# Area (Riemann Sums)
# المساحة (مجموع ريمان)
# Math 111
# Lecture 1

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

خواص الجمع:

ليكن لدينا **مجموعة** الأرقام $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ . فأن **مجموع** هذه الأرقام يرمز له بالرمز

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

الرمز $\sum$ سيغما هو الحرف الإغريقي ويشير إلى **مجموع** متسلسة ، ويرمز $a_k$ إلى الحد $k_{th}$ في المتسلسة.

خواص الجمع:

ليكن لدينا **مجموعة** الأرقام $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ . فأن **مجموع** هذه الأرقام يرمز له بالرمز

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

الرمز $\sum$ سيغما هو الحرف الإغريقي ويشير إلى **مجموع** متسلسة ، ويرمز $a_k$ إلى الحد $k_{th}$ في المتسلسة.

مثال : أوجد قيمة التالي:

$$(1) \sum_{k=1}^{2} 5.$$

$$(2) \sum_{k=3}^{6} 6.$$

حقائق:

لأى عددين صحيحين $m, n$ وعدد ثابت $c$ وكان $m < n$ فأن:

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc,$

حقائق:

لأى عددين صحيحين $m, n$ وعدد ثابت $c$ وكان $m < n$ فأن:

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc,$
- $\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c,$

حقائق:

لأى عددين صحيحين $m, n$ وعدد ثابت $c$ وكان $n > m$ فأن:

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc,$
- $\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c,$
- $\sum_{k=1}^{n} cx_k = c\sum_{k=1}^{n} x_k,$

حقائق:

لأى عددين صحيحين $m, n$ وعدد ثابت $c$ وكان $n > m$ فأن:

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc,$
- $\sum_{k=m}^{n} c = (n-m+1)c,$
- $\sum_{k=1}^{n} cx_k = c\sum_{k=1}^{n} x_k,$
- $\sum_{k=1}^{n}(x_k \pm y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \pm \sum_{k=1}^{n} y_k.$

حقائق:

لأى عددين صحيحين $m, n$ وعدد ثابت $c$ وكان $n > m$ فأن:

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc,$
- $\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c,$
- $\sum_{k=1}^{n} cx_k = c\sum_{k=1}^{n} x_k,$
- $\sum_{k=1}^{n}(x_k \pm y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \pm \sum_{k=1}^{n} y_k.$

نظرية:

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n + 1),$

حقائق:

لأى عددين صحيحين $m, n$ وعدد ثابت $c$ وكان $n > m$ فأن:

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc,$
- $\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c,$
- $\sum_{k=1}^{n} cx_k = c\sum_{k=1}^{n} x_k,$
- $\sum_{k=1}^{n}(x_k \pm y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \pm \sum_{k=1}^{n} y_k.$

نظرية:

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1),$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1),$

حقائق:

لأى عددين صحيحين $m, n$ وعدد ثابت $c$ وكان $n > m$ فأن:

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc$,
- $\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c$,
- $\sum_{k=1}^{n} cx_k = c \sum_{k=1}^{n} x_k$,
- $\sum_{k=1}^{n}(x_k \pm y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \pm \sum_{k=1}^{n} y_k$.

نظرية:

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$,
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$,
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2$.

مثال: أحسب

- $\sum_{k=1}^{100} k =$

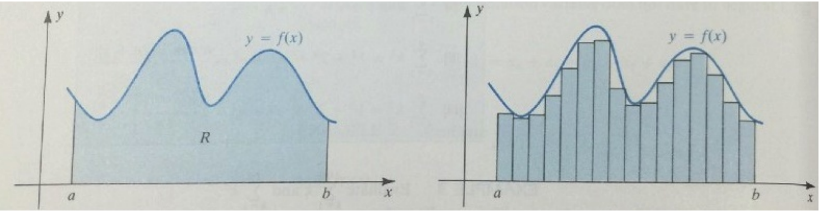
مثال: أحسب

- $\sum_{k=1}^{100} k =$
- $\sum_{k=1}^{12} k^2 =$

مثال: أحسب

- $\sum_{k=1}^{100} k =$
- $\sum_{k=1}^{12} k^2 =$
- $\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 4k + 3) =$

مجموع ريمان:



١ ـ تسمي المجموعة المرتبة $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ تجزيئاً للفترة $[a, b]$ اذا كان

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

بحيث ان

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

١ ـ تسمي المجموعة المرتبة $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ تجزيئاً للفترة $[a, b]$ اذا كان

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

بحيث ان

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

٢ ـ طول الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ هو

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$$

٣ ـ مقياس التجزي $P$ يرمز له بالرمز $||P||$ وهو

$$||P|| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

٣ ـ مقياس التجزي $P$ يرمز له بالرمز $||P||$ وهو

$$||P|| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

٤ ـ يسمي التجزي $P$ منتظما اذا كان:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$$

وفي هذا الحالة يكون

$$\Delta x_1 = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

٣ ـ مقياس التجزي $P$ يرمز له بالرمز $||P||$ وهو

$$||P|| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

٤ ـ يسمي التجزي $P$ منتظما اذا كان:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$$

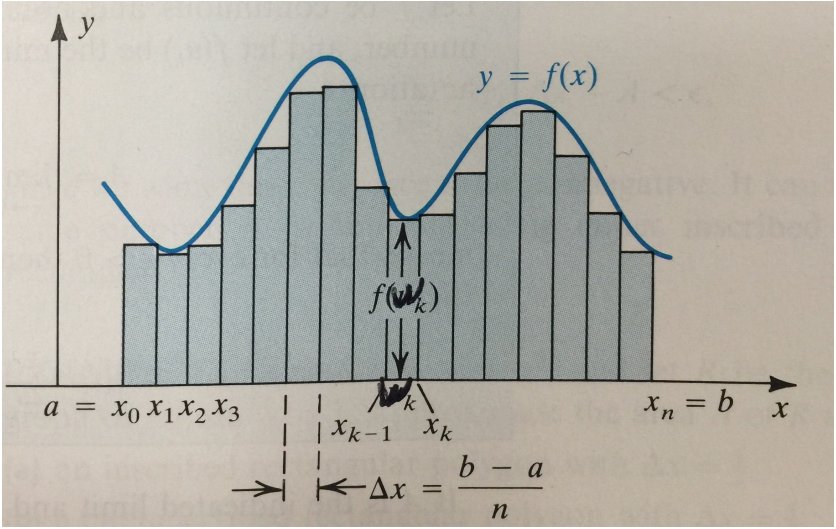
وفي هذا الحالة يكون

$$\Delta x_1 = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

ملاحظة: اذا كان $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ تجزئيا للفترة $[a, b]$ فأن المتجة $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ يسمي علامة التجزي $P$ اذا كان

$$w_i \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$


$$w_i \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$



y
y = f(x)
f(w_k)
a = x_0 x_1 x_2 x_3
x_{k-1}
w_k
x_k
x_n = b
x
Δx = (b − a)/n

تعريف تجميعات ريمان:

إذا كان لدينا الدالة $f$ معرفة على الفترة $[a, b]$ وكان لدينا $P = \{x_0, x_1, \cdots_n\}$ تجزئيا للفترة $[a, b]$ واذا كان لدينا $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$ حيث أن $k = 1, \cdots, n$ . فأنه يرمز لمجموع ريمان للدالة $f$ علي التجزي $P$ بالرمز

$$R_P = \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \Delta x.$$

ليكن لدينا الدالة $f$ ، فان المساحة $A$ المحصورة بين الدالة $f$ ومحور $x$ والخطان المستقيمان $x = a, x = b$ هي

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \quad w_k = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)k$$

Example(1)

أوجد المساحة $A$ تحت منحنى الدالة $f(x) = x + 5$ للفترة $[-4, 4]$ بإستخدام مجموع ريمان.

Example(2)

أستخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^3 (2x-1)dx$ .

Exercise

أستخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)dx$ .

*Thanks for listening.*