

Kingdom of Saudi Arabia Ministry of Higher Education KING SAUD UNIVERSITY <i>Department of Mathematics</i> <i>College of Science</i>		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك سعود قسم الرياضيات كلية العلوم
---	---	---

الإختبار النهائي للفصل الثاني (2023/2022) للمقرر 316 ريض

السؤال الأول:

أ) استعمل تعريف الضرب الداخلي لتبيّن أن $0 = \|f\| = \|\cos x\|$ لاستلزم أن $f = 0$ إلا إذا كانت الدالة f متصلة

ب) بين أن مجموعة الدوال $\left(\sin \frac{n\pi x}{T}\right)_{n \geq 1}$, $\left(\cos \frac{n\pi x}{T}\right)_{n \geq 1}$ متعمادة في فضاء الدوال $L^2(0, T)$

السؤال الثاني:

أ) أوجد القيم الذاتية و الدوال الذاتية للمسألة الحدية

$$\begin{cases} u^{(4)} - \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0, u(\pi) = 0, u'''(0) = 0, u''(\pi) = 0 \end{cases}$$

ب) لتكن لدينا المسألة الحدية:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(e^x \frac{du}{dx}) + xu + \lambda u = 0 \\ u(1) = 0, u(2) = 0 \\ \lambda \int_1^2 e^x \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \int_1^2 (\lambda + x)u^2 dx \end{cases}$$

 أثبت أن :

السؤال الثالث: أ) أوجد محلولة فوريير للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

ب) استنتاج قيمة التكامل:

$$\int_0^\infty \frac{(x \cos x - \sin x) \cos x}{x^3} dx$$

ت) أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\int_0^\infty f(x) \cos \lambda x dx = \begin{cases} 1 - \lambda, & 0 < \lambda < 1 \\ 0, & \lambda > 1 \end{cases}$$

ث) استنتاج أن

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

السؤال الرابع: أ) أوجد تكامل فوريير للدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

و استنتاج قيمة التكامل:

$$\int_0^\infty \frac{2 \cos\left(\frac{\pi \xi}{2}\right) - \xi \sin(\pi \xi)}{1 - \xi^2} d\xi$$

حيث أن $J_n(x)$ هي دالة بيسيل من النوع الأول

$$b) \text{برهن أن } \frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$