تحليل التغاير

Analysis of Covariance

1- مقدمة

في كثير من النواحي التطبيقية عند إجراء تجربة وفقا لأحد التصاميم ، يظهر للباحث بعض المتغيرات الكمية الأخرى التي تشترك مع المعالجات جنبا إلى جنب في التأثير على الظاهرة محل الدراسة، ومن ثم يحتاج الباحث إلى عزل آثار هذه المتغيرات لتحديد الأثار الفعلية للمعالجات، وعدم الأخذ في الاعتبار هذه المتغيرات يترتب عليه زيادة في حجم تباين الخطأ التجريبي مما يؤدي إلى الوصول لنتائج مضللة للتقديرات من ناحية، واتخاذ قرارات غير سليمة بخصوص معنوية آثار المعالجات من ناحية أخرى.

لذا يهتم أسلوب تحليل التغاير بدراسة وتحليل أثر عدة متغيرات مختلفة النوعية على متغير تابع كمي، وتطبيق هذا الأسلوب في مجال تصميم وتحليل التجارب يسعي لتحقيق الأهداف التالية:

1- تقدير الأثار الفعلية للمعالجات واختبار تساوي متوسطاتها بعد إزالة آثار المتغيرات الكمية المستقلة الأخرى على المتغير التابع.

2- تقدير آثار المتغيرات الكمية واختبار معنويتها مع تثبيت آثار المعالجات.

3- تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطات المعالجات المعدلة (أي المتوسطات المحسوبة بعد إزالة آثار المتغيرات الكمية الأخرى).

وفيما يلي عرض لنموذج تحليل التغاير وافتراضاته، وكذلك الاستدلال الإحصائي المناسب للتحليل.

2- نموذج تحليل التغاير في حالة تصميم تام تعشية.

- **شكل النموذج:**

بفرض أنه أجريت تجربة وفقا لتصميم تام التعشية، لدراسة وتحليل أثر t من المعالجات $T_1,...T_t$،

على المتغير التابع الكمي y ، وأن المتغير الكمي x هو أحد المتغيرات المستقلة التي يرى الباحث أنه يشارك المعالجات في التأثير على المتغير التابع Y محل الدراسة، في هذه الحالة يكون مصادر الاختلاف في المتغير التابع y ثلاث مصادر هي:

- المعالجات.
- المتغير الكمي المستقل x
- الأخطاء التجريبية.

واستناداً لذلك يمكن صياغة النموذج الخطي الذي يعكس هذه المصادر الثلاث كالتالي:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(x_{ij} - \bar{x}..) + \varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

حيث أن:

y_{ij} : المشاهدة على الوحدة التجريبية رقم j التي استلمت المعالجة رقم i ، $i=1,2,...,t$ ، $j=1,2,...,r$

μ : متوسط عام.

τ_i : أثر المعالجة رقم i

x_{ij} : المتغير الكمي المستقل المشاهد على الوحدة التجريبية رقم j التي استلمت المعالجة رقم i، ويطلق عليه بالمتغير المفسر أو المتنبأ منه.

$\bar{x}..$: المتوسط العام للمتغير الكمي المستقل، $(\bar{x}.. = x../tr)$.

β : أثر المتغير الكمي الستقل x على المتغير التابع y ، ويسمى بمعامل الانحدار، ويبين هذا المعامل اتجاه نوع هذا الأثر (إيجابي، أو سلبي) ، وكذلك مقدار التغير في المتغير التابع y إذا تغيرت x بوحدة واحدة.

ε_{ij} : الخطأ التجريبي للوحدة التجريبية رقم j التي استلمت المعالجة رقم i.

والنموذج (1) أعلاه هو نموذج خطي يسمى بنموذج تحليل التغاير.

- **افتراضات النموذج**

يستند هذا النموذج على الافتراضات التالية:

- المتغير التابع كمي متصل وله توزيع طبيعي، ومشاهداته مستقلة.
- المتغير المستقل x كمي ومعطاه فهو متغير محدد.
- مجموع آثار المعالجات يساوي صفرا، $\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$ كما أنها مستقلة خطيا عن المتغيرات المستقلة x .

- الأخطاء التجريبية متغيرات عشوائية لها توزيع طبيعي متوسطه صفرا وتباينه σ^2 ثابت من مشاهدة لأخرى.
- الأخطاء التجريبية مستقلة خطيا عن المتغيرات المستقلة x .

3- الاستدلال الإحصائي.

لتحقيق أهداف تحليل التغاير في مجال التصميم، يجب إجراء الاستدلال الإحصائي والذي يتناول تقديرات فترات الثقة واختبارات الفروض التالية:

- اختبار فرض تساوي متوسطات المعالجات عندما يعزل أثر المتغير المستقل x الذي أخذ في الاعتبار عند التصميم.
- تقدير فترة ثقة لمعامل انحدار المتغير المستقل β وكذلك اختبار معنويته.
- تقدير فترات ثقة لمتوسط المعالجة وكذلك للفرق بين متوسطي معالجتين.
- إجراء المقارنات المتعددة لمتوسطات المعالجات المعدلة.

ولكي يتم إجراء فترات الثقة واختبارات الفروض أعلاه يجب تكوين جدول تحليل التباين المعدل أو ما يسمى بجدول تحليل التغاير.

- **جدول تحليل التباين المعدل (جدول تحليل التغاير)**

من نموذج تحليل التغاير (1) يلاحظ أن مصادر الاختلاف في المتغير التابع ثلاث هي: المعالجات ودرجات حريتها *(t-1)* ، والمتغير الكمي المستقل x وله درجة حرية واحدة، والأخطاء التجريبية ولها درجات حرية *(tr-t-1)*. ومن ثم يأخذ جدول تحليل التباين الشكل التالي:

S.O.V	**SS**	**df**	**MS**	**F***
Treat.	$SSTr \mid x$	$t-1$	$MSTr \mid x$	$F^*_{Tr} = (MSTr \mid X)/(t-1)$
X	$SSX \mid Tr$	1	$MSX \mid Tr$	$F^*_X = (MSX \mid X)/1$
Error	$SSE(Tr, X)$	$tr-t-1$	$MSE(Tr, X)$	
Corrected Total	$SSTo$	$tr-1$		

حيث أن:

$SSTr \mid x$: هو مجموع المربعات التي أضافتها المعالجات عند إدخالها في النموذج الخطي الذي يشمل المتغير المستقل x

$SSX \mid Tr$: هو مجموع المربعات التي أضافها المتغير المستقل x عند إدخاله في النموذج الخطي الذي يشمل المعالجات.

$SSE(Tr, X)$: مجموع المربعات في النموذج الخطي الذي يشمل كلا المتغيرين (المعالجات والمتغير المستقل x).

$SSTo$: مجموع المربعات الكلي ويحسب بالمعادلة التالية:

$$SSTo = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CF, \quad CF = \frac{\mathrm{y..}^2}{tr}$$

ومجموع المربعات الذي أضافه كل مصدر من المصادر أعلاه يحسب باتباع الخطوات التالية:

1. حساب مجموع مربعات الخاصة بتحليل التباين لكل من y ، x ، xy كما هو مبين بالجدول التالي:

S.O.V	y	x	xy
Treat	$Tyy = \frac{1}{r}\sum y_i.^2 - CF_y$	$Txx = \frac{1}{r}\sum x_i.^2 - CF_x$	$Txy = \frac{1}{r}\sum (x_i.y_i.)\text{-}CF_{xy}$
Error	$Eyy = Syy - Tyy$	$Exx = Sxx - Txx$	$Exy = Sxy - Txy$
Total	$Syy = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CF_y$	$Sxx = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2 - CF_x$	$Sxy = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} (x_{ij} y_{ij}) - CF_{xy}$

2. حساب مجموع المربعات الذي أضافه كل مصدر

مجموع مربعات الذي أضافه المتغير x

$$\left(SSX \mid Tr\right) = \frac{(Exy)^2}{Exx}$$

مجموع مربعات كلي إضافي

$$\left(adj.SSTo\right) = Syy - \frac{(Sxy)^2}{Sxx}$$

مجموع مربعات المعالجات المعدل	مجموع مربعات الأخطاء للنموذج
$(SSTr \mid x) = SSTo - SSE$	$[SSE(Tr, x)] = Eyy - \dfrac{(Exy)^2}{Exx}$

3. تكوين جدول تحليل التباين المعدل (التغاير)

S.O.V	**SS**	**df**	**MS**	F^*
x	$(SSX \mid Tr)$	1	$MSX = (SSX \mid Tr)/1$	$F_x^* = MSX / MSE$
Treat	$(SSTr \mid x)$	$t-1$	$MSTr = (SSTr \mid x)/(t-1)$	$F_T^* = MSTr / MSE$
Error	$[SSE(Tr, X)]$	$tr-t-1$	$MSE = [SSE(Tr, x)]/(tr-t-1)$	
Corrected Total	$SSTo = Syy$	$tr-1$		

- **تطبيق:**

بفرض أن أحد الباحثين أجرى تجربة لدراسة أثر أربعة طرق لعلاج مستوى الكلوسترول الضار LDL في الدم في الفئة العمرية (40 – 50) ، قام بتجربة كل طريقة على 5 مرضى، وقبل تطبيق الطريقة تبين له ضرورة الأخذ في الاعتبار وزن المصاب قبل التجربة، لذا قام الباحث بقياس الوزن قبل التجربة، وبعد الإنتهاء من تجربة الطرق الأربعة لفترة زمنية محددة وفقا للبرنامج المقترح قام بقياس مستوى الكلسترول (جم/لتر) في الدم ولخصت البيانات في الجدول التالي:

	طرق علاج مستوى الكلوسترول الضار							
	M_1		M_2		M_3		M_4	
Pation	x	y	x	y	x	y	x	**y**
1	**70.0**	**5.9**	**80.0**	**5.6**	**75.0**	**5.2**	**71.0**	**3.9**
2	**70.0**	**5.2**	**77.0**	**5.2**	**73.0**	**3.9**	**71.0**	**3.8**
3	**70.0**	**5.0**	**76.0**	**4.7**	**73.0**	**3.6**	**71.0**	**3.4**
4	**69.0**	**4.7**	**75.0**	**3.1**	**72.0**	**3.6**	**72.0**	**3.4**
5	**69.0**	**4.2**	**75.0**	**2.3**	**72.0**	**3.5**	**70.0**	**3.2**

والمطلوب تكوين جدول تحليل التغاير.

لكي يمكن تكوين الجدول نتبع الخطوات التالية:

ومجموع المربعات الذي أضافه كل مصدر من المصادر أعلاه يحسب باتباع الخطوات التالية:

1. حساب مجموع مربعات الخاصة بتحليل التباين لكل من y ، x ، xy

	طرق علاج مستوى الكلوسترول الضار									
	M_1		M_2		M_3		M_4			
Pation	x	y	x	y	x	y	x	y		
1	70.0	5.9	80.0	5.6	75.0	5.2	71.0	3.9		
2	70.0	5.2	77.0	5.2	73.0	3.9	71.0	3.8		
3	70.0	5.0	76.0	4.7	73.0	3.6	71.0	3.4		
4	69.0	4.7	75.0	3.1	72.0	3.6	72.0	3.4		
5	69.0	4.2	75.0	2.3	72.0	3.5	70.0	3.2		
Total	**348.0**	**25.00**	**383.00**	**20.90**	**365.00**	**19.80**	**355.00**	**17.70**	**1451.0**	**83.40**
	$X_{1.}$	$Y_{1.}$	$X_{2.}$	$Y_{2.}$	$X_{3.}$	$Y_{3.}$	$X_{4.}$	$Y_{4.}$	$X_{..}$	$Y_{..}$
Mean	**69.6**	**5.0**	**76.60**	**4.18**	**73.00**	**3.96**	**71.00**	**3.54**	**72.55**	**4.17**
$\sum xy$	**1741.1**		**1610.6**		**1448.7**		**1256.9**		**6057.3**	
$\sum x^2, \sum y^2$	**24222**	**126.58**	**29355**	**95.39**	**26651**	**80.42**	**25207**	**63.01**	**105435**	**365.4**

y	*x*	*xy*
$Y_{..}$= 83.40	$X_{..}$= 1451.0	
CF_y = 347.778	CF_x = 105270.05	CF_{xy} = 6050.67
$\sum\sum y^2$ = 365.4	$\sum\sum x^2$ = 105435	$\sum\sum xy$ = 6057.3
$\sum y_{i.}^2$ = 1767.14	$\sum x_{i.}^2$ = 527043	$\sum x_{i.} y_{i.}$ = 30215.2

باستخدام النتائج أعلاه وبالتطبيق في المعادلات التالية :

S.O.V	y	x	xy
Treat	$Tyy = \frac{1}{r}\sum y_{i.}^2 - CF_y$	$Txx = \frac{1}{r}\sum x_{i.}^2 - CF_x$	$Txy = \frac{1}{r}\sum (x_{i.} y_{i.}) - CF_{xy}$
Error	$Eyy = Syy - Tyy$	$Exx = Sxx - Txx$	$Exy = Sxy - Txy$
Total	$Syy = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CF_y$	$Sxx = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2 - CF_x$	$Sxy = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} (x_{ij} y_{ij}) - CF_{xy}$

يمكن تكوين الجدول التالي:

S.O.V	y	x	xy
Treat	$Tyy = 5.65$	$Txx = 138.55$	$Txy = -7.63$
Error	$Eyy = 11.972$	$Exx = 26.4$	$Exy = 14.26$
Total	$Syy = 17.622$	$Sxx = 164.95$	$Sxy = 6.63$

2. حساب مجموع المربعات الذي يعزى لإضافة كل مصدر.

- $(SSX \mid Tr)$: مجموع المربعات الذي يعزى لإضافة المتغير المستقل x في النموذج الذي يشمل المعالجات ويحسب بالمعادلة التالية .

$$(SSX \mid Tr) = \frac{(Exy)^2}{Exx} = \frac{(14.26)^2}{26.4} = 7.703$$

- $(SSTr \mid \mathrm{x})$: مجموع المربعات الذي يعزى لإضافة المعالجات في النموذج الذي يشمل المتغير المستقل x ، ويحسب بالمعادلة التالية

$$(SSTr \mid \mathrm{x}) = (SSTo \mid \mathrm{x}) - [SSE(Tr, X)]$$

حيث أن:

$$(SSTo \mid \mathrm{x}) = Syy - \frac{(Sxy)^2}{Sxx} = 17.622 - \frac{(6.63)^2}{164.95} = 17.356$$

$$[SSE(Tr, X)] = Eyy - \frac{(Exy)^2}{Exx} = 11.975 - \frac{(14.26)^2}{26.4} = 4.269$$

ومن ثم تكون قيمة مجموع المربعات $(SSTr \mid \mathrm{x})$ هي

$$(SSTr \mid \mathrm{x}) = 17.356 - 4.269 = 13.086$$

3. تكوين جدول تحليل التباين المعدل (تحليل التغاير)

S.O.V	df	SS	MS	F*
x	1	7.703	7.703	27.062
Treat	3	13.086	4.362	15.325
Error	15	4.269	0.285	
Corrected Total	19	17.622		

- **إجراء الاستدلال الإحصائي.**

- **اختبار فرض تساوي متوسطات الكلسترول لطرق العلاج (المعالجات)**

الفرض العدم: متوسطات الكلسترول تحت تأثير طرق العلاج متساوية:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$$

الفرض البديل: يوجد على الأقل متوسطي للكلسترول مختلفين.

$$H_1 : at \ \ least \ \ one \ \ of \ \ \mu_i \neq \mu$$

إحصائية الاختبار: $F^*_{Tr} = MSTr/MSE = 4.362/0.285 = 15.325$

- **القرار:** بما أن القيمة المحسوبة $F_T{}^* = 15.325$ أكبر من القيمة الجدولية $F_{(0.05,3,15)}=3.287$ لذا نرفض الفرض العدم ونقبل الفرض البديل ويستدل من ذلك على وجود على الأقل متوسطي للكلسترول بينها فرق معنوي، ومن ثم يمكن استخدام طريقة أقل فرق معنوي LSD للمقارنة بين كل طريقتين من طرق العلاج.

- **تقدير معامل انحدار المتغير المستقل β واختبار معنويته.**

تقدير معامل الانحدار β هو:

$$Point\ Estimate = \hat{\beta} = \frac{Exy}{Exx} = \frac{14.26}{26.4} = 0.54$$

اختبار معنوية معامل الانحدار

الفرض العدم: ليس للوزن قبل التجربة أثر معنوي على مستوى الكلسترول.

$$H_0 : \beta = 0$$

الفرض البديل: الوزن قبل التجربة له أثر معنوي على مستوى الكلسترول

$$H_1 : \beta \neq 0$$

إحصائية الاختبار: $F^*_{\beta} = MSX/MSE = 7.703/0.285 = 27.062$

القرار: بما أن القيمة المحسوبة $F_\beta{}^* = 27.062$ أكبر من القيمة الجدولية $F_{(0.05,1,15)}=4.543$ لذا نرفض الفرض العدم ونقبل الفرض البديل ويستدل من ذلك على أن إضافة الوزن قبل التجربة له أثر معنوي على مستوى الكلسترول، لذا يجب الأخذ في الاعتبار هذا المتغير عند التصميم.

- **تقدير فترات ثقة لمتوسط المعالجة μ_i**

لتقدير فترة ثقة الخاص بمتوسط المعالجة μ_i يتم اتباع الآتي:

حساب التقدير بنقطة لمتوسط المعالجة بعد إزالة أثر المتغير الكمي المستقل x $(\bar{y}_{i}.^{*})$ وذلك باستخدام المعادلة التالية:

$$\bar{y}_{i}.^{*} = \bar{y}_{i}. - \hat{\beta}(\bar{x}_{i}. - \bar{x}..)$$

حساب الخطأ المعياري لهذا التقدير $S.E_{\bar{y}_{i}.^{*}}$ ويحسب بالمعادلة التالية:

$$S.E_{\bar{y}_{i}.^{*}} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{r} + \frac{(\bar{x}_{i}. - \bar{x}..)^2}{Exx}\right)}$$

وبتطبيق الصيغة المشهورة لفترة الثقة $(1-\alpha)\%$ وهي:

$$Point\ Estimate\ \pm (Tabulated\ Value)\,(Standard\ Error)$$

يمكن تكوين فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ للمتوسط μ_{i} وهي:

$$\bar{y}_{i}.^{*} \pm (t_{(1-\alpha/2,\ df_{error}})\,(S.E_{\bar{y}_{i}.^{*}})$$

وباستخدام بيانات التطبيق السابق يمكن على سبيل المثال تقدير فترة ثقة 95% لمتوسط المعالجة الثانية μ_2 باتباع الخطوات التالية:

- حساب التقدير بنقطة لمتوسط المعالجة μ_2

$$\bar{y}_{2}.^{*} = 4.18 - 0.54(76.6 - 72.55) = 1.99$$

- القيمة الجدولية لـ t

$$t_{(1-\alpha/2,\ df_{error}}) = t_{(0.975,\ 15)} = 2.131$$

- حساب الخطأ المعياري:

$$S.E_{\bar{y}_2.^*} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{r} + \frac{(\bar{x}_2. - \bar{x}..)^2}{Exx}\right)}$$

$$= \sqrt{0.285\left(\frac{1}{5} + \frac{(76.6 - 72.55)^2}{26.4}\right)} = 0.484$$

- حدي الثقة هما :

$$\bar{y}_2.^* \pm (t_{(1-\alpha/2,\ df_{error})})\,(S.E_{\bar{y}_2.^*})$$

$$1.99 \pm (2.131)(0.484) = 1.99 \pm 1.031$$

$$Lower = 1.99 - 1.031 = 0.959 \qquad Upper = 1.99 + 1.031 = 3.021$$

بثقة 95% يتراوح متوسط الكلسترول للطريقة الثانية μ_2 بعد إزالة أثر المتغير الكمي المستقل x بين حد أدنى 0.959 وحد أعلى 3.021 .

- **تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطي معالجتين.**

لتقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطين $(\mu_i - \mu_{i`})$ يجب اتباع الآتي:

حساب التقدير بنقطة للفرق بين متوسطين $(\mu_i - \mu_{i`})$ بعد إزالة أثر المتغير الكمي المستقل x وهو $(\bar{y}_i.^* - \bar{y}_{i`}.^*)$.

حساب الخطأ المعياري لهذا التقدير $S.E_{\bar{y}_i.^* - \bar{y}_{i`}.^*}$ ويحسب بالمعادلة التالية:

$$S.E_{\bar{y}_i.^* - \bar{y}_{i`}.^*} = \sqrt{MSE\left(\frac{2}{r} + \frac{(\bar{x}_i. - \bar{x}_{i`}.)^2}{Exx}\right)}$$

وبتطبيق الصيغة المشهورة لفترة الثقة $(1-\alpha)$% وهي:

$$Point\ Estimate \pm (Tabulated\ Value)\,(Standard\ Error)$$

يمكن تكوين فترة ثقة $(1-\alpha)$% للفرق $(\mu_i - \mu_{i`})$ وهي:

$$\left(\bar{y}_i.^* - \bar{y}_{i`}.^*\right) \pm (t_{(1-\alpha/2,\ df_{error})})\,(S.E_{\bar{y}_i.^* - \bar{y}_i.^*})$$

وباستخدام بيانات التطبيق السابق يمكن على سبيل المثال تقدير فترة ثقة 95% للفرق $(\mu_4 - \mu_2)$ باتباع الخطوات التالية:

- حساب التقدير بنقطة لمتوسط كل معالجة من المعالجتين:

$$\bar{y}_{2}.^{*} = 1.99$$
$$\bar{y}_{4}.^{*} = 3.54 - 0.54(71 - 72.55) = 4.38$$

إذا التقدير بنقطة للفرق $(\mu_4 - \mu_2)$ هو

$$\left(\bar{y}_{4}.^{*} - \bar{y}_{2}.^{*}\right) = 4.38 - 1.99 = 2.38$$

- القيمة الجدولية لـ t

$$t_{(1-\alpha/2,\ df_{error})} = t_{(0.975,\ 15)} = 2.131$$

- حساب الخطأ المعياري:

$$S.E_{\bar{y}_{4}.^{*} - \bar{y}_{2}.^{*}} = \sqrt{MSE\left(\frac{2}{r} + \frac{(\bar{x}_{4}. - \bar{x}_{2}.)^{2}}{Exx}\right)}$$
$$= \sqrt{0.285\left(\frac{2}{5} + \frac{(71 - 76.60)^{2}}{26.4}\right)} = 0.672277$$

- حدي الثقة هما :

$$\left(\bar{y}_{4}.^{*} - \bar{y}_{2}.^{*}\right) \pm (t_{(1-\alpha/2,\ df_{error})})\,(S.E_{\bar{y}_{4}.^{*} - \bar{y}_{2}.^{*}})$$
$$2.38 \pm (2.131)\,(0.672) = 2.38 \pm 1.43$$
$$Lower = 2.38 - 1.43 = 0.95 \quad Upper = 2.38 + 1.43 = 3.81$$

بثقة 95% يتراوح الفرق بين متوسطي الكلسترول $(\mu_4 - \mu_2)$ للطريقتين M_4, M_2 بعد إزالة أثر المتغير الكمي المستقل x بين حد أدنى 0.95 وحد أعلى 3.81 ، وحيث أن فترة الثقة (0.95 ,3.81) لا يقع داخلها الصفر لذا نقبل الفرض البديل بوجود فرق معنوي بين متوسطي الكلسترول للطريقتين M_4, M_2 ونوصي

باستخدام الطريقة M_2 لأنها تخفض مستوى الكلسترول بشكل معنوي مقارنة بالطريقة M_4.

- **إجراء المقارنات المتعددة بين متوسطات المعالجات باستخدام طريقة LSD**

يمكن إجراء المقارنات الثنائية باستخدام طريقة LSD وذلك باتباع الخطوات التالية:

- حساب أقل فرق معنوي LSD .

$$LSD = (t_{(1-\alpha/2,\ df_{error})})\,(S.E_{\bar{y}_i.^* - \bar{y}_{i'}.^*})$$

حيث أن:

$$S.E_{\bar{y}_i.^* - \bar{y}_{i'}.^*} = \sqrt{MSE\left(\frac{2}{r} + \frac{(\bar{x}_i. - \bar{x}_{i'}.)^2}{Exx}\right)}$$

- حساب الفروق المطلقة:

$$dif = \left|\bar{y}_i.^* - \bar{y}_{i'}.^*\right|$$

- إذا كان الفرق المطلق dif أكبر من قيمة أقل فرق معنوي LSD يوجد فرق معنوي بين المتوسطين $(\mu_i - \mu_{i'})$.