جامعـــــة الملك سعــــود   كليـــة العلــــوم   قســـــم الريـــاضيـــــــات

الفصل الصيفي 1435-1436 هـــ/487 ريض/ الاختبار النهائي / الزمن: 3ساعات

الجزء الأوّل (15 درجة) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) لتكن $u(x,y)=e^x\cos y$. بيّن أن الدالة u توافقية على $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد مرافقة توافقية v لها.

2) لتكن $Log\ z$ القيمة الأساسية للدالة اللوغارتمية $\log z$ ولتكن : $z_1=2i$ و $z_2=e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ فاحسب ما يلي :

$Log\ z_1$ ، $Log\ z_2$ و $Log\dfrac{z_1}{z_2}$.

3) لتكن f دالة كلية و لنفترض أن لكل $z\in\mathbb{C}$, $\Re e\left(f(z)\right)\le M$ حيث $M>0$ (ثابت). برهن أن f هي دالة ثابتة على $\mathbb{C}$ (*استخدم الدالة* e^f).

4) لتكن f دالة تحليلية عند $z=0$ بحيث لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2n+1}$. أوجد صيغة الدالة f بدلالة z.

الجزء الثاني (12 درجة)

1) باستخدام اختبار النسبة، أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلات القوى التالية :

(أ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2}$ (ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n^3}(z+2)^n$.

2) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z}{z^2+z-2}$ على الطوق:

(أ) $0<|z-1|<3$ (ب) $1<|z|<2$.

الجزء الثالث (13 درجة)

1) على ماذا تنصّ نظرية الرواسب ؟

2) استخدم طريقة الرواسب (معللاً كل خطوات الحل) لإثبات أن :

(أ) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (ب) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (ج) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(3x)}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{\pi}{e^3}$.

و الله ولي التوفيـــــق

اصلاح الاختبار النهائي ٤٨٧ ريض
للفصل الصيفي ١٤٣٦/٣٥ هـ

الجزء الأول (15 درجة)

① $u(x,y) = e^x \cos y$ دالة ناعمة على $\mathbb{R}^2$.

1 $u_x(x,y) = e^x \cos y$ ، $u_y(x,y) = -e^x \sin y$ $\Rightarrow$ $u_{xx}(x,y) = e^x \cos y$ ، $u_{yy}(x,y) = -e^x \cos y$

فنستنتج أن لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، $u_{xx} + u_{yy} = 0$

يعني الدالة u هي توافقية على $\mathbb{R}^2$.

لتكن $f = u+iv$ تحليلية على $\mathbb{C}$ حيث v المرافق التوافقي لـ u.

1 معادلتي كوشي ريمان
$$\begin{cases} u_x = v_y = e^x \cos y & (1) \\ u_y = -v_x = -e^x \sin y & (2) \end{cases}$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ y، نجد أن

$$v(x,y) = \int e^x \cos y \, dy = e^x \sin y + \varphi(x)$$

بالاشتقاق ثانيا بالنسبة لـ x ، $v_x(x,y) = e^x \sin y + \varphi'(x)$

بالمقارنة مع (2) نجد أن $\varphi'(x) = 0$ إذن $\varphi = cst$

2 فنستنتج أن $v(x,y) = e^x \sin y + cst$

يعني $f(x+iy) = e^x \cos y + i e^x \sin y + cst$

$$f(z) = e^z + cst$$

② لكل $z\in\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ، $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$

حيث $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$

1 • $\operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log}(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$.

1 • $\operatorname{Log} z_2 = \operatorname{Log}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = -\frac{3\pi}{4} i$.

(1) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\cdot \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log}\left(2e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) = \ln 2 + i\operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$$

(1) $$\boxed{\operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln 2 - i\frac{3\pi}{4}}$$

(3) بما أن f تحليلية على $\mathbb{C}$ فان e^f هي أيضا دالة كلية.

(1) $$|e^f| = e^{\operatorname{Re} f}$$

وبما أن $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ لكل $z \in \mathbb{C}$ فان $|e^{f(z)}| \leq e^M = cst$

لكل $z \in \mathbb{C}$. باستخدام نظرية ليوفيل : e^f هي دالة ثابتة

على $\mathbb{C}$. هذا يؤدي إلى أن f هي دالة ثابتة على $\mathbb{C}$. (2)

(4) نأخذ الدالة : $F(z) = f(z) - \frac{z}{2+z}$ هي تحليلية

(2) عند $z=0$ (بما أن f تحليلية عند الصفر).

$\{1/n\}$ هي متتالية متقاربة للصفر إذن يوجد عدد صحيح N بحيث لكل

$n \geq N$ لدينا $\frac{1}{n}$ يقع في جوار الصفر وبما أن $F(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}) - \frac{1/n}{2+1/n}$

$$F(1/n) = f(1/n) - \frac{1}{2n+1} = 0$$

باستخدام نظرية الامتداد التحليلي، نستنتج أن $F(z) \equiv 0$ لكل z في جوار الصفر

(2) إذن $f(z) = \frac{z}{2+z}$ لكل z في جوار الصفر.

الجزء الثاني (12 درجة)

(1) (أ) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2}$$ حيث $a_n(z) = \frac{(z-i)^n}{n^2}$

اختبار النسبة المتسلسلة ...

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(z-i)^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{(z-i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |z-i|$$

(1) $$\rho = |z-i|$$

* إذا كان $|z-i|<1$ (يعني z تقع داخل القرص مركزه i ونصف قطره 1)

فان $\sum_n \frac{(z-i)^n}{n^2}$ متقاربة تقاربا مطلقا. (1)

* أما إذا كان $|z-i|>1$ (يعني z تقع خارج القرص مركزه i ونصف قطره 1)

فان $\sum \frac{(z-i)^n}{n^2}$ متباعدة. (1)

نصف قطر التقارب $R=\frac{1}{\rho}=1$.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n^3}(z+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ حيث $a_n(z)=\frac{(1-i)^n}{n^3}(z+2)^n$

نستخدم اختبار النسبة للمتسلسلات،

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(1-i)^{n+1}}{(n+1)^3}(z+2)^{n+1}\frac{n^3}{(1-i)^n(z+2)^n}\right|$$

(1) $$= \lim_{n\to\infty} |1-i| \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 |z+2| = \sqrt{2}\,|z+2|$$

* إذا كان $\rho<1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\,|z+2|<1 \Leftrightarrow |z+2|<1/\sqrt{2}$ (يعني z تقع داخل القرص مركزه (-2) ونصف قطره $\frac{\sqrt{2}}{2}$

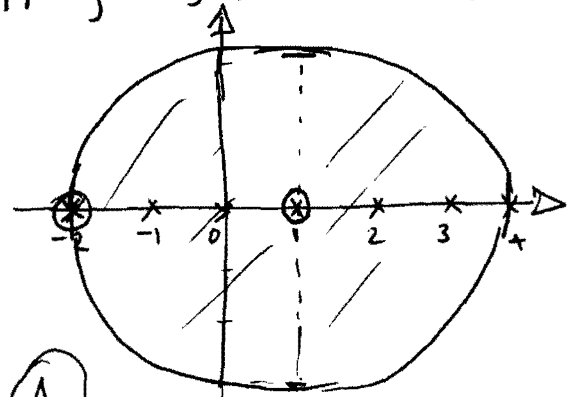
فان المتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا. (1)

* أما إذا كان z يقع خارج القرص المركز(-2) ونصف قطره $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن المتسلسلة

متباعدة. (1)

← نصف قطر التقارب هو: $R=\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{-2,1\}$ $\quad f(z) = \dfrac{z}{z^2+z-2} = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$ (2)



أ) على الطوق $0<|z-1|<3$

f هي دالة تحليلية. إذن

f تحظى بمفكوك لورانت.

(1)

لكل $0<|z-1|<3$ $\quad f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-1)^n$

بما أن: $|z-1|<3$ فإن $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ $\quad$. $f(z) = \dfrac{z-1+1}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1}{z+2} + \dfrac{1}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1}{z+2}\left(1+\dfrac{1}{z-1}\right)$

(1) $\quad$ • $\dfrac{1}{z+2} = \dfrac{1}{z-1+3} = \dfrac{1}{3\left[1+\frac{z-1}{3}\right]} = \dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{(z-1)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$

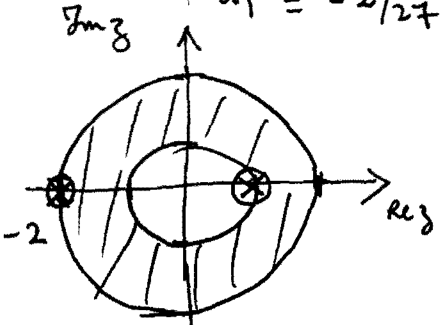
فنستنتج أن لكل $0<|z-1|<3$ ، $f(z) = \left(1+\dfrac{1}{z-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n\right)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(z-1) + \frac{1}{27}(z-1)^2 - \dots\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3(z-1)} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27}(z-1) - \dots\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{3(z-1)} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27}(z-1) + \dots\dots$$

(1)

حيث
$$\begin{cases} a_n = 0 \ ; \quad n<-1 \\ a_{-1} = 1/3 \\ a_0 = 2/9 \\ a_1 = -2/27 \ , \ \dots , \quad a_n = (-1)^n \dfrac{2}{3^{n+2}} \quad \text{لكل } n\geq 0 \end{cases}$$



ب) على الطوق $1<|z|<2$ (مفتوح)

بما أن f تحليلية على الطوق فإن

f تحظى بمفكوك لورانت. لأن

(1)

لكل $1<|z|<2$ ، $f(z) = \dfrac{z}{z^2+z-2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$

$$f(z)=\frac{z}{z^2+z-2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z+2}\right]$$

$$A=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z}{z+2}=\frac{1}{3}$$

$$B=\lim_{z\to(-2)}(z+2)f(z)=\lim_{z\to(-2)}\frac{z}{z-1}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

* بما أن $|z|>1$ فإن $\left|\frac{1}{z}\right|<1$.

1 • $$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z(1-1/z)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(1/z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

* بما أن $|z|<2$ فإن $|z/2|<1$

• $$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left[1+\frac{z}{2}\right]}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$$

1

عندئذ ، لكل $1<|z|<2$;

$$f(z)=\frac{z}{z^2+z-2}=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n\right]$$

ومنه

$$a_n=\begin{cases}1/3 & ; \ n\leq -1\\ \frac{(-1)^n}{3\times 2^n} & ; \ n\geq 0\end{cases}$$

<u>الجزء الثالث</u> (13 درجة)

1 نظرية الرواسب لكوشي :

- إذا كان Γ مسار بسيط مغلق وموجه موجبا و كانت f تحليلية داخل وعلى Γ ما عدا عند النقاط $z_1, \dots, z_m$ (تقع داخل Γ) فإن

2 $$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(f;z_k)$$

(أ) 2 $$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

بما أن $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{}$. نضع $z=e^{i\theta}$ فإن $d\ldots=ie^{i\theta}d\theta$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \Leftarrow dz = iz\,d\theta$$

بما أن $0 \le \theta \le 2\pi$ فإن z تقع على دائرة الوحدة $|z| = 1$.

$$\cos\theta = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

إذن $I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2+\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \frac{dz}{iz} = -i \oint_{\gamma} \frac{2\,dz}{z^2+4z+1}$

(1)

$$I = -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1} = -2i \cdot 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

حيث $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$

(1)

$z^2+4z+1=0$ (معادلة من درجة 2)

$a=1$; $b=4$, $c=1$

(المميز) $\Delta = b^2-4ac = 12 = (2\sqrt{3})^2$

$$z_1 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3} \; ; \; |z_1|>1$$

لأن $|z_1 z_2| = 1$

$$z_2 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}-2 \; ; \; |z_2|<1$$

لـ f لديها قطبان بسيطان عند z_1 و z_2 ، لكن z_1 يقع خارج دائرة الوحدة

(1)

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2) f(z_2) = \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

فنستنتج أن $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = 4\pi \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

(ب) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

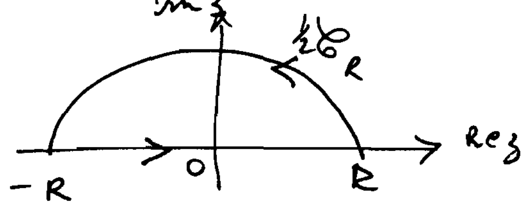
حيث $P(x) \equiv 1$, $Q(x) = x^4+1 > 0$

$\deg Q \ge \deg P + 2$ و Q ليس له جذور حقيقية، إذاً

(1)

J متقارب.

ناخذ الآن الدالة $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ و المسار $\Gamma_R=[-R,R]\cup \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_R$ (حيث $R\gg 1$)



باستخدام نظرية الرواسب

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{Res}(f,z_k)$$

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz=\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_0^{\pi} f(Re^{it})\,iRe^{it}\,dt$$

باستخدام نظرية جوردان ، عندما $R\to\infty$ ، $\left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})\,iRe^{it}\,dt\right|\xrightarrow[R\to\infty]{}0$

عندئذ

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{Res}(f,z_k)$$

• $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}\,/\,z^4=-1\}$

• نضع $z=re^{i\theta}$ فإن $z^4=r^4e^{i4\theta}$ و نعلم أن $-1=e^{i(1+2k)\pi}$

إذن

$$\begin{cases} r=1\\ \theta=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases} r^4=1\\ 4\theta=(1+2k)\pi\\ 0\le k\le 3\end{cases}$$

حيث $0\le k\le 3$

f لديها أقطاب بسيطة عند

$$\left\{ z_0=e^{i\pi/4}\ ;\ z_1=e^{i3\pi/4}\ ;\ z_2=e^{i5\pi/4}\ ;\ z_3=e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\}.$$

(1) $$\operatorname{Res}\left(f;e^{i\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\left(z-e^{i\pi/4}\right)f(z)=\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)}$$

$$\operatorname{Res}\left(f;e^{i3\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{i\frac{3\pi}{4}}}\left(z-e^{i3\pi/4}\right)f(z)=\frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}$$

(1) $$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}\right)$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,i\left[\frac{1}{i-1}+\frac{1}{i+1}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$K=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(3x)}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(1+x^2)^2}dx \quad (\text{ج})$$

(1) $$k_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(1+x^2)^2}dx=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i3x}}{(1+x^2)^2}dx\right)$$
$$=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx\right)$$

حيث $m=3$ ، $P(x)\equiv 1$ ، $Q(x)=(1+x^2)^2$.

بما أن $\deg Q\geq \deg P+1$ و Q ليس له جذور حقيقية فإن التكامل المعتل k_1 متقارب .

نأخذ الآن $f(z)=\dfrac{e^{i3z}}{(1+z^2)^2}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$

(1) ونأخذ $\Gamma_R=[-R,R]\cup \frac{1}{2}\mathcal{C}_{(0,R)}$ حيث $R>>1$

باستخدام نظرية الرواسب $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i3x}}{(1+x^2)^2}dx=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i)$

$$\left(\left|\int_{\frac{1}{2}\mathcal{C}(0,R)}f(z)\,dz\right|\xrightarrow[R\to\infty]{}0 \quad \text{لأن}\right)$$

• i هو قطب من الرتبة الثانية للدالة f .

(2) $$\mathrm{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{e^{3iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]$$
$$=\lim_{z\to i}\frac{3i\,e^{3iz}(z+i)^2-2e^{i3z}(z+i)}{(z+i)^4}$$
$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{3i\,e^{3iz}(z+i)-2e^{3iz}}{[illegible]}\right]=\frac{e^{-3}}{i}=-i/e^3$$