إجابة الإختبار النهائي في 201 ريض

الفصل الدراسي الأول 1444هـ

السؤال الأول (5 درجات): أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$.

....

ألحل :

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

وبحل المعادلات :

$$f_x = 2x = \lambda g_x = 2\lambda x$$

$$f_y = 2y - 1 = \lambda g_y = 2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

نحصل على النقاط $(0,\pm 2)$

وبالتالي القيمة الصغرى للدالة هي $f(0,2) = 2$ **والقيمة العظمى للدالة هي** $f(0,-2) = 6$

....

السؤال الثاني(5 درجات): أدرس اتصال الدالة:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + xy^2 \sin x}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

عند النقطة $(0,0)$.

....

الحل :

على المسار $y = mx$ حيث $m \in \mathbb{R}$ وعندما $(x,y) \neq (0,0)$ فإن

$$f(x,mx) = \frac{x^2 + mx^3 \sin x}{x^2 + m^2 y^2} = \frac{1 + mx \sin x}{1 + m^2} \to \frac{1}{1+m^2} \quad as \quad x \to 0$$

قيمة هذه النهاية تختلف باختلاف قيم m

أي أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة

وبالتالي الدالة غير متصلة عند النقطة $(0,0)$

....

السؤال الثالث (4 درجات): اذا كانت $z = f(x^2 + y^2)$ قابلة للتفاضل فاثبت أن:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial z}{\partial y}$$

....

الحل :

$$take \ \ u = (x^2 + y^2)$$

$$\text{Then} \quad z = f(u) \ \ \text{and} \ \ \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(u) \ \ , \ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(u)$$

وبالتلي :

$$y\frac{\partial z}{\partial x} = 2xyf'(u) \ = \ x\frac{\partial z}{\partial y}$$

....

السؤال الرابع (9 درجات): (أ) اعكس ترتيب ا التكامل $\int_0^1\int_y^1 y\sqrt{1+x^3}\, dxdy$ ثم أحسب قيمته.

(ب) احسب التكامل $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2-x^2}} dzdxdy$

(ج) استخدم التكامل الثنائي لايجاد حجم المجسم الواقع تحت سطح الدالة $z = x^2 + 2$ وفوق المنطقة

المحدودة بالمنحنيين $y = x$ و $y = \sqrt{x}$.

....

$$\int_0^1\int_y^1 y\sqrt{1+x^3}\, dxdy = \int_0^1\int_0^x y\sqrt{1+x^3}\,dydx = \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{9}$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2-x^2}} dzdxdy = \int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,dzdrd\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$v=\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}}(x^2+2)dydx=\frac{31}{84}$$

....

<u>السؤال الخامس (8 درجات):</u> ادرس تقارب المتسلسلات التالية وبين نوع التقارب (هل هو شرطي أو مطلق) في حالة التقارب :

$$(i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} \qquad (ii)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{Ln(n)}{3^n} \qquad (iii)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{1+\sqrt{n}}$$

....

الحل :

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ تتقارب (تقارب شرطي)

المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{Ln(n)}{3^n}$ تتقارب (تقارب مطلق)

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{1+\sqrt{n}}$ تتباعد

....

<u>السؤال السادس (9 درجات):</u> (أ) أوجد نصف قطر و فترة التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}(x+2)^n$

(ب) أوجد متسلسلة تيلور للدالة e^x عند $x=3$.

(ج) أكتب الدالة $\frac{x^2}{1-x^6}$ حيث $|x|<1$ على شكل متسلسلة قوى في x .

....

الحل

نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}(x+2)^n$ يساوي 3 وفترة تقاربها [-5,1)

متسلسلة تيلور للدالة e^x عند $x = 3$ هي $e^3 \sum_0^\infty \frac{(x-3)^n}{n!}$

متسلسلة القوى $\sum_0^\infty x^{6n+2}$ تمثل الدالة $\frac{x^2}{1-x^6}$ حيث $|x|<1$.