

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: أوجد نهايات الدوال التالية

$$1 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \tan 6x}$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{5x} - 5}$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 8}{5x^2 + x + 1}$$

السؤال الثاني: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الدوال التالية:

$$1) y = (x^2 + \sec 2x)^5$$

$$3) y = \frac{\tan x + \sin 5x}{\cos 3x}$$

$$2) y = (x^2 + \sin 2x)(x^{-5} + \cos 3x)$$

$$4) y = \sin^{-1} 5x + \tan^{-1}(7x - 1)$$

السؤال الثالث: اثبت ما يلي:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$2) y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$$

نموذج الإجابة

السؤال الأول:

$$1 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \frac{0}{0}$$

بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)}{(x + 2)} = \frac{6}{5}$$

بتحليل البسط والمقام نحصل على:

$$2 - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{5x}-5} = \frac{0}{0}$$

بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{5x}-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{5x}-5} \cdot \frac{\sqrt{5x}+5}{\sqrt{5x}+5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{5x}+5)}{5x-25} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{5x}+5)}{5(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{5x}+5)}{5} = 2 \end{aligned}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام يكون:

$$3 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \tan 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x + \tan 6x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\tan 6x}{x}} = \frac{1}{1+6} = \frac{1}{7}$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 8}{5x^2 + x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

بالتعويض المباشر نحصل على حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 8}{5x^2 + x + 1} = \frac{7}{5}$$

لان البسط والمقام من نفس الدرجة

السؤال الثاني :

$$1) y = (x^2 + \sec 2x)^5$$

$$y' = 5(x^2 + \sec 2x)^4 (2x + 2 \sec 2x \tan 2x)$$

$$2) y = (x^2 + \sin 2x)(x^{-5} + \cos 3x)$$

$$y' = (2x + 2 \cos 2x)(x^{-5} + \cos 3x) + (x^2 + \sin 2x)(-5x^{-6} - 3 \sin 3x)$$

$$3) y = \frac{\tan x + \sin 5x}{\cos 3x}$$

$$y' = \frac{(\sec^2 x + 5 \cos 5x) \cos 3x - (\tan x + \sin 5x)(-3 \sin 3x)}{(\cos 3x)^2}$$

$$y' = \frac{(\sec^2 x + 5 \cos 5x) \cos 3x + (\tan x + \sin 5x) 3 \sin 3x}{(\cos 3x)^2}$$

$$4) y = \sin^{-1} 5x + \tan^{-1}(7x - 1)$$

$$y' = \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}} + \frac{7}{1+(7x-1)^2}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}} + \frac{7}{49x^2 - 14x + 2}$$

السؤال الثالث:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2) y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$