الإختبارالنهائي ا للفصل الأول (1442-1443) للمقرر 316 ريض

السؤال الأول: أجب عن سؤالين فرعيين فقط

أ) حدد قيمة الثوابت α, β بحيث أن الدالتين $f(x) = e^{-\beta x},\ g(x) = (\sqrt{3+x})e^{(\alpha-2)x}$ تنتميان إلى فضاء الدول $\mathcal{L}^2(0,\infty)$

ب) تحقق أن مجموعة الدوال: $\varphi_n(x) = \{\cos\,(ncos^{-1}x)\}_{n\geq 1}$ متعامدة في الفضاء $\mathcal{L}^2_\rho[-1,1]$ حيث أن $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، ثم أوجد $\|\varphi_n\|_\rho$. (تلميح: $cosAcosB = \frac{\cos(A+B)+\cos\,(A-B)}{2}$

ج) هل أن الدوال: $f_1(x) = cos(2x)\,, f_2(x) = sinx, f_3(x) = cos^2x$ مستقلة خطيا على $\mathbb{R}$. علل إجابتك.

السؤال الثاني: أجب عن سؤالين فرعيين فقط

أ) أوجد مفكوك فورييير للدالة: $f(x) = \begin{cases} -1, & 1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ حيث $f(x+2) = f(x)$

ناقش تقارب المتسلسلة و استنتج أن: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

ب) أوجد تكامل فورييير للدالة: $g(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1-x, & -1 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$ ثم استنتج أن: $\int_0^\infty \frac{sinx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ج) أوجد حل المعادلة التكاملية: $\int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx = \begin{cases} 2, & 0 < \xi < 1 \\ e^{-\xi}, & \xi > 1 \end{cases}$

السؤال الثالث. أ) أكتب المؤثرين التاليين

$$L_1 = x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + 5$$

$$L_2 = cosx\frac{d^2}{dx^2} + sinx\frac{d}{dx} - cos^2x, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

على الشكل: $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + r(x)$ ودلك بالضرب في دالة الثقل المناسبة.

ب) أكتب معادلة لاقير التالية في شكل شتورم-ليوفيل $xu'' + (1-x)u' + nu = 0,\ \ x > 0, n \in \mathbb{N}$

ثم أكتب علاقة التعامد بين الدوال الذاتية.

ج) أوجد القيم الذاتية و الدوال الذاتية لمسألة شتورم ليوفيل التالية: $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0,\ 0 < x < 1 \\ u'(0) = 0,\ u(1) = 0. \end{cases}$

ثم برهن أن الدوال الذاتية متعامدة في $\mathcal{L}^2(0,1)$

السؤالالرابع. أ) لتكن لدينا دالة بيسل من النوع الأول:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

برهن أن: $\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$

ثم استنتج أن: $J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x}J_n(x)$

ب) بين أن: $\int J_3(x)dx = -J_2(x) - \frac{2}{x}J_1(x) + c$

(تلميح: استعمل العلاقة: $\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right) = -x^{-n}J_{n+1}(x)$