# الفصل الثاني

# الأشجار

## 1.2 تعاريف ونتائج أساسية

تعتبر الأشجار أحد أصناف الرسومات التي تستخدم في التطبيقات على نطاق واسع، وعلى وجه الخصوص في التطبيقات المرتبطة بالحاسب الآلي كترتيب وتصنيف القوائم. كما تظهر في بعض مسائل الأمثلية optimization كالفرز sorting يسمى الرسم $T = (V, E)$ **شجرة** tree إذا كان مترابط ولا يحتوي على دورات. كما يسمى الرسم $F = (V, E)$ **غابة** forest إذا كان لا يحتوي على دورات. أي أن الغابة رسم مركباته أشجار.
توضح المبرهنة التالية التي تعتبر من أهم مبرهنات الأشجار،

**مبرهنة 1.1.2**
الشجرة التي عدد رؤوسها $n$.

1. يوجد فيها على الأقل رأسان درجة كل منهما تساوي 1, حيث أن $n \geq 2$.
2. عدد أضلاعها $n - 1$.

**البرهان**

1.

2.

**نتيجة 1.2.2**
إذا كانت $F = (V, E)$ غابة عدد رؤوسها $n$، فإن عدد أضلاعها $n - k$ حيث $k$ عدد مركباتها.

## 2.2 تمييزات الأشجار

تقدم المبرهنات التالية عبارات مكافئة لتعريف الشجرة. كما تهدف إلى فهم أعمق لتركيب وخواص الأشجار.

**مبرهنة 2.1.2**

الرسم $G = (V, E)$ شجرة إذا وفقط إذا كان يوجد بين كل رأسين في $G$ ممر وحيد.

**البرهان**

**تعريف**

ليكن $G = (V, E)$ رسما وليكن $u, v \in V$, حيث $e = uv \in E$، يُسمى الضلع $e$، **جسرا** bridge في الرسم $G$، إذا كان عدد مركبات $G - e$ أكبر من عدد مركبات $G$.

الشجرة هي أصغر رسم مترابط من حيث عدد الأضلاع، بمعنى أن حذف أي ضلع منها يعطي رسما غير مترابط، وهذا ما توضحه المبرهنة التالية.

**مبرهنة 2.2.2**

ليكن $G = (V, E)$ رسما وليكن $u, v \in V$, حيث $uv \in E$.
الضلع $uv$ جسر في الرسم $G$ إذا وفقط إذا كان $uv$ ليس محتوى في دورة.

**البرهان**

### مبرهنة 2.3.2

ليكن $G$ رسما مترابطا.
الرسم $G$ شجرة إذا وفقط إذا كان كل ضلع في الرسم $G$ جسر.

**البرهان**

### مبرهنة 2.4.2

ليكن $G$ رسما عدد رؤوسه $n$.
الرسم $G$ شجرة إذا وفقط إذا كان الرسم $G$ لا يحتوي على دورات وعدد أضلاعه $n-1$.

**البرهان**

**تعريف**
تُسمى الشجرة $T = (V, E')$ **شجرة مُولدة** spannig tree للرسم $G = (V, E)$ إذا كان $E' \subseteq E$، أي أن أي شجرة رؤوسها $V$ هي شجرة مُولدة للرسم $G$ إذا كانت رسما جزئيا من $G$.
المبرهنة التالية تعطينا توصيف للرسم المترابط بوُجود شحرة مُولدة كرسم جزئي في الرسم.

### مبرهنة 2.5.2

ليكن $G$ رسما.
الرسم $G$ مترابط إذا وفقط إذا كان الرسم $G$ يوُجد له شجرة مولدة.

**البرهان**

نلاحظ من البرهان للمبرهنة السابقة بأنه نخصل على شجرة مُولدة من رسم بالتخلص من الدورات في الرسم بالحذف المتتابع لبغض الأضلاع .

**نتيجة 2.6.2**

إذا كان الرسم $G=(V,E)$ مترابطًا عدد رؤوسه $n$، فإن $|E|\geq n-1$.

**البرهان**

**مبرهنة 2.7.2**

ليكن $G$ رسما عدد رؤوسه $n$.
الرسم $G$ شجرة إذا وفقط إذا كان رسما مترابطا وعدد أضلاعه $n-1$.

**البرهان**

**مبرهنة 2.8.2**

ليكن $G=(V,E)$ رسما لا يحتوي على دورات.
الرسم $G$ شجرة إذا وفقط إذا كان $G+e$ يحتوي على دورة وحيدة فقط لكل ضلع $e\notin E$.

**البرهان**

المبرهنة التالية والتي تُنسب إلى كيلي Caylay تُعطي عدد الأشجار المعلمة المولدة للرسم $K_n$.

**مبرهنة 2.9.2**

عدد الأشجار المعلمة المولدة للرسم $K_n$ يساوي $n^{n-2}$.

**البرهان**

## 3.2 تطبيقات الأشجار

الطريقة المذكورة سابقا لإيجاد شجرة مولدة من رسم، وهي التخلص من الدورات بالحذف المتتابع لبعض الأضلاع، غير مناسبة في الحاسب الآلي.

فيما يلي سنعطي بعض الخوارزميات التي يمكن من خلالها الحصول على شجرة مولدة باستخدام الحاسب الآلي.

**خوارزمية 1**
المدخل: رسم مترابط $G = (V, E)$.
المخرج: شجرة مولدة $T = (V, E')$ للرسم $G$.

**الخوارزمية 1**

1. اختر أي رأس $v_1 \in V$، و ضع $V_1 = \{v_1\}$ و $E_1 = \emptyset$ و $T_1 = (V_1, E_1)$.
2. ليكن العدد الصحيح $k$ حيث $1 \leq k \leq (n-1)$.
   انشئ الشجرة $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ من الشجرة $T_k = (V_k, E_k)$ بالطريقة التالية:
   اختر الضلع $e_k = uv_{k+1}$ حيث $u \in V_k$ و $v_{k+1} \notin V_k$. ضع $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$.
3. كرر الخطوة السابقة $(n-1)$ مرة لتحصل على شجرة مولدة $T_n = (V_n = V, E_n)$ للرسم $G$.

**مبرهنة 3.1.2**
إذا كان $G = (V, E)$ رسما مترابطا فإن الخوارزمية السابقة تعطي شجرة مولدة $T_n = (V_n = V, E_n)$ للرسم $G$.

**البرهان**

### 1.3.2 أشجار التقصي العرضي وأشجار التقصي العمقي

فيما يلي نقدم حالتين من الخوارزمية السابقة.

**خوارزمية** $1-1$
المدخل: رسم مترابط $G=(V,E)$ ورأس معين $v \in V$.
المخرج: شجرة مولدة $T=(V,E')$ للرسم $G$ تسمى **شحرة تقصٍ عرضي** breadth first search tree جذرها $v$.

**الخوارزمية** $1-1$

1. اختر الرأس $v = v_1 \in V$، و ضع $V_1 = \{v_1\}$ و $E_1 = \emptyset$ و $T_1 = (V_1, E_1)$.
2. ليكن العدد الصحيح $k$ حيث $1 \le k \le (n-1)$.
   انشئ الشجرة $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ من الشجرة $T_k = (V_k, E_k)$ بالطريقة التالية:
   ليكن $r$ هو أصغر عدد بين الأعداد $1, ..., k$ بحيث يوجد ضلع $e_k = v_r v_{k+1}$ حيث $v_r \in V_k$ و $v_{k+1} \notin V_k$. ضع $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$.
3. كرر الخطوة السابقة $(n-1)$ مرة لتحصل على شجرة مولدة $T_n = (V_n = V, E_n)$ للرسم $G$.

**خوارزمية** $1-2$
المدخل: رسم مترابط $G=(V,E)$ ورأس معين $v \in V$.
المخرج: شجرة مولدة $T=(V,E')$ للرسم $G$ تسمى **شحرة تقصٍ عمقي** depth first search tree جذرها $v$.

**الخوارزمية** $1-2$

1. اختر الرأس $v = v_1 \in V$، و ضع $V_1 = \{v_1\}$ و $E_1 = \emptyset$ و $T_1 = (V_1, E_1)$.

2. ليكن العدد الصحيح $k$ حيث $1 \leq k \leq (n-1)$.
انشئ الشجرة $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ من الشجرة $T_k = (V_k, E_k)$ بالطريقة التالية:
ليكن $r$ هو أكبر عدد بين الأعداد $1, ..., k$ بحيث يوجد ضلع $e_k = v_r v_{k+1}$ حيث $v_r \in V_k$ و $v_{k+1} \notin V_k$. ضع
$V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$.

3. كرر الخطوة السابقة $(n-1)$ مرة لتحصل على شجرة مولدة $T_n = (V_n = V, E_n)$ للرسم $G$.

**مبرهنة 3.2.2**
إذا كان $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً وكانت $T = (V, E')$ شجرة تقصٍ عرضي جذرها $x$ ناتجة من خوارزمية $1-1$ فإن $d_G(x, v) = d_T(x, v)$ لكل رأس $v \in V$.

**البرهان**

## 2.3.2 خوارزميات للإيجاد شجرة مولدة صغرى

يسمى الرسم $G = (V, E)$ **رسماً موزوناً** weighted graph إذا قُرن كل ضلع $e$ فيه بعدد حقيقي غير سالب $w(e)$ يسمى **وزن الضلع** $e$. كما يسمى مجموع أوزان أضلاع الرسم $\sum_{e \in E} w(e)$ **وزن الرسم** $G$ ويرمز له بالرمز $w(G)$. إذا كان $P$ ممراً بين رأسين في $G$ فإننا نسمي $\sum_{e \in E} w(e)$ **طول** length الممر $P$ ونرمز له بالرمز len(P).

نرمز **للمسافة** distance بين الرأسين $u$ و $v$ في الرسم الموزون $G = (V, E)$ بالرمز $d_G(u, v)$ (أو بالرمز $d(u, v)$ في حالة دراسة رسم واحد)، ونعرفها بأنها طول أقصر ممر بين $u$ و $v$ إذا كان $u$ و $v$ مرتبطين. كما نعرف $d_G(u, v) = \infty$ إذا كان لا يوجد ممر بين $u$ و $v$.

و نعرف $d_G(v,v) = 0$ الرسم لكل رأس في $G$.

**الشجرة المولدة الصغرى** minimum spanning tree لرسم موزون مترابط $G = (V,E)$ هي شجرة مولدة وزنها أصغر ما يمكن و **الشجرة المولدة العظمى** maximum spanning tree لرسم موزون مترابط $G$ هي شجرة مولدة وزنها أكبر ما يمكن.

**خوارزمية (خوارزمية بريم Prim)**
المدخل: رسم موزون مترابط $G = (V,E)$ عدد رؤوسه $|V| = n$.
المخرج: شجرة مولدة صغرى $T_n = (V, E_n)$ للرسم $G$.

**الخوارزمية (خوارزمية بريم Prim)**

1. اختر أي رأس $v = v_1 \in V$ من رؤوس $G$ ، ثم ضع $V_1 = \{v_1\}$ و $E_1 = \emptyset$ و $T_1 = (V_1, E_1)$.
2. ليكن العدد الصحيح $k$ حيث $1 \le k \le (n-1)$.
انشئ الشجرة $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ من الشجرة $T_k = (V_k, E_k)$ بالطريقة التالية:
اختر $r$ هو عدد بين الأعداد $1, ..., k$ و $e_k = v_r v_{k+1}$ وزنه أقل ما يمكن و حيث $v_r \in V_k$ و $v_{k+1} \notin V_k$. ضع $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$.
3. كرر الخطوة السابقة $(n-1)$ مرة لتحصل على شجرة مولدة $T_n = (V_n = V, E_n)$ للرسم $G$.

**مبرهنة 3.3.2**
إذا كان $G = (V,E)$ رسماً مترابطاً موزوناً، فإن خوارزمية بريم تعطي شجرة مولدة صغرى $T_n = (V_n = V, E_n)$ للرسم $G$.

**البرهان**

**خوارزمية (خوارزمية كروسكال Kruskal)،**
المدخل: رسم موزون مترابط $G = (V, E)$ عدد رؤوسه $n = |V|$.
المخرج: شجرة مولدة صغرى $T_n = (V, E_n)$ للرسم $G$.

**الخوارزمية (خوارزمية كروسكال Kruskal)**

1. اختر ضلعاً $e_1 \in E$ وزنه أقل ما يمكن وضع $T_1 =< e_1 >$ الرسم الجزئي من $G$ المولد بلضلع $e_1$.

2. ليكن العدد الصحيح $k$ حيث $1 \leq k \leq (n-2)$.
انشئ الشجرة $T_{k+1} =< e_1, ..., e_k, e_{k+1} >$ من الشجرة $T_k =< e_1, ..., e_k >$ بالطريقة التالية:
اختر ضلعا $e_{k+1}$ في الرسم الجزئي $G_k = G - \{e_1, ..., e_k\}$ بحيث وزنه أقل ما يمكن في $G_k$ وبحيث $< e_1, ..., e_k, e_{k+1} >$ رسم بلا دورات (شجرة).
ضع $T_{k+1} =< e_1, ..., e_k, e_{k+1} >$.

3. كرر الخطوة السابقة $(n-2)$ مرة لتحصل على شجرة مولدة $T_{n-1} =< e_1, ..., e_{n-1} >$ للرسم $G$.

**مبرهنة 3.4.2**
إذا كان $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً موزوناً، فإن خوارزمية كروسكال تعطي شجرة مولدة صغرى $T_{n-1} =< e_1, ..., e_{n-1} >$ للرسم $G$.

**البرهان**

## 3.3.2 خوارزمية إيجاد أقصر ممر في رسم موزون مترابط

**خوارزمية (خوارزمية ديكسترا Dijkstra)**

المدخل: رسم موزون مترابط $G=(V,E)$ عدد رؤوسه $|V|=n$ ورأس معيَّن $v_1\in V$.
المخرج: شجرة مولدة $T=T_n=(V,E_n)$ للرسم $G$ بحيث $d_G(v_1,u)=d_T(v_1,u)$ لكل $u\in V$.

### الخوارزمية (خوارزمية ديكسترا Dijkstra)

1. ضع $V_1=\{v_1\}$ و $E_1=\emptyset$ و $T_1=(V_1,E_1)$ ولدينا $d(v_1,v_1)=0$.
2. ليكن العدد الصحيح $k$ حيث $1\le k\le (n-1)$.
افرض أن $T_k=(V_k,E_k)$ قد وقع تعريفها بحيث أن $d_{T_k}(v_1,u)=d_G(v_1,u)$ لكل $u\in V_k$.
انشئ الشجرة $T_{k+1}=(V_{k+1},E_{k+1})$ من الشجرة $T_k=(V_k,E_k)$ بالطريقة التالية:
اختر $r$ هو عدد بين الأعداد $1,...,k$ و $d_G(v_1,v_r)+w(v_rv_{k+1})$
$=min\{d_G(v_1,x)+w(xy), x\in V_k, y\notin V_k, xy\in E(G)\}$
ضع $V_{k+1}=V_k\cup\{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1}=E_k\cup\{v_rv_{k+1}\}$
3. كرر الخطوة السابقة $(n-1)$ مرة لتحصل على شجرة مولدة $T_n=(V_n=V,E_n)$ للرسم $G$.

**مبرهنة 3.5.2**
إذا كان $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً موزوناً ورأس معيَّن $v_1\in V$، فإن خوارزمية ديكسترا تعطي شجرة مولدة صغرى $T_n=(V_n=V,E_n)$ للرسم $G$
بحيث $d_G(v_1,u)=d_T(v_1,u)$ لكل $u\in V$.

**البرهان**