د. برهان

الاختبار الشهري الأول للمقرر 111 ريض للفصل الثاني 1438-1437 هـ	كلية العلوم – قسم الرياضيات	جامعة الملك سعود King Saud University
الزمن: ساعة ونصف. الدرجة:	الإسم: .... الرقم الجامعي:.. أستاذ المقرر:..	

ملاحظات : 1. عدد الورقات 4 2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

السؤال الأول (8 درجات):

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_1^3 (4x-5)\,dx$. (3 درجات)

0,5 $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$$

$$a = 1 \;;\; b=3 \;;\; f(x) = 4x-5$$

0,5 $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = 2/n \quad , \quad 0 \le k \le n$$

$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) = 1 + \frac{2k}{n}$$

0,5 $$f(x_k) = f\left(1+\frac{2k}{n}\right) = 4\left(1+\frac{2k}{n}\right)-5 = \frac{8k}{n}-1$$

1 $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{8}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{8}{\cancel{n}}\,\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} - n = 3n+4.$$

0,5 $$\int_1^3 (4x-5)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}(3n+4) = 6$$

Check $$\int_1^3 (4x-5)\,dx = \left[2x^2-5x\right]_1^3 = (18-15)-(2-5) = 3-(-3) = \underline{6}$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على الفترة $[1,e]$. (3 درجات)

بما أن f متصلة على $[1,e]$ فانه يوجد $c \in (1,e)$ بحيث

1 $$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = (e-1)\,\frac{1}{c}$$

1 $$\left[\ln x\right]_1^e = \frac{e-1}{c} = \ln e - \ln 1 = 1$$

1 وبالتالي $c = (e-1) \in (1,e)$

(3) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\int_{\sin x}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{2+t^3}}$. (درجتان)

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^6}}\,2x - \frac{1}{\sqrt{2+\sin^3 x}}\cos x .$$

1 1

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x)$$

السؤال الثاني (5 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=(\cos x)(\ln x)\ ,\ x>0$ (درجتان)

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin x)\ln x + \frac{\cos x}{x}$$

1 1

(2) $y=\sqrt[4]{\frac{(x-2)^3(x-1)^5}{x^2+5}}\ ,\ x>2$ (3 درجات)

$$y = \left(\frac{(x-2)^3(x-1)^5}{x^2+5}\right)^{1/4}$$

1 $$\ln|y| = \frac{1}{4}\left[\ln[(x-2)^3(x-1)^5] - \ln(x^2+5)\right]$$

0,5 $$\ln|y| = \frac{1}{4}\left[3\ln|x-2| + 5\ln|x-1| - \ln(x^2+5)\right]$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x

1 $$\frac{dy/dx}{y} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{x-2} + \frac{5}{4}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\,\frac{2x}{x^2+5}$$

وبالتالي

0,5 $$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{3}{4(x-2)} + \frac{5}{4(x-1)} - \frac{x}{2(x^2+5)}\right]\sqrt[4]{\frac{(x-2)^3(x-1)^5}{x^2+5}} .$$

السؤال الثالث (12 درجة): احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (درجتان)

$$\int \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int (x^3+1)\,x^{-1/3}\,dx$$

1 $$= \int \left(x^{8/3} + x^{-1/3}\right)dx$$

1 $$= \frac{3}{11}x^{11/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + c$$

(2) $\int \frac{\sqrt{4+\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$ (درجتان)

0,5 $$\int \frac{\sqrt{4+\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{4+\tan x}\,\sec^2 x\,dx$$

نضع $u = \tan x$ فإن $du = \sec^2 x\,dx$

0,5 $$\int \frac{\sqrt{4+\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{4+u}\,du = \int (4+u)^{1/2}\,du$$

1 $$= \frac{2}{3}(4+u)^{3/2} + c = \frac{2}{3}(4+\tan x)^{3/2} + c$$

(3) $\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$ (درجتان)

0,5 $$\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{3^2+(x^3)^2}\,dx$$

نضع $u = x^3$ فإن $du = 3x^2\,dx$

0,5 $$\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{3^2+u^2} = \frac{1}{9}\tan^{-1}(u) + c$$

1 $$= \frac{1}{9}\tan^{-1}(x^3) + c$$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)} dx$ (درجتان)

0,5 نضع $u=\sqrt{x}$ فان $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

1 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)} = 2\int \frac{du}{u+1} = 2\ln|u+1| + c$

0,5 $= 2\ln\left[\sqrt{x}+1\right] + c$

(5) $\int \frac{e^{7\ln x}}{x^4} dx$ (درجتان)

1 $\int \frac{e^{7\ln x}}{x^4} dx = \int \frac{e^{\ln(x^7)}}{x^4} dx = \int \frac{x^7}{x^4} dx$

1 $= \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

(6) $\int 4^x 5^{4^x} dx$ (درجتان)

0,5 نضع $u = 4^x$ فان $du = (\ln 4)\, 4^x dx$

0,5 $\int 4^x 5^{4^x} dx = \frac{1}{\ln 4}\int 5^u du$

0,5 $= \frac{1}{\ln 4} \cdot \frac{1}{\ln 5} 5^u + c$

0,5 $= \frac{1}{(\ln 4)(\ln 5)} 5^{4^x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$