إجابة الإختبار الفصلي في 201ريض

الفصل الدراسي الأول 1444هـ

السؤال الأول (6 درجات) : لتكن

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(y-1)^2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}, & (x,y)\neq(0,1)\\ 0, & (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

(i) أحسب $f_x(0,0)$

....

اذا كانت $(x,y)\neq(0,1)$ فإن $f(x,y)=\dfrac{x(y-1)^2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$ وبالتالي

$$f_x(x,y)=\frac{(y-1)^2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}-\frac{x^2(y-1)^2}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

و

$$f_x(0,0)=1$$

(ii) أثبت أن الدالة f قابلة للتفاضل عند النقطة $(0,1)$.

$$f_x(01) = f_y(0,1) = 0$$

$$\Delta w = f(\Delta x, 1+\Delta y) - f(0,1) = \frac{\Delta x(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

واذا كانت

$$\Delta w = (\Delta x) f_x(0,1) + (\Delta y) f_y(0,1) + \|h\|\varepsilon$$

نحصل على

$$\varepsilon = \frac{\Delta x(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

وبما أن

$$0 \le |\varepsilon| \le |\Delta x|$$

و

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (0) = 0 = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} |\Delta x|$$

فإن

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} |\varepsilon| = 0 = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (\varepsilon)$$

وهذا يثبت أن الدالة f قابلة للتفاضل عند النقطة $(0,1)$.

السؤال الثانى (7 درجات) :

(i) إذا كانت $w = x + y + f(x,y)$ حيث $x = e^{r-s}$ & $y = e^{s-r}$

والمشتقات الجزئية للدالة f موجودة . فاحسب كل من w_r , w_s & $w_r + w_s$.

....

$$w_r = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (1+f_x)e^{r-s} + (1+f_y)(-e^{s-r})$$

$$w_s = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (1+f_x)(-e^{r-s}) + (1+f_y)e^{s-r}$$

$$\therefore \quad w_r + w_s = 0$$

(ii) أوجد $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ، حيث z دالة في (x,y) قابلة للتفاضل ومعرفة بالمعادلة :

$$x^2 y - 3xy^2 + Ln(1+z^2) = -5$$

....

$$F(x,y,z) = x^2 y - 3xy^2 + Ln(1+z^2) + 5 = 0$$

$$F_x = 2xy - 3y^2 \quad , \quad F_y = x^2 - 6xy \quad , \quad F_z = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(2xy-3y^2)(1+z^2)}{2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(x^2-6xy)(1+z^2)}{2z}$$

<u>السؤال الثالث (6 درجات) :</u> أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية للدالة

$$f(x,y) = 6xy - 2x^3 + y^2$$

....

$$f_x = 6y - 6x^2 \quad , \quad f_y = 6x + 2y$$

وبوضع $f_x = f_y = 0$ نحصل على $y = -3x, \quad y = x^2$

ومن المعادلتين نحصل على النقاط الحرجة $(0,0)$, $(-3,9)$

$$f_{xx} = -12x \quad , \quad f_{yy} = 2 \quad , \quad f_{xy} = 6$$

$$g(x,y) = f_{xx}\, f_{yy} - f_{xy}^2$$

وبما أن $g(0,0) = -36 < 0$ **فإن النقطة** $(0,0)$ **نقطة سرجيه.**

كذلك $g(-3,9) = 36 > 0$, $f_{xx}(-3,9) = 36 > 0$ **يعني ان للدالة قيمة صغرى محلية عند النقطة** $(-3,9)$ **وقيمة الدالة عند هذه النقطة هي** $f(-3,9) = -27$

<u>السؤال الرابع (6 درجات) :</u>

(i) أحسب التكامل $\int_{-2}^{0}\int_{0}^{1} 3xy^2 \, dydx$

....

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{1} 3xy^2 \, dydx = \int_{-2}^{0} [xy^3 \;]_0^1 \, dx = \int_{-2}^{0} x \, dx \; = -2$$

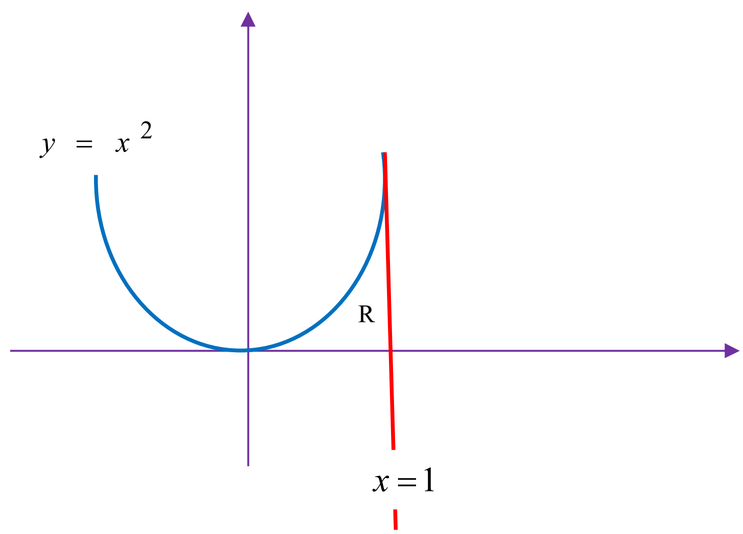
(ii) اعكس ترتيب التكامل التالي ثم احسب قيمته: $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1} e^{x^3}\,dx\,dy$

....

منطقة التكامل R هي $\sqrt{y} \le x \le 1 \quad , \quad 0 \le y \le 1$ وهي ايضاً

$$0 \le x \le 1 \;, \quad 0 \le y \le x^2$$

كما في الشكل التالي :

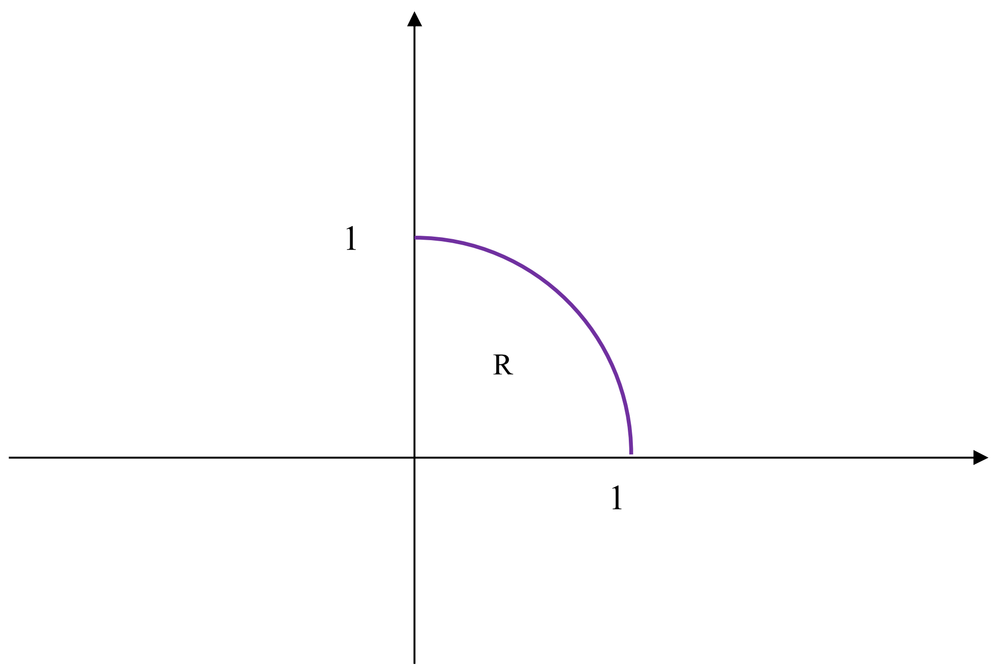


$$\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1} e^{x^3}\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} e^{x^3}\,dy\,dx = \int_{0}^{1}[ye^{x^3}]_{0}^{x^2}\,dx = \int_{0}^{1} x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}(e-1)$$

السؤال الخامس (5 درجات) : احسب قيمة التكامل $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2dydx}{1+(x^2+y^2)}$

....

منطقة التكامل R هي المنطقة على وداخل الدائرة $x^2+y^2=1$ كما في الشكل ادناه



وبالإحداثيات القطبية R هي المنطقة :

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} , \qquad 0 \le r \le 1$$

وبالتالي

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2dydx}{1+(x^2+y^2)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{2rdrd\theta}{1+r^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [Ln(1+r^2]_0^1 \; d\theta = \frac{\pi Ln2}{2}$$