مثال 7.1

- For a single particle in two dimensions, in Cartesian coordinates, under some arbitrary potential energy U(x, y), the Lagrangian is

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y). \tag{11}$$

- In this case, there are two Lagrange equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}. \tag{12}$$

- The left side of each equation is just

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y. \tag{13}$$

- The right side of each equation, in turn, is just

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt}m\dot{y} = m\ddot{y}. \tag{14}$$

- Equating these, we have Newton’s second law

$$F_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = m\ddot{y} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{15}$$

مثال 7.2

- Same as example 7.1, but in polar coordinates. In this case, the potential energy is $U(r, \phi)$, the kinetic energy: $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$.
- so the Lagrangian is just

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r,\varphi).$$

- In this case, there are two Lagrange equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$\rightarrow mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = m\ddot{r}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}$$

- الحد الأول هو حد القوة: $-\frac{\partial U}{\partial r} = F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right),$
- لفهم الحد الثاني نتذكر العلاقة الرياضية:
- أذن:

$$-\frac{\partial U}{\partial \phi} = rF_\phi = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right).$$

حيث استفدنا من العلاقة الرياضية:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

مثال 7.2

- ماذا تعني تلك العلاقة؟

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\rightarrow \nabla U = 0 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\because F_{\varphi} = -\nabla U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

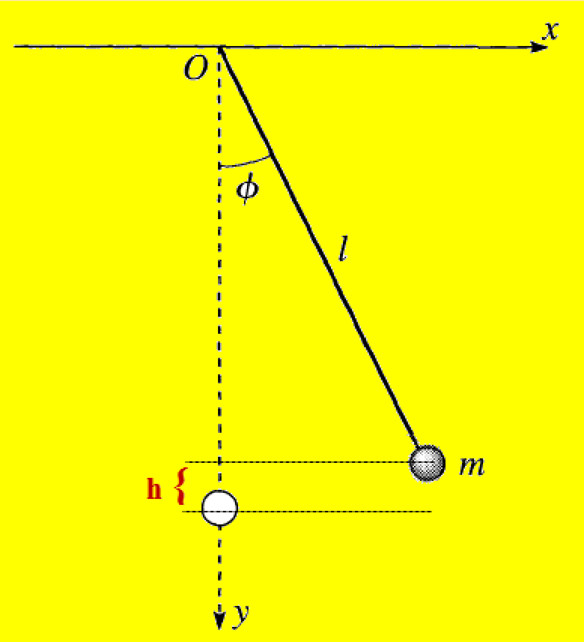
$$\therefore rF_{\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right)$$

- ماهي الحدود التي حصلنا عليها؟

الاندفاع الزاوي	$mr^2\dot{\varphi}$
التسارع المركزي	$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$
عزم اللي	rF_{φ}

7.2- مثال على نظام مقيد

- ذكرنا سابقا بأن ما يميز معادلات لاجرانج أنها متحررة من قيود (القيود).
- سوف نتحدث عن الموضوع بالتفصيل لاحقا ولكن نفص الموضوع في مثال يخضع للقيد. كتلة صغيرة معلقة بحبل يتدلى من سقف (الكتلة مرتبطة بقيد الحبل).
- كما هو واضح من الشكل، تتحرك الكتلة في بعدين تحت القيد التالي: $\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- لحل المسألة يمكن التخلص من y والتعبير عنها بدلالة x أي $y = \sqrt{\ell^2 - x^2}$.
- ولكن أسهل من ذلك يمكن استخدام الأحداثي ϕ
- كالمعتاد نكتب أولا: $\mathcal{L} = T - U$ بدلالة ϕ
- نبحث بعد ذلك عن حد الجهد، وهو واضح من الرسم باعتبار أن أسفل الصورة يمثل فرق الجهد الصفري وبالتالي:



$$U = mgh = mgl(1 - \cos\phi).$$

نفس الشئ مع حد الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2$.

- نقوم أخيرا بتطبيق معادلة لاجرانج: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$,

ونحصل على النتيجة:

$$-mg\ell\sin\varphi = m\ell^2\ddot{\varphi}. \qquad (\equiv I\alpha)$$

7.2- مثال على نظام مقيد

- توضيح أكثر للمثال:
- أولا: لماذا اخترنا حد الطاقة الحركية بالصورة $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2.$
- ج: لأن السرعة $v = r\omega = r\dot{\varphi}$
- ثانيا: التفاضل في الحد الأيسر بالنسبة للأحداثي ϕ

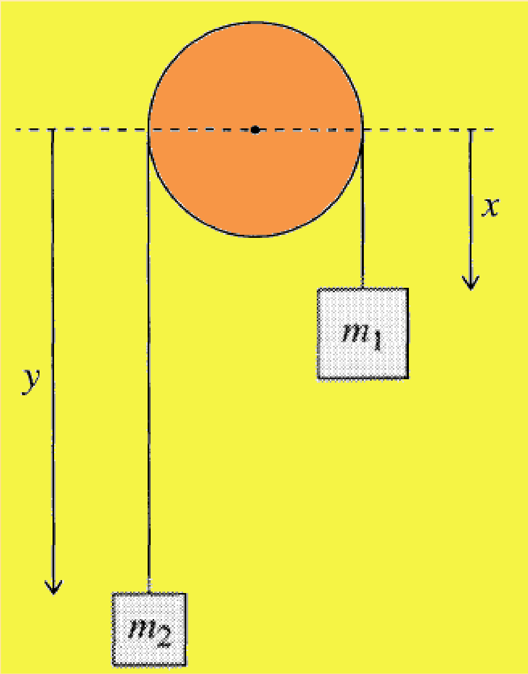
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}U = \frac{\partial}{\partial \varphi}(mgh) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[mgl(1 - cos\phi)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[mgl - mglcos\phi\right] = 0 + mgl\sin\phi$$

- لاحظ وجود أشارة (-) قبل U في الدالة $\mathcal{L} = T - U$
- ثالثا: التفاضل في الحد الأيمن:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(\tfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2)$$
$$= \frac{d}{dt}\left[m\ell^2\dot{\varphi}\right] = m\ell^2\ddot{\varphi}$$

مثال 7.4 آلة أتوودز

- Consider the Atwood machine first met in Figure 4.15 and shown again in Figure , in which the two masses m_1 and m_2 are suspended by an inextensible string (length *l*) which passes over a massless pulley with frictionless bearings and radius *R*. Write down the Lagrangian , $\mathcal{L}$, using the distance *x* as generalized coordinate, find the Lagrange equation of motion, and solve it for the acceleration $\ddot{x}$ Compare your results with the Newtonian solution.



مثال 7.4 آلة أتوودز

نلاحظ أن طول الحبل لا يتأثر بالنظر إليه كما يلي.

$$x + y + \pi R = l \quad ------ (1)$$

$$\rightarrow y = l - \pi R - x$$

$$= -x + (l - \pi R)$$

$$= -x + \text{const.} \quad ---- (2)$$

نصف المحيط $= \pi R$

$\therefore$ use x as generalized coordinate

note (2) $\rightarrow$ $\dot{y} = \dot{x}$

$\therefore L = T - U$

for $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 \quad --- (3)$$

for U: taking $U=0$ at center of pully

$\rightarrow$ $U = -m_1 g x - m_2 g y = -(m_1 - m_2) g x + C$

مثال 7.4 آلة أتوودز

$\Rightarrow L = T - U$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x \quad \text{---} (4)$$

$\therefore$ Lagrange equation of motion is:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \text{------} (5)$$

L.H.S: $\frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 - m_2) g$ ------------ (6)

R.H.S: $\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\ddot{x}$ (7)

(6) and (7) $\rightarrow$ $(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2)\ddot{x}$ ----- (8)

مثال 7.4 آلة أتوودز

$$\therefore \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{------} \quad (9)$$

بالمقارنة مع طريقة نيوتن :

حيث يجب تتبع m_1 , m_2 ← وجود معادلتين

$$m_1: \quad m_1 g - F_t = m_1 \ddot{x} \quad \text{..(a)}$$

$$m_2: \quad F_t - m_2 g = m_2 \ddot{x} \quad \text{..(b)}$$

$F_t \equiv T$ الشد في الحبل ،

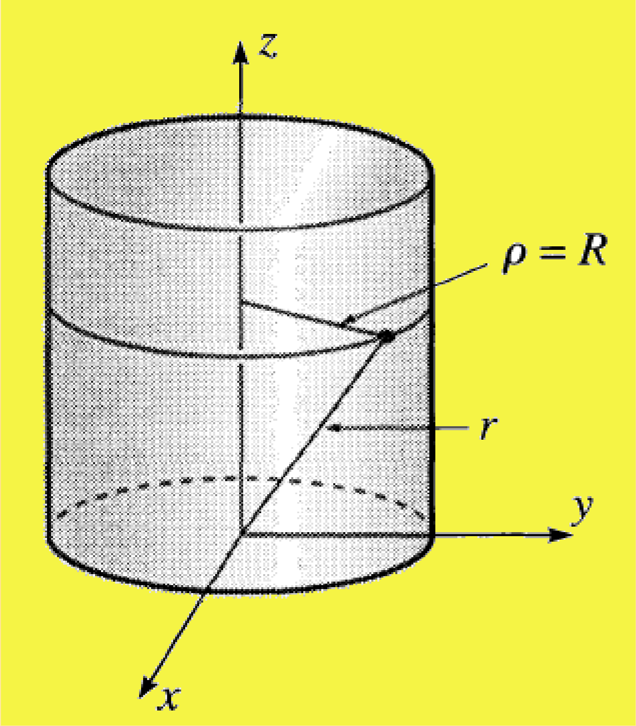
تمثل F_t القيد في المسألة

بينما هنا في الحل بطريقة لاجرانج لم نلجأ لهذا القيد. كما أنه تم اعتماد معادلة واحدة فقط بدلاً من معادلتين.

لاحظ أن بجمع المعادلتين (a) + (b) ← (9)

مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

- Consider a particle of mass m constrained to move on a frictionless cylinder of radius R, given by the equation $\rho = R$ in cylindrical polar coordinates (ρ, ϕ, z). Besides the force of constraint (the normal force on the cylinder), the only force on the mass is a force $F = -k\mathbf{r}$ directed toward the origin. Using z and ϕ as generalized coordinates, find the Lagrangian $\mathcal{L}$. Write down and solve Lagrange's equations and describe the motion.
-



مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

$\because$ الجسم يتحرك على السطح $\leftarrow$ $\rho = R$

$\therefore$ نستطيع إغفال هذا الإحداثي

$\therefore$ only 2 coordi. (z, ϕ)

We have:

$$v_\rho = 0 \qquad v_z = \dot{z} \qquad v_\phi = R\dot{\phi}$$

$\therefore$ for T: $\quad T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$ ------ (1)

for U: $\quad \because \bar{F} = -k \bar{r}$

$\rightarrow \quad U = \frac{1}{2} k r^2$ (by integration $\int$).

$\therefore r^2 = R^2 + z^2$ (من نظرية فيثاغورس)

$\therefore \quad U = \frac{1}{2} k (R^2 + z^2)$ -------- (2)

مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

$$\therefore\ L = T - U = \tfrac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \tfrac{1}{2}k(R^2 + z^2) \quad \text{---} \quad (3)$$

we have 2 eq. 1 for z + 1 for ϕ

$$z:\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) \rightarrow -kz = m\ddot{z} \quad \text{------} \quad (4)$$

$$\phi:\ \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) \rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\phi}) \quad \text{----} \quad (5)$$

بالنسبة للمعادلة (4) ← متذبذب توافقي في اتجاه z

" " (5) ← الاندفاع الزاوي Ang. momentum

محفوظ (ثابت زمنياً) حول المحور z.

∵ m و R ثوابت ← السرعة الزاوية $\dot{\phi}$ ثابتة $\dot{\phi} = const$

∴ الجسم يدور بسرعة زاوية ثابتة ويتذبذب ↑↓ توافقياً.

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

- A bead of mass *m* is threaded on a frictionless circular wire hoop of radius *R*. The hoop lies in a vertical plane, which is forced to rotate about the hoop's vertical diameter with constant angular velocity $\dot{\phi} = \omega$, as shown in Figure . The bead's position on the hoop is specified by the angle *e* measured up from the vertical. Write down the Lagrangian for the system in terms of the generalized coordinate θ and find the equation of motion for the bead

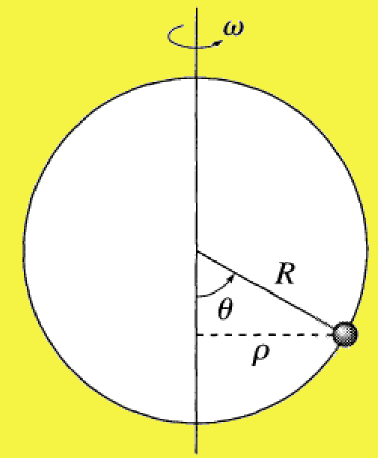


Figure 7.9 A bead is free to move around the frictionless wire hoop, which is spinning at a fixed rate ω about its vertical axis. The bead's position is specified by the angle θ; its distance from the axis of rotation is $\rho = R \sin\theta$.

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

$\because L = T - U$

T: $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta)$ --- (1)

U: let $U = 0$ at the bottom

$\rightarrow U = mgR(1 - \cos\theta)$ --- (2)

$\therefore L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mgR(1 - \cos\theta)$ --- (3)

$\therefore$ only 1 degree of freedom, only one coordinate θ

Now: $\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) \rightarrow$ L.H.S: $mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$

R.H.S: $mR^2\ddot{\theta}$

$\rightarrow mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta = mR^2\ddot{\theta}$ ------ (4)

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

solving for $\ddot{\theta}$: تابع زاوية

$$④ \rightarrow \ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right)\sin\theta \quad ----⑤$$

Two possibilities: ① $\omega = 0$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta$$ بندول بسيط

② : $\ddot{\theta} = 0$ (equilibrium اتزان)

$$\rightarrow \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right)\cancel{\sin\theta} = 0$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

θ_0 زاوية الاتزان