الفصل الأول

أسس نظرية الرسومات

الرسومات التي ندرسها في هذا المقرر تكون رسومات منتهية

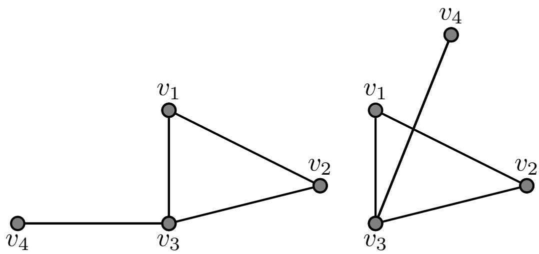
1.1 تعاريف أساسية وأمثلة

نسمي G رسما (graph) إذا كان $G = (V, E)$ زوج مرتب، حيث V مجموعة منتهية وغير خالية تسمى **مجموعة رؤوس الرسم** G (V is a vertex set of G)
و $E \subseteq \{\{u, v\}, x,\ y \in V\}$ تسمى **مجموعة أضلاع الرسم** G (E is an edge set of G) ، للتبسيط يمكن أن نرمز للضلع $uv = \{u, v\}$.
ليكن $G = (V, E)$ رسما و لتكن $u,\ v \in V$. إذا كان $uv \in E$، فإننا نسمي كل من u و v طرف الضلع uv.

1.1.1 أمثلة

مثال 1

ليكن الرسم $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4\})$.



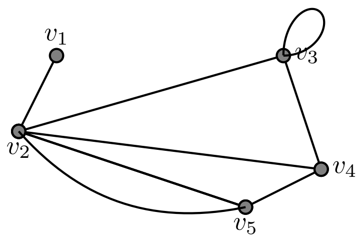
تمثيلان لنفس الرسم G

رتبة الرسم G هي 4

سعة (أو حجم) الرسم هو 4

مثال 2

ليكن الرسم $H = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_3, v_3v_4, v_2v_4, v_4v_5, v_2v_5, v_2v_5\})$



تمثيل للرسم H

رتبة الرسم H هي 5

سعة (أو حجم) الرسم هو 8

نلاحظ أن الرسم H هو رسم غير بسيط وذلك لسبب وجود عروة في الرسم

ويمكن أن نلاحظ أن الرسم H هو رسم غير بسيط وذلك لسبب وجود ضلع مضاعف في الرسم

مبرهنة 1.1.1 (مبرهنة تصافح الأيدي theorem handshaking)
إذا كان $G=(V,E)$، فإن $\sum\limits_{v\in V} deg(v)=2|E|$.

البرهان

نتيجة 1.2.1

عدد الرؤوس الفردية في الرسم $G=(V,E)$ هو عدد زوجي

البرهان

2.1 الرسوم الجزئية

يسمى الرسم $H=(W,F)$ **رسما جزئيا** subgraph من الرسم $G=(V,E)$، إذا كان $W\subseteq V$ و $F\subseteq E$، ويسمى **رسما جزئيا مولّدا** spanning subgraph للرسم G إذا كان $W=V$ و $F\subseteq E$.

3.1 الرسوم المترابطة

تسمى المتتالية المتناوبة من الرؤوس والأضلاع $v_1, e_1, ..., v_{m-1}, e_{m-1}, v_m$ **ممرا** path من الرأس v_1 إلى الرأس v_m في الرسم $G=(V,E)$ إذا كانت الرؤوس مختلفة وكان

$e_i = v_iv_{i+1} \in E$ لكل $1 \leq i \leq m$، ونرمز للممر اختصاراً بمتتالية الرؤوس $v_1, ..., v_m$ ونرمز كذلك $P_m = v_1, ..., v_m$. نعرف **طول الممر** بعدد أضلاعه.
يسمى الممر **دورة** cycle إذا كان $v_m = v_1$ و $m \geq 3$ والرؤوس v_i مختلفة لكل $2 \leq i \leq m-1$.

يقال إن الرأسين u و v **مترابطان** connected في الرسم $G = (V, E)$ إذا وُجد ممر من u إلى v أو إذا كان $u = v$، كما يقال إن الرسم $G = (V, E)$ **مترابط** connected graph إذا كان كل رأسين فيه مترابطين.

لنعرّف **علاقة الترابط** على رؤوس الرسم $G = (V, E)$ كالتالي، الرأس u على علاقة مع الرأس v إذا كان الرأسين u و v مترابطين.

مبرهنة 3.1.1
علاقة الترابط على رؤوس الرسم G هي علاقة تكافؤ.

البرهان

مبرهنة 3.2.1
لأي رسم $G = (V, E)$، إما G أو $\overline{G}$ مترابط.

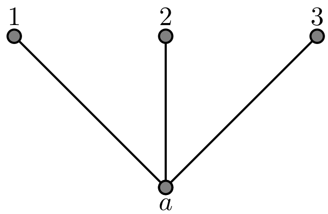
البرهان

ليكن $G = (V, E)$ رسما مترابطا وليكن $v \in V$. يسمى $\varepsilon(v) = max\{d(u, v) : u \in V\}$ الاختلاف المركزي eccentricity للرأس v، ويسمى $r(G) = min\{\varepsilon(v) : v \in V\}$ **نصف القطر** radius الرسم G، كما يسمى $d(G) = max\{\varepsilon(v) : v \in V\}$ **القطر** diameter الرسم G، تسمى المجموعة $C(G) = \{v : v \in V, \varepsilon(v) = r(G)\}$ **مركز** الرسم G.

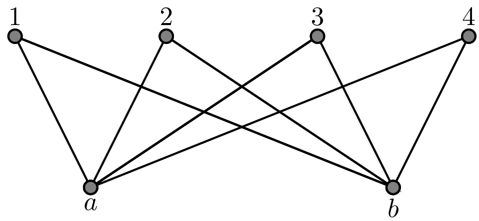
4.1 الرسوم ثنائية التجزئة

يسمى الرسم $G=(V,E)$ رسما **ثنائي التجزئة** bipartite graph إذا أمكن تجزئة رؤوسه إلى جزئين منفصلين $X,\ Y$ بحيث إذا كان $uv\in E$ فإن $u\in X$ و $v\in V$ أو العكس. عادة ما نرمز للرسم G بالرمز $G=(X\cup Y,E)$. يسمى الرسم ثنائي التجزئة $G=(X\cup Y,E)$ **ثنائي التجزئة تاماً** complete bipartite graph إذا كان $xy\in E$ لكل $x\in X$ و $y\in Y$، كما نرمز له بالرمز $K_{m,n}$ حيث $|X|=m$ و $|Y|=n$.

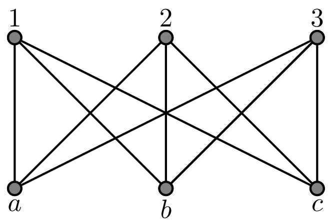
مثال:



$K_{1,3}$



$K_{2,4}$



$K_{3,3}$

ملحوظة:
الدورة الثلاثية ليست رسما ثنائي التجزئة

مبرهنة 4.1.1
إذا كان $G=(X\cup Y,E)$ ثنائي التجزئة، فإن $\sum_{y\in Y} deg(y) = \sum_{x\in X} deg(x) = |E|$.

البرهان

مبرهنة 4.2.1
الرسم $G=(V,E)$ ثنائي التجزئة، إذا وفقط إذا كان لا يحتوي على دورة طولها فردي.

البرهان

5.1 تمثيل الرسم بمصفوفة

لتكن $G(V,E)$ رسما بحيث $V=\{v_1,...,v_n\}$. نعرف **مصفوفة التجاور** adjacency matrix $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ للرسم G كما يلي:

$$a_{ij}=\left\{\begin{array}{ll}1, & v_iv_j\in E\\ 0, & v_iv_j\notin E\end{array}\right.$$

نلاحظ أن $A=A^t$، حيث A^t هي **منقول** transpose المصفوفة A، كما نلاحظ أن $deg(v_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ لكل $1\le i\le n$ ومنه a_{ij} $\sum_{1\le i,j\le n}$ $=|2|E$.

تسمى المتتالية المتناوبية من الرؤوس والأضلاع $W=x_1,e_1,x_2,...,x_{m-1},e_{m-1},x_m$ **مسارا** walk من الرأس x_1 إلى الرأس x_m في الرسم $G=(V,E)$ إذا كان $e_i=x_ix_{i+1}\in E$ لكل $1\le i\le m-1$, و اختصارا نرمز $W=x_1,x_2,...,x_m$.
كما نعرف **طول المسار** W بأنه عدد أضلاع W، أي $m-1$. ويقال أن المسار مغلق إذا كان $x_1=x_m$. يسمى المسار **طريقا** trail إذا كانت أضلاعه مختلفة, ويسمى الطريق المغلق **دارة** circuit.
نذكر بأن المسار **ممرا** path إذا كانت رؤوسه مختلفة, ويسمى الممر المغلق **دورة** cycle.

مبرهنة 5.1.1
إذا كانت $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ مصفوفة التجاور للرسم G الذي رؤوسه $\{v_1,...,v_n\}$ وكانت $A=[a^m_{ij}]_{n\times n}$، فإن a^m_{ij} يساوي عدد المسارات المختلفة التي طولها m من الرأس v_i إلى الرأس v_j.

البرهان

مبرهنة 5.2.1
لتكن $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ مصفوفة التجاور للرسم G الذي رؤوسه $\{v_1,...,v_n\}$ ولتكن $B=[b^m_{ij}]_{n\times n}$ هي المصفوفة المعرفة على النحو التالي: $B=A^1+...+A^{n-1}$، عندئذ G رسم مترابط إذا وفقط إذا كان $b_{ij}\neq 0$ لكل $i\neq j$.

البرهان

6.1 التماثل في الرسوم

نقول إن الرسم $G_1=(V_1,E_1)$ **يساوي** الرسم $G_2=(V_2,E_2)$ ونكتب $G_1=G_2$ إذا كان $V_1=V_2$ و $E_1=E_2$، و خلاف ذلك نقول إن G_1 و G_2 **مختلفان** و نكتب $G_1\neq G_2$.

نقول إن الرسم $G_1=(V_1,E_1)$ **متماثل** isomorphic مع الرسم $G_2=(V_2,E_2)$ ونكتب $G_1\cong G_2$ إذا وُجد تقابل $f:V_1\to V_2$ يحقق الشرط: $uv\in E_1$ إذا وفقط إذا كان $f(u)f(v)\in E_2$ وحينئذ يسمى f **تماثل رسوم** isomorphic graph إذا لم يُوجد تماثل بين الرسمين G_1 و G_2 فنقول إنهما غير متماثلين ونكتب $G_1\ncong G_2$.

نلاحظ أنه، إذا كان الرسمان متماثلين فالفرق الواضح بينهما هو فقط في تسمية الرؤوس.

مبرهنة 6.1.1
علاقة تماثل الرسوم هي علاقة تكافؤ على المجموعة المكونه من جميع الرسوم

البرهان

نتيجة 6.2.1
إذا كان $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ رسمين متماثلين فإن:

1. $|V_1| = |V_2|$ و $|E_1| = |E_2|$.
2. إذا وُجد في الرسم G_1 ممر (دورة) من طول معين، فإنه يوجد في الرسم G_2 ممر (دورة) من الطول نفسه.
3. عدد الدورات في الرسم G_1 من طول معين، يساوي عدد الدورات في الرسم G_2 من الطول نفسه.
4. إذا كانت $d_1, ..., d_n$ هي درجات رؤوس الرسم G_1، فإنها هي كذلك درجات رؤوس الرسم G_2.

البرهان

7.1 العمليات على الرسوم

توجد عدة طرائق لإنشاء رسوم جديدة من رسوم معطاة. وتفيد هذه الطرائق في توصيف بنية رسم ما بدلالة رسوم أبسط، كما تساعد في التعبير عن رسوم بترميز موجز.

1.7.1 تعريف

إذا كان $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$, $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, رسمين بحيث $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ فإن $G_1 \cup G_2$، $G_1 + G_2$ و $G_1 \times G_2$ ترمز إلى **اتحاد** union G_1 و G_2، **مضمون** join G_1 و G_2، **حاصل ضرب** أو **جداء** product G_1 و G_2، على الترتيب. وهذه رسوم معرفة كما يلي:

1. $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

2. $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$,
$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup A$.
حيث $A = \{u_1u_2 :\ u_1 \in V(G_1),\ u_2 \in V(G_2)\}$.

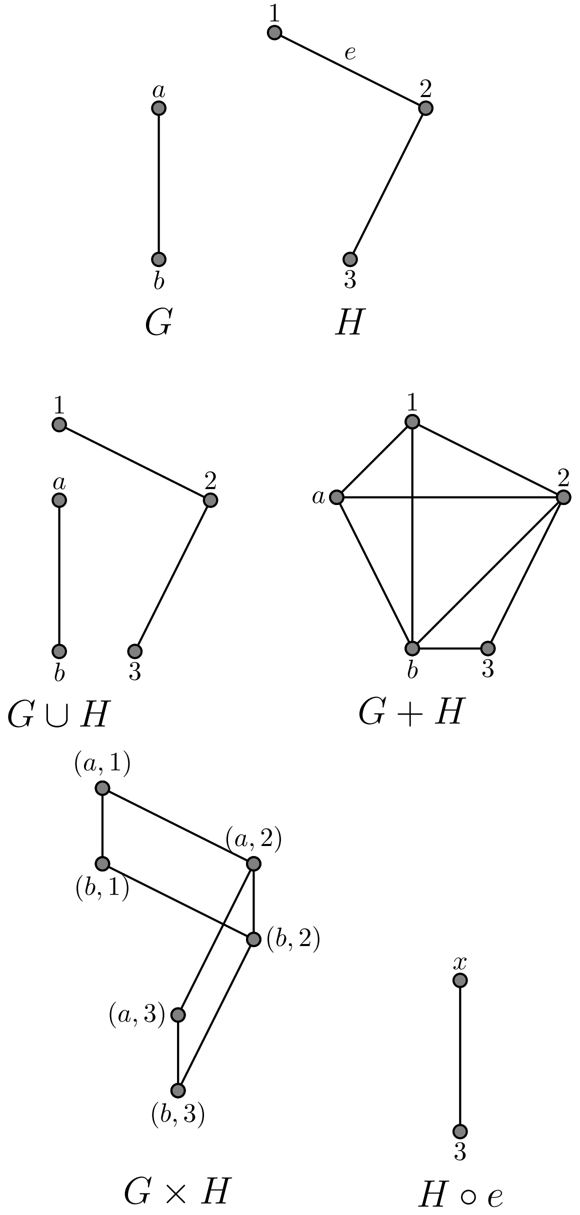
3. $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$.
و يكون الرأسان $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ متجاوران في الرسم $G_1 \times G_2$ إذا وفقط إذا كان $u_1 = u_2,\ v_1v_2 \in E(G_2)$ أو $v_1 = v_2,\ u_1u_2 \in E(G_2)$.

2.7.1 تعريف

ليكن $G = (V(G), E(G))$ رسما وليكن $e = u_1u_2 \in E(G)$. الرمز $G \circ e$ يدل على الرسم الناتج عن **تقليص** contraction الضلع e ونحصل عليه كما يلي:

نحذف الضلع e والرأسين $u_1,\ u_2$ ثم نضيف رأسا جديدا v ونجعل v مجاوراً لرؤوس G المجاورة للرأس u_1 أو للرأس u_2. ويُلاحظ أنه يمكن أن ينتج عن عملية التقليص أضلاع مكررة أو عرى، وعند التعامل مع التقليص يُحذف التكرار أو العرى عندما لا يُؤثر ذلك على ما يُدرس.

3.7.1 مثال

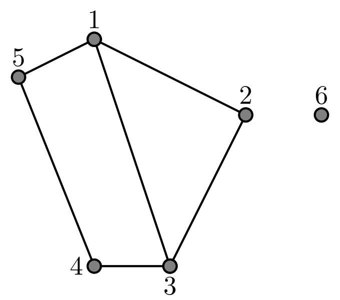


1
e
2
a
b
3
G
H
1
a
2
b
3
G ∪ H
1
a
2
b
3
G + H
(a, 1)
(a, 2)
(b, 1)
(b, 2)
(a, 3)
(b, 3)
x
3
G × H
H ∘ e

8.1 متتاليات الدرجات ومجموعات الدرجات

تعيّن درجات الرؤوس في G متتاليات من الأعداد الصحيحة غير السالبة تسمى **متتاليات درجات** degree sequences للرسم G. فمثلا، تكون المتتاليةغير متزايدة $s = (3, 3, 2, 2, 2, 0)$ متتالية درجات G حيث G معطى في الشكل التالي.

1.8.1 مثال



G

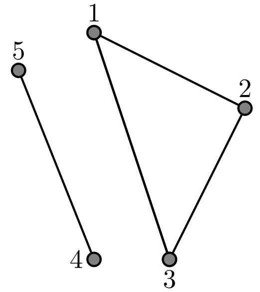
كذلك تعيّن درجات الرؤوس مجموعة تسمى **مجموعة درجات** set degree للرسم G.
مجموعة درجات الرسم السابق G هي $D = \{0, 2, 3\}$.

2.8.1 ملحوظة

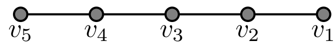
يمكن أن تكون نفس متتالية درجات لرسمين مختلفين.

3.8.1 مثال

الرسمان المختلفان G و H لهما نفس متتالية الدرجات $S = (2, 2, 2, 1, 1)$.



$P_2 \cup C_3$



P_5

4.8.1 خوارزمية هافال-هكيمي Havel-Hakimi

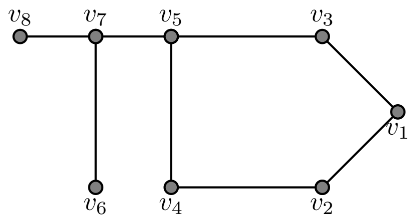
1. **الخطوة 1**
   فرز المتتالية في **متتالية غير متزايدة** $S = (d_1, ..., d_n)$
2. **الخطوة 2**
   - إزالة العنصر d_1 في المتتالية S.
   - نطرح 1 من كل الحدود الأخيرة من d_1 في المتتالية المتبقية $S_1 = (d_2, ..., d_n)$، ونحصل على المتتالية $S' = (d'_2, ..., d'_n)$.
3. **الخطوة 3**
   - إذا كان هناك رقم سالب في هذه المتتالية الجديدة، نتوقف عند هذه الخطوة والمتتالية $S = (d_1, ..., d_n)$ ليست متتالية رسمية.
   - إذا كان هذه المتتالية الجديدة صفرية، نتوقف عند هذه الخطوة والمتتالية $S = (d_1, ..., d_n)$ متتالية رسمية.
   - بخلاف ذلك، نقوم بترتيب هذه المتتالية الجديدة $S' = (d'_2, ..., d'_n)$ بترتيب تنازلي، ونعتبر المتتالية الغير متزايدة الجديدة التي تم الحصول عليها، ونكرر الخطوات بداية من الخطوة 1.

مثال 3
أثبت أن المتتالية $(1, 2, 3, 3, 5, 3, 1, 2, 3)$ هي متتالية رسمية وأعطِ تجسيدا G يحقق المتتالية.

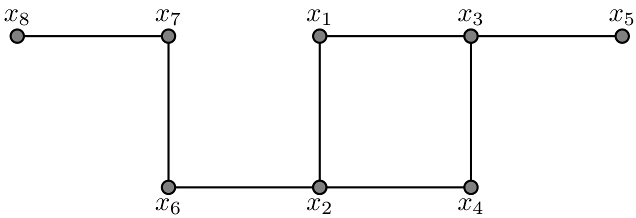
ملاحظة 1 : بالنسبة لنفس متتالية الدرجات ذاتها، من الممكن إيجاد أكثر من تجسيدا غير متماثل.

مثال 4
ليكن الرسم
$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}, \{v_1v_2, v_3v_1, v_2v_4, v_3v_5, , v_4v_5, v_5v_7, v_6v_7, v_7v_8\})$
والرسم

$H = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}, \{x_1x_2, x_1x_3, x_3x_4, x_2x_4, x_2x_6, x_3x_5, x_6x_7, x_7x_8\})$



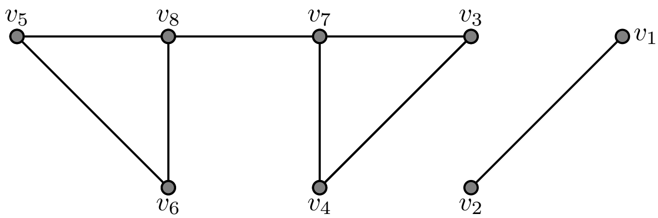
Graph G



Graph H

الرسمان G و H ليسا متماثلين، ولهما نفس متتالية الدرجات $(3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$.

باستخدام خوارزمية هافيل-هاكيمي لنفس متتالية الدرجات $(3,3,2,2,2,2,1,1)$، نجد الرسم K على النحو التالي:



Graph K

الرسمان K وG ليسا متماثلين، والرسمان K وH ليسا متماثلين.

تمرين 1

1. هل المتتالية الغير متزايدة $S = (d_1 \dots d_n)$ متتالية رسمية؟
   (ا) $S = (7,6,5,4,4,3,2,1)$
   (ب) $S - (6,6,6,6,3,3,2,2)$
   (ج) $S = (7,6,6,4,4,3,2,2)$
   (د) $S = (8,7,7,6,4,2,1,1)$
2. في الحالة التي تكون فيها S متتالية رسمية، اذكر تجسيدا للرسم G الذي يحقق المتتالية.

تعين المبرهنة التالية المجموعات الرسمية التي عناصرها أعداد موجبة، كما تعطينا طريقة لإيجاد تجسيدات لتلك المجموعات، وعليه فإن مسألة تحديد المجموعات الرسمية تعتبر محلولة بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 8.1.1
لكل مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة $D = \{a_1, \dots, a_n\}$ بحيث $a_1 < \dots < a_n$ و $n \geq 1$، فإنه يوجد تجسيدا G للمجموعة D بحيث $|V(G)| = a_n + 1$

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n.