جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات – الفصل الثاني ١٤٢٨/١٤٢٩

الاختبار النهائي لمقرر ٢٤٣ريض الزمن ١٨٠ دقيقة الاثنين ١٢-٦-١٤٢٩

ملاحظة هامة: اجب عن السؤالين الأول والثاني في الكراس رقم (١) وعن السؤالين الثالث والرابع في الكراس رقم (٢).

السؤال الأول:

(أ) إذا كان $(a,b)=1$ وكان $c=a+b$ فأثبت أن $(a,c)=(b,c)=1$.

الحل: **أفرض أن** $p\mid(a,c)$ عليه $p\mid a$ و $p\mid c=a+b$. ومنه $p\mid(a,b)$ وهذا تناقض. إذاً $(a,c)=1$ وبالمثل $(b,c)=1$.

(ب) إذا كان $a\mid c$ وكان $b\mid c$ فأثبت أن $[a,b]\mid c$.

(ج) إذا كان $3\mid a$ و $4\mid b$، فأثبت أن $12\mid(8a-9b)$.

الحل: **حيث** $3\mid a$ و $3\mid 9b$، فإن $3\mid(8a-9b)$. كذلك $4\mid 8a$ و $4\mid b$، فإن $4\mid(8a-9b)$. ومنه $12\mid(8a-9b)$ لأن $(3,4)=1$.

(د) أثبت أنه يمكن كتابة أي عدد صحيح $n>1$ بشكل وحيد (باستثناء الترتيب) على الصيغة $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ حيث $p_1,p_2,\cdots,p_r$ أعداد أولية مختلفة، $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ أعداد صحيحة موجبة.

السؤال الثاني:

(أ) اوجد الحل العام للمعادلة الديوفنتية $46x-28y=6$.

الحل: **حيث** $(46,28)=2\mid 6$ فإن للمعادلة $46x-28y=6$ حل.

$$46=1\times28+18$$
$$28=1\times18+10$$
$$18=1\times18+10$$
$$10=1\times8+2$$
$$8=4\times2+0$$

$$2=10-8=10-(18-10)=2(10)-18=2(28-18)-18=2(28)-3(18)=2(28)-3(46-28)=-3(46)+5(28)$$

ومنه $6=-9(46)+15(28)$. إذاً $x_0=-9,\ y_0=-15$. عليه الحل العام هو $x=-9-14k\,,\ y=-15-23k$.

(ب) احسب $(78^{10}+72^5)(\bmod 7)$.

الحل: **حيث** $78\equiv1(\bmod 7)$ فإن $78^{10}\equiv1(\bmod 7)$. كذلك $72\equiv2(\bmod 7)$ ومنه $72^5\equiv2^5\equiv32\equiv4(\bmod 7)$. إذاً $(78^{10}+72^5)\equiv5(\bmod 7)$.

(ج) اثبت أن جميع أنظمة الرواسب المختزلة قياس n تحتوي على نفس العدد من العناصر.

السؤال الثالث:

(أ) بين أن نظام التطابقات الآتي منسجم ثم عين حله

$x\equiv -2\,(\text{mod}\,21)$ و $x\equiv 5\,(\text{mod}\,14)$ و $x\equiv 1\,(\text{mod}\,6)$.

الحل: حيث $(6,14)=2,\ (6,21)=3,\ (14,21)=7$ و $1\equiv 5\,(\text{mod}\,2),\ \ 1\equiv -2\,(\text{mod}\,3),\ 5\equiv -2\,(\text{mod}\,7).$ ، فإن النظام منسجم. عليه للنظام حل وحيد قياس $[16,14,21]=42$. لاحظ أن

$$x\equiv 1(\text{mod}\,6)\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 1(\text{mod}\,3)\\ x\equiv 1(\text{mod}\,2)\end{cases} \text{ و } x\equiv 5\,(\text{mod}\,14)\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 5(\text{mod}\,7)\\ x\equiv 5(\text{mod}\,2)\end{cases} \text{ و } x\equiv -2\,(\text{mod}\,21)\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv -2(\text{mod}\,7)\\ x\equiv -2(\text{mod}\,3)\end{cases}$$

ومنه النظام $x\equiv -2\,(\text{mod}\,21)$ و $x\equiv 5\,(\text{mod}\,14)$ و $x\equiv 1\,(\text{mod}\,6)$ يكافئ النظام $x\equiv -2\,(\text{mod}\,7)$ و $x\equiv 1\,(\text{mod}\,2)$ و $x\equiv 1\,(\text{mod}\,3)$. حيث $(14)^{-1}\equiv 2(\text{mod}\,3)$ و $(21)^{-1}\equiv 1(\text{mod}\,2)$ و $(6)^{-1}\equiv -1(\text{mod}\,7)$. من مبرهنة الباقي الصينية

$$x\equiv 1(14)(2)+1(21)1+(-2)(6)(-1)(\text{mod}\,42)\equiv 19(\text{mod}\,42)$$

(ب) إذا كان $n=p_1p_2\cdots p_k$ حيث $p_1,p_2,\cdots,p_k$ أعداد أولية مختلفة وكان $(p_i-1)\mid(n-1)$ لكل i فأثبت أن n عدد كارميكل.

(ج) أثبت أن العدد 217 شبه أولي للأساس 5.

الحل: حيث $217=31\times 5$ ، من التعريف يكفي إثبات أن $5^{217}\equiv 5(\text{mod}\,217)$. ويكفي لإثبات ذلك إثبات أن $5^{217}\equiv 5(\text{mod}\,31)$ و $5^{217}\equiv 5(\text{mod}\,7)$.

$$5^{217}\equiv(5^7)^{31}\equiv(5^7)^{30}(5^7)\equiv 5^7\equiv(125)^2 5\equiv 5(\text{mod}\,31)$$
$$5^{217}\equiv(5^{31})^7\equiv(5^{31})^6(5^{31})\equiv 5^{31}\equiv 5^{30}5\equiv(5^5)^6 5\equiv 5(\text{mod}\,31)$$

السؤال الرابع:

(أ) أثبت أن $\varphi(2n)=\varphi(n)$ إذا وفقط إذا كان n عدداً فردياً.

(ب) أثبت أن الدالة $f(n)=n\mu(n)$ ضربية. ثم أستخدم ذلك لإثبات أن الدالة $T(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)d$ **ضربية.**

الحل: ليكن $(m,n)=1$.

$$f(mn)=mn\mu(mn)=mn\mu(m)\mu(n)=m\mu(m)n\mu(n)=f(m)f(n)$$

إذاً $f(n)=n\mu(n)$ **ضربية.**

من مبرهنة (إذا كانت f **ضربية، فإن** $\sum_{d\mid n}f(d)$ **ضربية) فإن** $T(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)d$ **ضربية.**

(ج) أوجد $T(p^k)$ حيث p عدد أولي. ثم احسب $T(3000)$ **حيث** $T(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)d$.

$$T(p^k)=\mu(1)1+\mu(p)p=1+(-1)p=1-p$$

حيث $3000=3\times 5\times 2^3$ ، فإن $T(3000)=T(3)T(5)T(2^3)=(-2)(-4)(-1)=-8$

(د) عين جميع الثلاثيات الفيثاغورسية البدائية التي فيها $x=19$.

$x=m^2-n^2=(m+n)(m-n)=19$ ومنه $(m+n)=19,\ (m-n)=1$ عليه $m=10,\ n=9$. إذاً $x=19,\ y=2mn=180,\ z=m^2+n^2=181$.