب ما يلي (خمس درجات):

١- $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = \cdots$

٢- $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = \cdots$

٣- $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = \cdots$

٤- $|\mathrm{A} - \mathrm{B}| = \cdots$

٥- $|p(\mathrm{A} \times \mathrm{B})| = \cdots$

السؤال الثالث: (١٢ درجة):

(أ) باستخدام جداول الصواب، أثبت أنه لأي ثلاثة تقارير A وB وC فإن:

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$$

(ب) أثبت بطرقتين مختلفتين (إحداهما بجداول الانتماء والثانية باستخدام التعاريف) أنه لكل مجموعتين A وB فإن:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$$

(ج) أثبت أن المجموعة الخالية وحيدة.

(د) إذا كان لأي عددين صحيحين موجبين a_1,a_2 فإن: $(a_1a_2)^{-1} = (a_1)^{-1}(a_2)^{-1}$، فأثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أنه لكل عدد صحيح موجب n حيث $n \geq 2$ فإن:

$$(a_1a_2 \ldots a_n)^{-1} = (a_1)^{-1}(a_2)^{-1} \ldots (a_n)^{-1}$$

حيث a_i عدد صحيح موجب لكل i.

الحل

السؤال الأول:

١- $\exists x \in \mathbb{R} \ni x + 1 \geq 5$

٢- $\forall x \in \Omega: \sim(x \in A \vee x \notin B) \equiv \forall x \in \Omega: x \notin A \wedge x \in B$

وممكن كتابة $\forall x \in \Omega: x \in A' \wedge x \in B$

٣- $\mathrm{A}' = \{x | x \in \Omega \wedge x \notin A\}$

٤- $A \wedge \sim(\sim \mathrm{B}) \equiv A \wedge \mathrm{B}$

السؤال الثاني:

١- $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 0$

٢- $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = 5$

٣- $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = 6$

٤- $|\mathrm{A} - \mathrm{B}| = 2$

٥- $|p(\mathrm{A} \times \mathrm{B})| = 2^6 = 64$

السؤال الثالث: (أ)

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

نلاحظ التكافؤ من خلال تطابق قيم الصواب في العمودين السابع والثامن.

(ج) أولا - باستخدام جداول الانتماء

A	B	$A \cup B$	$B \cup A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

نلاحظ التساوي من خلال تطابق (أو تساوي) العمودين الثالث والرابع

ثانيا – باستخدام التعاريف

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ (تعريف الاتحاد)

$= \{x | x \in B \vee x \in A\}$ (الرابط " أو " إبدالي)

$= \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$ (تعريف الاتحاد)

(د) الخطوة الأساسية: n=2

$$(a_1 a_2)^{-1} = (a_1)^{-1}(a_2)^{-1}$$

معطى. إذن العبارة صحيحة في حالة n=2.

خطوة الاستقراء: نفترض صحة العبارة في حالة n=k أي أن:

$$(a_1 a_2 \ldots a_k)^{-1} = (a_1)^{-1}(a_2)^{-1} \ldots (a_k)^{-1} \qquad (١)$$

ثم نحاول إثباتها في حالة n=k+1 أي أن:

$$(٢) \quad (a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1})^{-1} = (a_1)^{-1}(a_2)^{-1} \ldots (a_k)^{-1}(a_{k+1})^{-1}$$

باستخدام خاصة التجميع في الضرب ثم باستخدام صحة العبارة في حالة n=2، فإن الطرف الأيسر من المعادلة (٢) يمكن كتابته كما يلي:

$$(a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1})^{-1} = ((a_1 a_2 \ldots a_k) a_{k+1})^{-1}$$

$$= (a_1 a_2 \ldots a_k)^{-1}(a_{k+1})^{-1}$$

ولكن باستخدام صحة العبارة في حالة n=k نجد أن:

$$(a_1 a_2 \ldots a_k)^{-1}(a_{k+1})^{-1} = (a_1)^{-1}(a_2)^{-1} \ldots (a_k)^{-1}(a_{k+1})^{-1}$$

إذن المعادلة (٢) صحيحة وبالتالي فالعبارة صائبة لكل عدد صحيح موجب n حيث $n \geq 2$.