(اختبار نهائي ٦)

السؤال الأول

إذا كانت
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ادرس: (ا) اتصال الدالة عند $(0,0)$ (ب) قابلية تفاضل الدالة عند $(0,0)$.

الحل:

(أ) اتصال الدالة عند $(0,0)$. نستخدم نظرية الحصر

$$0\leq\left|\frac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^2x}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}+\frac{y^2|x|}{x^2+y^2}\leq|x|+|y|$$

بالتالي فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2}=0$. إذن الدالة متصلة عند $(0,0)$.

(ب) قابلية تفاضل الدالة عند $(0,0)$. نحسب أولا $f_x(0,0), f_y(0,0)$.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

نحسب Δw بالطريقتين

$$\Delta w=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{(\Delta x)^2\Delta y+(\Delta y)^2\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$
$$=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y+\varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

إذن

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(\Delta x)^2\Delta y+(\Delta y)^2\Delta x}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

باستخدام المسارات نجد أن النهاية غير موجودة. إذن الدالة غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$. ¤

السؤال الثاني

إذا كانت $w=f(x-y,y-z,z-x)$ دالة مشتقاتها الجزئية الثانية متصلة. اثبت أن $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$.

الحل: نضع $r = x - y\,,\ s = y - z\,,\ t = z - x$. تصبح الدالة $w = f(r,s,t)$. نستخدم قاعدة السلسلة نحصل على

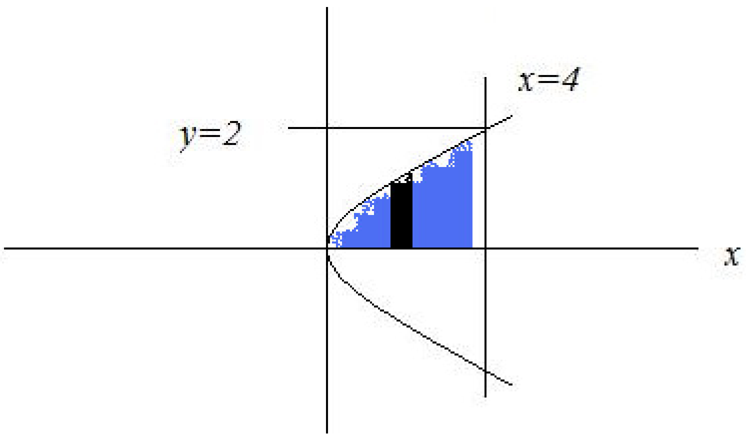
$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial t} \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}$$ ¤

بالجمع نحصل على النتيجة.

السؤال الثالث

(أ) احسب التكاملين التاليين:

(١) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 ye^{-x^2}\,dxdy$. هذا التكامل لا يمكن إيجاده بالترتيب المعطى. لذلك نستخدم طريقة عكس ترتيب التكامل



الشكل يوضح المنطقة المستوية. نأخذ شريحة رأسية نحصل على

¤ $$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} ye^{-x^2}\,dydx = \int_0^4 e^{-x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{4}(e^{-16} - 1)$$

(٢) $I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4-x^2-y^2}\ dzdydx$

نحول التكامل من الإحداثيات الكارتيزية إلى الأسطوانية

$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} z\sqrt{4-r^2}\, rdzdrd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\sqrt{4-r^2}\,[z^2]_0^{\sqrt{4-r^2}}\, rdrd\theta$$ ¤

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2} r(4-r^2)^{3/2}drd\theta=-4\pi$$

(ب) أوجد حجم المجسم المحدود بسطحي الكرتين $x^2+y^2+z^2=2z$ و $x^2+y^2+z^2=6z$ ومن الجوانب بالسطح $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$.

نستخدم التكامل بالإحداثيات الكروية نحصل على الحجم

¤ $$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

السؤال الرابع

اختبر المتتابعات التالية: (ا) $\left\{1+\frac{(-1)^n\sin 2n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (٢) $\left\{\frac{e^n}{\pi^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

الحل:(أ) $\frac{1}{n!}\ge\left|\frac{(-1)^n\sin 2n}{n!}\right|\ge 0$، بالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}1+\frac{(-1)^n\sin 2n}{n!}=1$. إذن المتتابعة متقاربة.

(ب) المتتابعة فيها $|r|=\frac{\pi}{e}>1$. إذن متباعدة.

السؤال الخامس:

اختبر المتسلسلات التالية وبين نوع المتقاربة منها:

ا) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n(n+1)}$ جـ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

الحل: (أ) نختبر المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ باستخدام اختبار التكامل نجد أنها متباعدة. نختبر المتسلسلة المترددة. نجد أنها متقاربة وبالتالي المتسلسلة متقاربة شرطيا.

(ب) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$ متباعدة وذلك باستخدام اختبار نهاية المقارنة

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}\times n=1$ وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة فإن المتسلسلة متباعدة. نختبر المتسلسلة كمتسلسلة مترددة. نجد أنها متقاربة. إذن المتسلسلة قيد الدراسة متقاربة شرطيا.

(ج) بما أن

$$|a_n|=\left|\sin\sqrt{n}\Big/\sqrt{n^3+1}\right|\le 1\Big/\sqrt{n^3+1}<1\Big/\sqrt{n^3}=1/n^{3/2}$$

من اختبار المقارنة فإن المتسلسلة متقاربة مطلقا (لأن $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ متسلسلة p وهي متقاربة). ¤

السؤال السادس

(١) أوجد فترة ونصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n^2}}{n}$

نستخدم اختبار النسبة المعمم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)^2}}{n+1}\times\frac{n}{x^{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|x^{2n+1}\right|$$

و $\lim_{n\to\infty}|x|^{2n+1}=0$ إذا كان $|x|<1$ و $\lim_{n\to\infty}|x|^{2n+1}=\infty$ إذا كان $|x|>1$.

(١) عندما $x=1$ نعوض بالمتسلسلة نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ وهي متقاربة شرطيا.

(٢) عندما $x=-1$. نعوض بالمتسلسلة لنحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة.

إذن فترة تقارب المتسلسلة هي $(-1,1]$ ونصف قطر تقاربها 1. ¤

(٢) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=\sinh x^2$.

حيث أن

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$ ، فإن

$$\sinh x^2=x^2+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}+\frac{x^{14}}{7!}+\cdots+\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\cdots$$ ¤