مع الإجابة الكاملة

جامعة الملك سعود كلية العلوم – قسم الرياضيات	الامتحان الفصلي الأول لمقرر ٢٠١ ريض **يمنع استخدام الآلة الحاسبة**	الفصل الأول ١٤٤٥

السؤال الأول (٣+٣+٦)

(أ): أوجد مجال الدالة $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + Ln(2+x)$ (وضح إجابتك بالرسم).

2 1

(ب): أختبر وجود كل من النهايتين التاليتين وأحسب النهاية في حالة وجودها:

$$(i) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{3xy + 5}{3x - 5}$$

$1\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$

(ج): أدرس قابلية تفاضل الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} & (x,y) \neq (0,2) \\ 0 & (x,y) = (0,2) \end{cases}$$

6

عند كل من النقطتين (٠،٢) و (١،١).

4 2

السؤال الثاني (٢+٦)

(أ): أحسب $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ عند النقطة (-2, 1, -3) حيث $w = \cos(u + 2v)$ ، $u = z - 2x + \dfrac{\pi}{4}$ و $v = \dfrac{z}{2} + y + \dfrac{\pi}{4}$

2

(ب): أوجد القيم القصوى وحدد نوعها للدالة $f(x,y) = x^3 - (y-4)^2 + 2y - 12x + 7$

6

السؤال الثالث (٥ درجات)

أحسب التكامل $\iint_R \left(4 + \cos(x^2)\right) dA$ **حيث** R المنطقة المحدودة بالمستقيمات $y = x \ \& \ y = 0 \ , \ x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

5

إجابة الامتحان الفصلي الأول (١٠١ رض)
الفصل الأول عام ١٤٤٥ (٢٠٢٣).

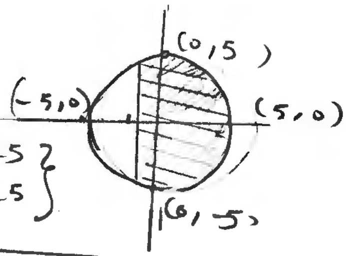
السؤال الأول: أ) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \ln(2+x)$ $\quad \underline{3}$

$D = \{ (x,y) ;\ 25 - x^2 - y^2 \geq 0 \ ,\ x + 2 > 0 \}$ $\quad \underline{2}$

$x^2 + y^2 \leq 25$

$x > -2$

$D = \{ (x,y) ;\ -2 < x \leq 5 ,\ -5 \leq y \leq 5 \}$ $\quad \underline{1}$



ب) i)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 x}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$0 \leq \left| \frac{x^2 x}{x^2+y^2} \right| = |x| . \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x| ;\ (x,y) \neq (0,0)$$

$\to 0 ; (x,y) \to (0,0)$

وحسب نظرية الحصر لدينا:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

لنكتب $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2} ;\ (x,y) \neq (0,0)$ $\quad (1\frac{1}{2})$

باستخدام المحور x (معادلته $y = 0$) لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{0}{x^2}\right) = 0$$

على المسار $y = x$ لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

أي أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$ غير موجودة

يمكن
حلها باستخدام المسارات $y = mx$ أيضاً.

---

ii) نبدأ $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} (3x-5) = 3-5 = -2 \neq 0$ $\quad (1\frac{1}{2})$

لذا

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{3xy+5}{3x-5} = \frac{-6+5}{3-5} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$ موجودة

تابع السؤال الأول

ج) عند النقطة $(1,1)$

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(y-2)}{x^2+(y-2)^2} & (x,y)\neq(0,2)\\ & (x,y)=(0,2)\end{cases}$$

عند النقطة $(1,1)$ نلاحظ ان

$$f(1,1)=\frac{(1)(-1)}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x(y-2)[x^2+(y-2)^2]-2x^3(y-2)}{[x^2+(y-2)^2]^2}$$

$$\text{(1)}\quad \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2(1)(-1)(1+1)-2(1)(-1)}{(1+1)^2}=\frac{-4+2}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2[x^2+(y-2)^2]-2(y-2)(x^2)(y-2)}{[x^2+y^2]^2}$$

$$\text{(2)}\quad \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(1)(2)-2(-1)(1)(-1)}{4}=0=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$$

اذا $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ متصلتان عند $(1,1)$

وبالتالي f قابلة للاشتقاق عند $(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}=\lim\frac{\frac{(1+h)^2(-1)}{(h+1)^2+1}-\left(\frac{-1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim\frac{\cancel{-2}-4h-2h^2+h^2+2h+\cancel{2}}{2h[(h+1)^2+1]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h-h^2}{2h((h+1)^2+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2-h}{2[(h+1)^2+1]}$$

$$=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(y-2)}{x^2+(y-2)^2}, & (x,y)\neq(0,2)\\ 0 ; & (x,y)=(0,2)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,2)-f(0,2)}{h} \quad (1)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,2+h)-f(0,2)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{0\cdot h}{h^2}-0}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}(0)=0 \quad (1)$$

(3)

$$\Delta w=f(0+\Delta x,2+\Delta y)-f(0,2)=$$

$$=f(\Delta x,2+\Delta y)=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\frac{\|h\|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\epsilon\cdot\|h\| ; \quad \|h\|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

(2)

$$\epsilon=\frac{(\Delta x)^2\,\Delta y}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]^{3/2}}$$

على امتداد (محور Δx) ، معادلته $\Delta y=0$, $\Delta y>0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{(\Delta x)^3}=0$$ نجد

على امتداد $\Delta y=\Delta x$ ، نجد $\Delta x>0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{2\sqrt{2}(\Delta x)^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

اذاً $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\epsilon\neq 0$ ومنه [illegible] ليست قابلة للتفاضل

<u>السؤال الثاني</u> (أ) إذا كانت $w=\cos(u+2v)$

حيث $v=\frac{z}{2}+y+\frac{\pi}{4}$, $u=z-2x+\frac{\pi}{4}$

أوجب $\frac{\partial w}{\partial y}$ عند النقطة $(-2,1,-3)$

$$u+2v=z-2x+\frac{\pi}{4}+z+2y+\frac{\pi}{2}=2z-2x+2y+\frac{3\pi}{4} \quad (1)$$

$$w=\cos\left(2z-2x+2y+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=-\sin\left(2z-2x+2y+\frac{3\pi}{4}\right)(2) \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(-2,1,-3)}=-\sin\left(\cancel{-6+4+2}+\frac{3}{4}\pi\right)(2)=-2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

(ب)

$f(x,y) = x^3 - (y-4)^2 + 2y - 12x + 7$

$f_x = 3x^2 - 12 = 0 \quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$

$f_y = -2(y-4) + 2 = 0 \Rightarrow \cancel{2} = \cancel{2}(y-4), \; 1 = y-4, \; y = 5$

إذاً لدينا نقطتان حرجتان ~

$(-2, 5), \; (+2, 5)$ ②

$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$

$g(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = -12x$ ①

$g(2,5) = -24 < 0$ لدينا $(2,5)$ عند (1

إذاً $\boxed{(2,5) \text{ نقطة سرجية}}$ $(1\tfrac{1}{2})$

$g(-2,5) = 24 > 0$ لدينا $(-2,5)$ عند (2

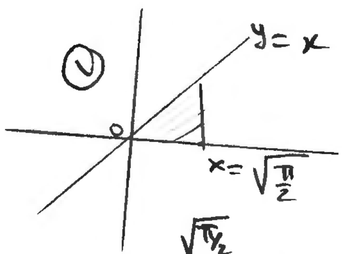
$f_{xx}(-2,5) = -12 < 0 \; \} \Rightarrow f(-2,5) = -8 - 1 + 10 + 24 + 7$

$\boxed{f(-2,5) = 41 - 9 = 32}$ هي قيمة عظمى محلية $(1\tfrac{1}{2})$

السؤال الثالث:

$I = \iint_R (4 + 2\cos(x^2))\, dA$

R منطقة مغلقة محدودة بالمستقيمات $y = x, \; y = 0, \; x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$



①

$R = \{(x,y) \,;\, 0 \le y \le x, \; 0 \le x \le \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\}$

$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{x} [4 + 2\cos(x^2)]\, dx = \iint_R 4\, dA + 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{x} \cos(x^2)\, dy\, dx$ ③

$4(R \text{ مساحة المنطقة}) + \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x\cos(x^2)\, dx$

$= 4\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} + [\sin(x^2)]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ ①

$= \pi + [\sin(\tfrac{\pi}{2}) - 0]$

$\boxed{I = \pi + 1}$

3+