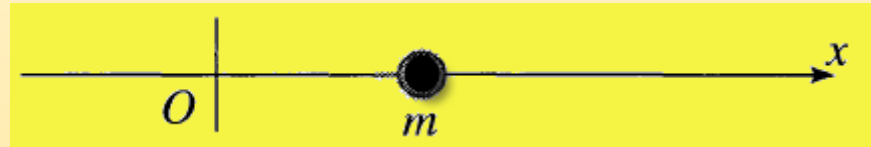


مثال 13.1 خريزة على سلك مستقيم

- Consider a bead sliding on a frictionless rigid straight wire lying along the x axis, as shown in Figure. The bead has mass m and is subject to a conservative force, with corresponding potential energy $U(x)$. Write down the Lagrangian and Lagrange's equation of motion. Find the Hamiltonian and Hamilton's equations, and compare the two approaches.



let x is our generalized coordinate

$$\therefore L(x, \dot{x}) = T - U$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \quad \text{--- (1)}$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Rightarrow -\frac{dU}{dx} = m \ddot{x} \quad \text{--- (2)}$$

$$\therefore \text{(2)} \rightarrow \boxed{F = ma} \quad \text{(القوة)} \quad F = -\frac{dU}{dx} \quad \therefore$$

وهذه نفس ما نوصف به نيوتن (بتايك [معادلة الحركة]) Eq. of Motion

مثال 13.1 خريزة على سلك مستقيم

للحل بطريقة هاميلتونية يلزمنا أولاً اللجوء إلى
الارتفاع المعمم *generalized momentum*

$$\therefore p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{m \dot{x}} \rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\begin{aligned} \therefore H = p\dot{x} - U &= \frac{p^2}{m} - \left[\frac{p^2}{2m} - U(x) \right] \\ &= \frac{p^2}{2m} + U(x) \end{aligned} \quad \text{--- (3)}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \\ &= \frac{m^2 \omega^2}{2m} \\ &= \frac{p^2}{2m} \end{aligned}$$

$$\text{(3)} \rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{(4) and} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dU}{dx} \quad \text{(5)}$$

$$\text{(4)} \rightarrow p = m\dot{x} \checkmark \quad \text{(5)} \rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = \bar{F} \quad \#$$

مثال 13.2 آلة أتوودز

- Set up the *Hamiltonian formalism* for the Atwood machine, as shown in the Figure.

step # 1: what is H ?

سبب في الالباب في دراسته (مثال)

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 \quad \text{--- (1)}$$

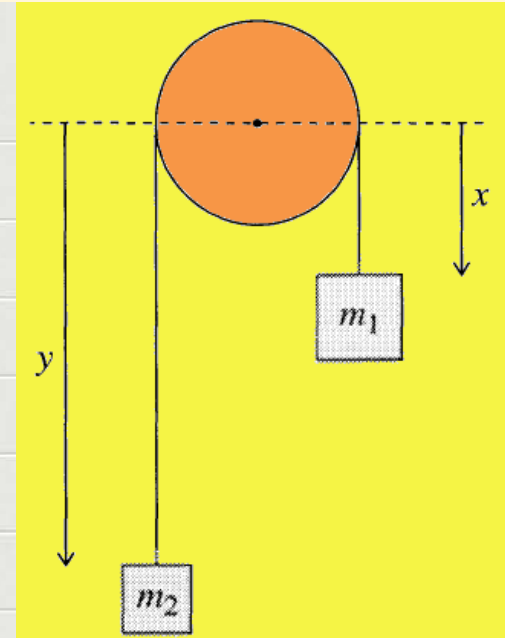
$$U = -(m_1 - m_2) g x \quad \text{--- (2)}$$

$$\rightarrow H = T + U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 - (m_1 - m_2) g x \quad \text{(3)}$$

step # 2: use p for x :

$$\therefore H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2) g x \quad \text{--- (4)}$$

step # 3: find $\frac{\partial H}{\partial p}$ and $-\frac{\partial H}{\partial x}$



مثال 13.2 آلة أتودز

$$\therefore \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2} \quad \text{--- (5)}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m_1 - m_2)g \quad \text{--- (6)}$$

step # 4 : use p in (5) for \dot{p} in (6) :

$$\text{(5)} \rightarrow \dot{p} = (m_1 + m_2) \ddot{x} \quad \text{--- (7)}$$

$$\therefore \text{(6)} \rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x} = (m_1 - m_2)g$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{--- (8)}$$

Accelerator of m_1 and m_2

تسارع الجسمين وهو نفس
تسارع كل واحد منهما

مثال 13.3 معادلات هاميلتون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

- Set up Hamilton's equations for a particle of mass m subject to a conservative central force field with potential energy $U(r)$, using as generalized coordinates the usual polar coordinates r and ϕ .
- بالرغم من أن الجسم بالأساس مسموح له أن يتحرك في ثلاثة أبعاد تحت تأثير القوة المركزية $U(r)$ إلا أنه لا يوجد سبب يجعله يتحرك في فضاء ثلاثي حيث أن القوة المركزية المذكورة غاية ما تسبب للجسم أن يدور في مستوى.
- ولذلك فأننا نختار r, ϕ كأحداثيات معممة.

• Step #1: Choose generalized coordinates: r, ϕ

• Step #2: Write down the T:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \quad (1)$$

• Step #3: Find the generalized momenta:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{and} \quad p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \quad (2)$$

- الاندفاع الأول p_r ويسمى مرافق r هو عبارة عن الاندفاع الخطي العادي mv باتجاه r . أما الاندفاع الثاني p_ϕ ويسمى مرافق ϕ فهو عبارة عن الاندفاع الزاوي *angular momentum*.

مثال 13.3 معادلات هاميلتون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

- Step #4: Solve for \dot{r} and $\dot{\phi}$:

$$(2) \rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{and} \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \quad (3)$$

- Step #5: Write down H as function of r, ϕ, p_r, p_ϕ

$$\mathcal{H} = T + U = \left[\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \right] + U(r) \quad (4)$$

- Step #6: write down the 4 Hamilton equations:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (5)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr} \quad (6)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \quad (7)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0 \quad (8)$$

مثال 13.3 معادلات هاميلتون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

• Step #7: Explain the results:

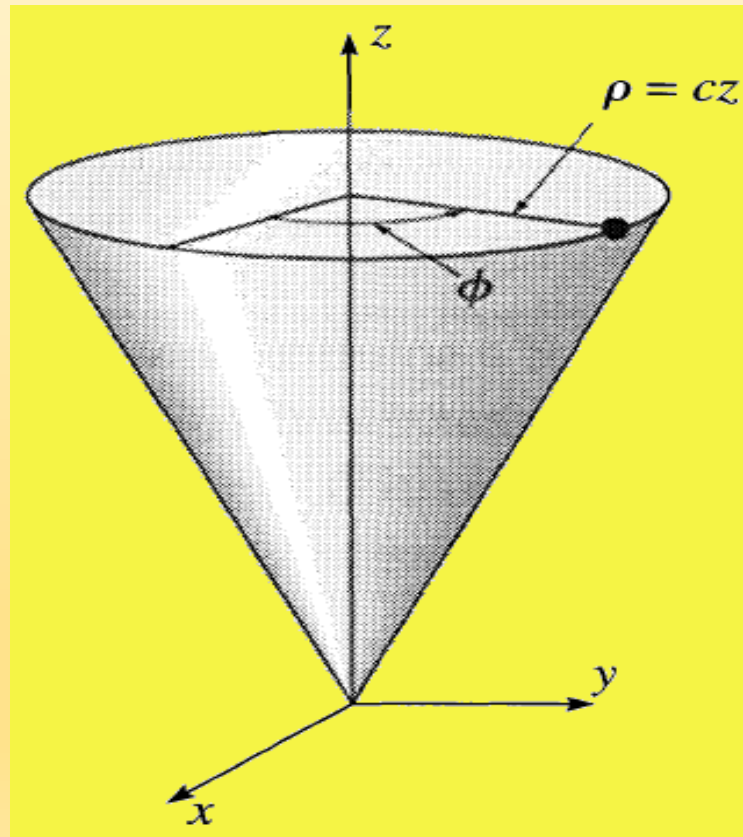
- نتيجة معادلة (5) هي الاندفاع الخطي العادي وهو نفس ما ذكر سابقا.
- نتيجة المعادلة (6): نقوم باستخدام p_r من معادلة (5) بعد تفاضله وتعويضه في (6):

$$\rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr} \quad (9)$$

- وهو يتكون من حدين: الأول يمثل القوة الطاردة المركزية والثاني يمثل القوة المركزية الأصلية.
- نتيجة معادلة (7) هي عبارة عن الاندفاع الزاوي بشكل مباشر بعد ترتيب الحدود
 - نتيجة معادلة (8) بكل بساطة تكرر نفس فرضيتنا ومعلوماتنا الأصلية وهي أن الاندفاع الزاوي محفوظ (تفاضله = 0 بالنسبة للزمن).

مثال 13.4 معادلات هاميلتون لجسم يتحرك على سطح قمع

- Consider a mass m which is constrained to move on the frictionless surface of a vertical cone $\rho = cz$ in a uniform gravitational field g vertically down. Set up Hamilton's equations using z and ϕ as generalized coordinates.



مثال 13.4 معادلات هاميلتون لجسم يتحرك على سطح قمع

الخطوة # 1: اختيار الإحداثيات المعممة: ϕ, z
 الخطوة # 2: كتابة T :

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2] \quad \text{----- (1)}$$

الحركة الدورانية \uparrow
 الحركة الرأسية \uparrow
 الحركة الأفقية \uparrow

$$\therefore \rho = cz$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m [c^2 \dot{z}^2 + \dot{z}^2 + c^2 z^2 \dot{\phi}^2]$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m [(c^2 + 1) \dot{z}^2 + (cz \dot{\phi})^2] \quad \text{----- (2)}$$

مثال 13.4 معادلات هاميلتون لجسم يتحرك على سطح قمع

الخطوة # 3: البحث عن الاندفاعات المسممة:

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m(c^2 + 1) \dot{z} \quad \text{في} \quad p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mc^2 z^2 \dot{\phi} \quad \text{--- (3)}$$

الخطوة رقم # 4: نفوم بالحد لإيجاد \dot{z} و $\dot{\phi}$ بدلالة الاندفاعات

$$\rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m(c^2 + 1)} \quad \text{and} \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mc^2 z^2} \quad \text{--- (4)}$$

الخطوة # 5: بتكسب الطاقة جنباً إلى جنباً ..

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + U = \frac{1}{2m} \left[\frac{p_z^2}{(c^2 + 1)} + \frac{p_\phi^2}{c^2 z^2} \right] + U \quad \text{--- (5)}$$

مثال 13.4 معادلات هاميلتون لجسم يتحرك على سطح قمع

Saving screenshot...



الخطوة رقم 6: نكتب 4 مدارات هاميلتون (معادلات لكل إحداثي)

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m(c^2+1)} \quad \text{--- (6)}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{p_\phi^2}{mc^2 z^3} - mg \quad \text{--- (7)}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mc^2 z^2} \quad \text{--- (8)}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad \text{--- (9)}$$

→ p_ϕ is conserved

الزخم الزاوي محفوظ.

