

Area (Riemann Sums)
المساحة (مجموع ريمان)
Math 111
Lecture 1

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

خواص الجمع:

ليكن لدينا مجموعة الأرقام $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. فأن مجموع هذه الأرقام يرمز له بالرمز

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

الرمز Σ سيغما هو الحرف الإغريقي ويشير إلى مجموع متسلسلة ، ويرمز a_k إلى الحد k_{th} في المتسلسلة.

مثال : أوجد قيمة التالي:

$$(1) \sum_{k=1}^2 5.$$

$$(2) \sum_{k=3}^6 6.$$

حقائق:

لأى عددين صحيحين m, n وعدد ثابت c وكان $n > m$ فإن:

- $\sum_{k=1}^n c = nc,$
- $\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c,$
- $\sum_{k=1}^n cx_k = c \sum_{k=1}^n x_k,$
- $\sum_{k=1}^n (x_k \pm y_k) = \sum_{k=1}^n x_k \pm \sum_{k=1}^n y_k.$

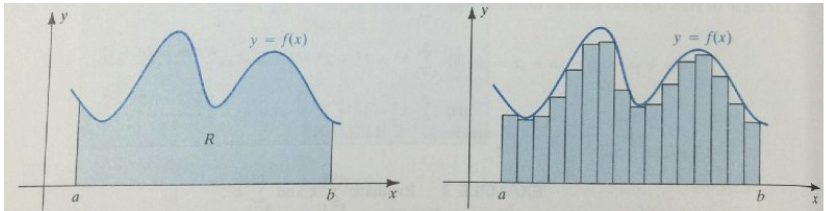
نظرية:

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n + 1),$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1),$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n}{2}(n + 1)\right)^2.$

مثال: أحسب

- $\sum_{k=1}^{100} k =$
- $\sum_{k=1}^{12} k^2 =$
- $\sum_{k=1}^n (k^2 - 4k + 3) =$

مجموع ريمان:



١ - تسمى المجموعة المرتبة $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئياً للفترة $[a, b]$ اذا كان

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

بحيث ان

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

٢ - طول الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ هو

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$$

٣ - مقياس التجزي P يرمز له بالرمز $\|P\|$ وهو

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

٤ - يسمى التجزي P منتظما اذا كان:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$$

وفي هذا الحالة يكون

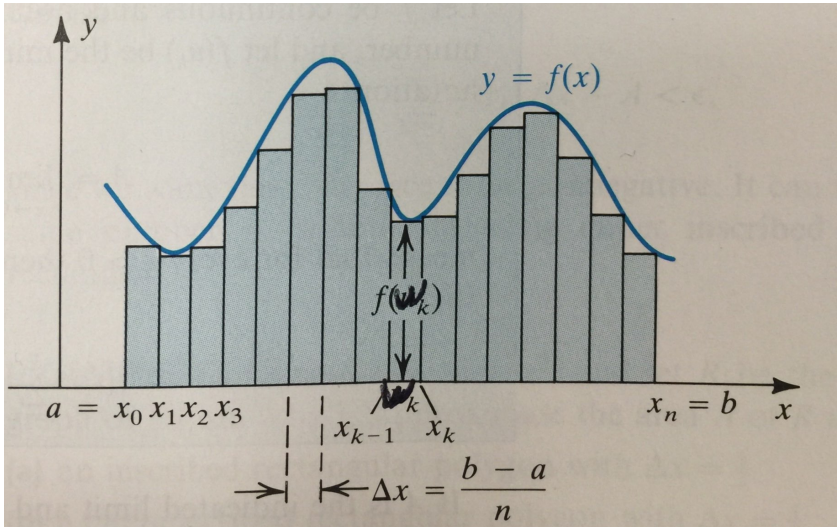
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

ملاحظة: اذا كان $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئيا للفترة $[a, b]$ فإن المتجة

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ يسمى علامة التجزي P اذا كان

$$w_i \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

$$w_i \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1, 2, \dots, n.$$



تعريف تجميعات ريمان:

إذا كان لدينا الدالة f معرفة على الفترة $[a, b]$ وكان لدينا

$w_k \in [x_{k-1}, x_k]$ لدينا وإذا كان $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئياً للفترة $[a, b]$

حيث أن $k = 1, \dots, n$. فإنه يرمز لمجموع ريمان للدالة f علي التجزي P بالرمز

$$R_P = \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x.$$

ليكن لدينا الدالة f ، فان المساحة A المحصورة بين الدالة f ومحور x والخطان المستقيمان $x = a, x = b$ هي

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \quad w_k = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)k$$

Example(1)

أوجد المساحة A تحت منحنى الدالة $f(x) = x + 5$ للفترة $[4, -4]$ باستخدام مجموع ريمان.

Example(2)

· $\int_0^3 (2x - 1) dx$ استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد

Exercise

أستخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x - 3) dx$.

Thanks for listening.