مع الإجابة ، الحل

جامعة الملك سعود	قسم الرياضيات	الاختبار النهائي لمقرر 201 ريض	الفصل الأول 1445
الأحد 24 – 12 - 2023	الزمن ثلاث ساعات	يمنع استخدام الآلة الحاسبة	

السؤال الأول (3+1.5 +2.5): لتكن الدالة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x+1)^2+y^2\sin(\pi x)}{(x+1)^2+y^2}, & (x,y)\neq(-1,0)\\ 0, & (x,y)=(-1,0)\end{cases}$$

(i) اثبت ان الدالة f متصلة عند النقطة $(-1,0)$

(ii) أوجد $f_y(-1,0)$

(iii) أوجد $f_x(0,1)$

السؤال الثاني (4 درجات): لتكن $f(x,y)=e^{2x}\sin(xy)$ وبوضع $g(u,v)=f(u+v,u-v)$

أحسب g_{uv} .

السؤال الثالث (6 درجات): أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y,z)=x^2+(y-2)^2+(z-3)^2$ تحت القيد $x^2+2y+2z=22$.

السؤال الرابع (3+3+3): (أ) اعكس ترتيب ا التكامل $\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 6\sqrt{1+x^3}\,dxdy$ ثم أحسب قيمته.

(ب) أوجد حجم المجسم خارج المخروط $z=3\sqrt{x^2+y^2}$ وداخل الأسطوانة $x^2+y^2=4$ والمحدود من الأسفل بالمستوى $z=0$.

(ج) أحسب التكامل $\iiint_Q 4z\,dv$ حيث Q هو المجسم المحدود من أعلى بالكرة $x^2+y^2+z^2=4$ ومن الأسفل بالمستوى $z=0$.

السؤال الخامس (2+2+2): ادرس تقارب المتسلسلات التالية وبين نوع المتقارب منها :

$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2+n}}$ $(ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n\sqrt{n}}$ $(iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{(2n-3)^2}$

السؤال السادس (4+4): (أ) أوجد نصف قطر و فترة التقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-6)^n}{n\,5^n}$

(ب) أوجد متسلسلة قوى في x تمثل الدالة $f(x)=e^{1+2x}$.

الإختبار النهائي، مقرر (٢٠١) ريض

الفصل الأول عام ١٤٤٥هـ - ٢٠٢٣م

السؤال الأول:

(7)

(i)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x+1)^2+y^2\sin(\pi x)}{(x+1)^2+y^2} & ; (x,y)\neq(-1,0)\\ 0 & ; (x,y)=(-1,0)\end{cases}$$

$$|f(x,y)|\le\left|\frac{y(x+1)^2}{(x+1)^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^2\sin(\pi x)}{(x+1)^2+y^2}\right|$$

(3)

$$\le|y|+|\sin(\pi x)|\longrightarrow 0 \text{ as } (x,y)\to(-1,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)}|f(x,y)|=0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y)=0=f(-1,0)$$

معرف

إذاً الدالة f متصلة عند (-1,0)

(ii)

$$f_y(-1,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1,0+h)-f(-1,0)}{h}$$

$(1\frac{1}{2})$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0+0}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_x(-1,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h,0)-f(-1,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0+0}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{0}{h}\right)=0$$

$$f_x(-1,0)=f_y(-1,0)=0$$

معرف

(iii) لنأخذ $(x,y)\neq(-1,0)$، لدينا

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{[2y(x+1)+\pi y^2\cos\pi x][(x+1)^2+y^2]-2(x+1)[y(x+1)^2+y^2\sin(\pi x)]}{[(x+1)^2+y^2]^2}$$

$(\frac{1}{2})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\frac{(2+\pi)(2)-2(1+0)}{(1+1)^2}=\frac{2\pi+2}{4}=\boxed{\frac{\pi+1}{2}}$$

السؤال الثاني :
(4)

$$f(x,y) = e^{2x}\sin(xy)$$

$$g(u,v) = e^{2u+2v}\sin(u^2-v^2)$$

$$g_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(2e^{2u+2v}\sin(u^2-v^2) + e^{2u+2v}\,2u\cos(u^2-v^2)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} g_{uv} &= 4e^{2u+2v}\underset{1}{}\sin(u^2-v^2) + e^{2u+2v}\underset{1}{}(-4uv)\cos(u^2-v^2) \\ &\quad + 4e^{2u+2v}\underset{1}{}\cos(u^2-v^2) + e^{2u+2v}\underset{1}{}(4uv)\sin(u^2-v^2)\end{aligned}}$$

السؤال الثالث :
(6)

$$f(x,y,z) = x^2+(y-2)^2+(z-3)^2$$

القيد $g(x,y,z)$ $\quad g(x,y,z) = x^2+2y+2z-22=0$

لنوجد نقطة (x,y,z) تقع على القيد ونوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث تحقق

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda\,\nabla \vec{g}(x,y,z)$$

$$(2x,\ 2(y-2),\ 2(z-3)) = \lambda(2x,\ 2,\ 2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1\quad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2(y-2) = 2\lambda, \\ 2(z-3) = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & x(1-\lambda)=0 \\ & y = 2+\lambda \quad , \quad g(x,y,z)=0 \\ & z = 3+\lambda \end{aligned}$$

ولكن $x(1-\lambda)=0 \Leftarrow$ إما $x=0$ وإما $\lambda=1$

فإذا كانت $x=0$ ، من معادلة القيد نجد $2y+2z-22=0$

أو $y+z=11$ ، $\Leftarrow$ $2+\lambda+3+\lambda=11$ $\quad 1$

$2\lambda=6 \Leftarrow$ $\lambda=3$ إذاً لدينا النقطة $\boxed{(0,5,6)}$

أما إذا كانت $\lambda=1$ ، إذاً لدينا

$z=4$ ، $y=3$ ، ومن معادلة القيد نجد $x^2+6+8-22=0$ أو $x^2=8$ $\quad 1$

ومنه $x=\mp 2\sqrt{2}$ إذاً لدينا نقطتان : $\boxed{(-2\sqrt{2},3,4)}$ ، $\boxed{(2\sqrt{2},3,4)}$ $\quad 1$

$f(0,5,6) = 0+(3)^2+(3)^2 = 18$ $\ 1$ قيمة عظمى

$f(2\sqrt{2},3,4) = 8+1+1 = 10$
$f(-2\sqrt{2},3,4) = 8+1+1 = 10$ } قيمة صغرى $\ 1$

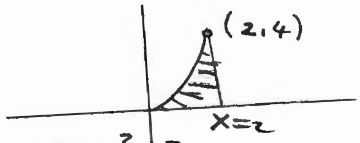
السؤال التاسع : (9)

(أ)

$$I=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 6\sqrt{1+x^3}\,dx\,dy$$

$R=\{(x,y);\quad \sqrt{y}\le x\le 2,\quad 0\le y\le 4\}$

$\sqrt{y}=x \Leftrightarrow y=x^2$



$R=\{(x,y);\ \begin{matrix}0\le y\le x^2\\ 0\le x\le 2\end{matrix}\}$

$$I=\iint_R 6\sqrt{1+x^3}\,dA=6\int_0^2\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}\,dy\,dx \quad (2)$$

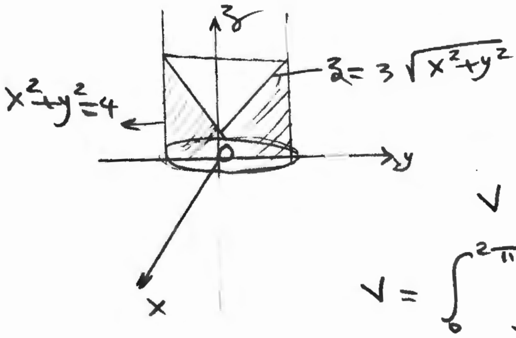
$$=2\int_0^2 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx \quad (1)$$

$$=\frac{4}{3}\left[(1+x^3)^{3/2}\right]_0^2$$

$$I=\frac{4}{3}[27-1]=\frac{104}{3}$$

السؤال الرابع

(ب)



$V=\{(x,y,z);\quad 0\le z\le 3r,\quad 0\le r\le 2;\quad 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{3r} r\,dz\,dr\,d\theta \quad (2)$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}[r^3]_0^2\,d\theta=8(2\pi)$$

$$=16\pi \quad (1)$$

طريقة ثانية :

$z^2=9(x^2+y^2)=36\Rightarrow z=6$

$V=V_1-V_2,\quad$ V_1 حجم الاسطوانة ارتفاعها 6

V_2 = المخروط المحدود بالسطح $z=6$

$V_1=\pi(4)(6)=24\pi,\quad R_2=\{(x,y,z);\quad 3r\le z\le 6,\quad 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$V_2=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{3r}^6 r\,dz\,dr\,d\theta \quad (2)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(6-3r)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2(6r-3r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=2\pi\left[3r^2-r^3\right]_0^2=2\pi(12-8)$$

$$=8\pi \quad (1)$$

$$V=V_1-V_2=24\pi-8\pi=16\pi$$

(3)

باستخدام الاحداثيات الكروية ، $I = \iiint_Q 4z\, dv$ (8)

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta),\quad 0 \le \rho \le 2,\quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, & z \ge 0 \\ z^2 = 4-(x^2+y^2) \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 4\rho\cos\phi\ \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad (2)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 4\rho^3\cos\phi\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\rho^4\right]_0^2 \cos\phi\sin\phi\, d\phi\, d\theta \quad (1)$$

$$V = 16\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 16(2\pi)\left(\frac{1}{2}\right) = 16\pi$$

طريقة ثانية (باستخدام الاحداثيات الاسطوانية)

$$Q = \{(r, z, \theta)\}:\quad 0 \le z \le \sqrt{4-r^2},\quad 0 \le r \le 2,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$V = 4\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-r^2}} z\, r\, dz\, dr\, d\theta \quad (2)$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{4-r^2}} r\, dr\, d\theta$$

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)r\, dr\, d\theta = 2\int_0^{2\pi}(4r - r^3)\, dr\, d\theta \quad (1)$$

$$= 2(2\pi)\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi[8-4] = 16\pi$$

السؤال الخامس : (6)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2+n}}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{2+n}} \to 0$

(1) $\sqrt{2+(n+1)} > \sqrt{2+n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3+n}} < \frac{1}{\sqrt{2+n}} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$f(x) = (2+x)^{-1/2}$, $x \ge 1$ او

$f'(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^{-3/2} < 0 \Rightarrow (a_n)$ متناقصة

اذن المتسلسلة متقاربة

(1) $\sum_1^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{2+n}}\right| = \sum_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2+n}}}_{a_n} \approx \sum_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{b_n}$ ولكن

$\sum_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة حيث ، $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ لأن $\sqrt{n}$

لأن $p = \frac{1}{2} < 1$ اذن

منه $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{2+n}} \right|$ متباعدة

وبالتالي $\boxed{\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2+n}} \text{ متقاربة شرطياً}}$

ii) $\sum_{1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{1+n\sqrt{n}} \right| \le \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

وبما أن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة، حيث $p = \frac{3}{2} > 1$

(2)

ومنه $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$ متقاربة مطلقاً

iii) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{(2n-3)^2}$, $a_n = \frac{n^2+1}{(2n-3)^2} \to \frac{1}{4} \neq 0$

(2)

وبالتالي فإن السلسلة متباعدة

السؤال السادس:

أ (8)

$$\sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2x-6)^n}{n\,5^n}}_{a_n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n\,5^n}$$

عندما $x = 3$ فالسلسلة متقاربة

$x \neq 3$, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1} |x-3|^{n+1}}{(n+1)\,5^{n+1}}}{\frac{2^n |x-3|^n}{n\,5^n}} = \lim_{n\to\infty} 2|x-3| \frac{2n}{(n+1)5}$

$= \frac{2}{5}|x-3|$

السلسلة متقاربة لكل x تحقق المتراجحة $\frac{2}{5}|x-3| < 1$ أو $|x-3| < \frac{5}{2}$

(1)

منه $-\frac{5}{2} < x-3 < \frac{5}{2} \Leftarrow -\frac{5}{2}+3 < x < 3+\frac{5}{2}$

$\boxed{\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}}$ ، نصف قطر التقارب $r = \frac{5}{2}$ (1/2)

(1/2) عندما $x = \frac{11}{2}$ ، لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

(1/2) عندما $x = \frac{1}{2}$ لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة

لذا فترة التقارب هي $\boxed{I = \left[\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)}$ (1/2) $\frac{1}{2}$

ب) نعلم $e^u = \sum_{0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ ، حيث $u \in \mathbb{R}$ ومنه

$f(x) = e^{1+2x} = \boxed{e \sum_{0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}}$; $x \in \mathbb{R}$

(4)