

The Fundamental Theorem of Calculus
النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل
Math 111
Lecture 4

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تعريف الدالة الأصلية:

نقول إن الدالة F دالة أصلية للدالة f علي الفترة I إذا كان:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

مثال:

• $F(x) = \frac{4}{3}x^3$ دالة أصلية للدالة

$$f(x) = 4x^2$$

on \mathbb{R} .

• $G(x) = \frac{4}{3}x^3 + 7$ دالة أصلية للدالة

$$g(x) = 4x^2$$

on \mathbb{R} .

• $H(x) = \sqrt{x}$ دالة أصلية للدالة

$$h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

on \mathbb{R}^+ .

مبرهنة: إذا كانت كل من F و G دالة أصلية على الفترة I ، فهناك ثابت c يحقق:

المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :
لتكن f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$.
(١) إذا كان الدالة G معرفة كالتالي:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

فإن G دالة أصلية للدالة f على $[a, b]$ أي أن G قابلة للاشتقاق وأن:
 $G(x)' = f(x), \forall x \in [a, b]$.

(٢) إذا كانت F أي دالة أصلية للدالة f ، فإن:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Examples

أوجد التكامل التالي باستخدام المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل:

$$1) \int_1^2 (4x^3 - 2x) dx.$$

$$2) \int_1^2 \frac{3}{2\sqrt{x}} dx.$$

مبرهنة:

إذا كانت g قابلة للإشتقاق على الفترة I ومداهها محتوى في الفترة $[a, b]$ حيث f متصلة فإن:

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f(g(x))g'(x), \forall x \in [a, b].$$

نتيجة (١):

تحت شرط المبرهنة السابقة نجد لدينا:

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^a f(t) dt = -f(g(x))g'(x), \forall x \in [a, b].$$

نتيجة (٢):

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x), \forall x \in [a, b]$$

حيث أن f و g كما في المبرهنة السابقة و h تحقق شروط g .

Examples

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$(1) \quad F(x) = \int_3^{2x^3+x^2} \frac{u^4}{\sqrt{u^2-5}} du.$$

$$(2) \quad F(x) = \int_{\sqrt{5x}}^7 |\sin(t^2+5)| dt.$$

$$(3) \quad F(x) = \int_{\sin x}^{\cos 3x} \ln(1+x^2) dx.$$

Exercises

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$(1) \quad F(x) = \int_x^4 \frac{t}{\sqrt{t^3 + 2}} dt.$$

$$(2) \quad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sqrt{t^4 + t^2 + 4} dt.$$

Thanks for listening.