The Fundamental Theorem of Calclus
النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل
Math 111
Lecture 4

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تعريف الدالة الأصلية:

نقول إن الدالة F دالة أصلية للدالة f علي الفترة I إذا كان:

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$

.

مثال:

- $F(x)=\frac{4}{3}x^3$ دالة أصلية للدالة

$$f(x)=4x^2$$

on $\mathbb{R}$.

مثال:

- $F(x) = \frac{4}{3}x^3$ دالة أصلية للدالة
$$f(x) = 4x^2$$
on $\mathbb{R}$.
- $G(x) = \frac{4}{3}x^3 + 7$ دالة أصلية للدالة
$$g(x) = 4x^2$$
on $\mathbb{R}$.

مثال:

- دالة أصلية للدالة $F(x) = \frac{4}{3}x^3$

$$f(x) = 4x^2$$

on $\mathbb{R}$.

- دالة أصلية للدالة $G(x) = \frac{4}{3}x^3 + 7$

$$g(x) = 4x^2$$

on $\mathbb{R}$.

- دالة أصلية للدالة $H(x) = \sqrt{x}$

$$h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

on $\mathbb{R}^+$.

مثال:

- $F(x) = \frac{4}{3}x^3$ دالة أصلية للدالة
$$f(x) = 4x^2$$
on $\mathbb{R}$.
- $G(x) = \frac{4}{3}x^3 + 7$ دالة أصلية للدالة
$$g(x) = 4x^2$$
on $\mathbb{R}$.
- $H(x) = \sqrt{x}$ دالة أصلية للدالة
$$h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
on $\mathbb{R}^+$.

مبرهنة: إذا كانت كل من F و G دالة أصلية على الفترة I ، فهناك ثابت c يحقق:

$$G(x) = F(x) + c, \quad x \in I.$$

المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :

لتكن f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$.

المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :

لتكن f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$.

(١) إذا كان الدالة G معرفة كالتالي:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in [a,b].$$

فإن G دالة أصلية للدالة f على $[a,b]$ أي أن G قابلة للاشتقاق وأن:

$$G(x)' = f(x), \forall x \in [a,b].$$

المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :

لتكن f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$.

(١) إذا كان الدالة G معرفة كالتالي:

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad \forall x\in[a,b].$$

فإن G دالة أصلية للدالة f على $[a,b]$ أي أن G قابلة للاشتقاق وأن:

$$G(x)'=f(x), \forall x\in[a,b].$$

(٢) إذا كانت F أي دالة أصلية للدالة f ، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Examples

أوجد التكامل التالي بإستخدام المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل:

$$1) \qquad \int_1^2 (4x^3 - 2x)\,dx.$$

Examples

أوجد التكامل التالي بإستخدام المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل:

$$1) \quad \int_1^2 (4x^3 - 2x)\,dx.$$

$$2) \quad \int_1^2 \frac{3}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

مبرهنة :

إذا كانت g قابلة للإشتقاق على الفترة I ومداها محتوى في الفترة $[a, b]$ حيث f متصلة فإن :

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x), \forall x \in [a, b].$$

مبرهنة :

إذا كانت g قابلة للإشتقاق على الفترة I ومداها محتوى في الفترة $[a, b]$ حيث f متصلة فإن :

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x), \forall x \in [a, b].$$

نتيجة (١):

تحت شرط المبرهنة السابقة نجد لدينا:

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{a} f(t)dt = -f(g(x))g'(x), \forall x \in [a, b].$$

مبرهنة :

إذا كانت g قابلة للإشتقاق على الفترة I ومداها محتوى في الفترة $[a, b]$ حيث f متصلة فإن :

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x), \forall x \in [a, b].$$

نتيجة (١):

تحت شرط المبرهنة السابقة نجد لدينا:

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{a} f(t)dt = -f(g(x))g'(x), \forall x \in [a, b].$$

نتيجة (٢):

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

حيث أن f و g كما في المبرهنة السابقة و h تحقق شروط g .

Examples

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$(1) \qquad F(x) = \int_3^{2x^3+x^2} \frac{u^4}{\sqrt{u^2-5}}\,du.$$

Examples

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$(1) \qquad F(x) = \int_{3}^{2x^3+x^2} \frac{u^4}{\sqrt{u^2-5}}\,du.$$

$$(2) \qquad F(x) = \int_{\sqrt{5x}}^{7} |\sin(t^2+5)|\,dt.$$

Examples

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$(1) \qquad F(x) = \int_{3}^{2x^3+x^2} \frac{u^4}{\sqrt{u^2-5}}\,du.$$

$$(2) \qquad F(x) = \int_{\sqrt{5x}}^{7} |\sin(t^2+5)|\,dt.$$

$$(3) \qquad F(x) = \int_{\sin x}^{\cos 3x} \ln(1+x^2)\,dx.$$

Exercises

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$(1) \qquad F(x) = \int_x^4 \frac{t}{\sqrt{t^3+2}}\,dt.$$

Exercises

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$(1) \qquad F(x) = \int_{x}^{4} \frac{t}{\sqrt{t^3+2}}\,dt.$$

$$(2) \qquad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sqrt{t^4+t^2+4}\,dt.$$

Thanks for listening.