(ب) لكل عدد صحيح $1 \leqslant n$ برهن أن n^2+2 لا يقبل القسمة على 4

الحل: من $\boxed{\text{خوارزمية القسمة}}$ يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r بحيث:

$$n = 4q + r \ , \quad 0 \le r < 4$$

لدينا أربع حالات:

$r = 0$: $n = 4q \Rightarrow n^2 = 16q^2 \Rightarrow n^2 + 2 = 16q^2 + 2$

$$= 4(4q^2) + 2$$

$$\Rightarrow 4 \nmid n^2 + 2$$

$r = 1$: $n = 4q + 1 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 8q + 1$

$$\Rightarrow n^2 + 2 = 16q^2 + 8q + 3$$

$$= 4(4q^2 + 2q) + 3$$

$$\Rightarrow 4 \nmid n^2 + 2$$

$r = 2$: $n = 4q + 2 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 16q + 4$

$$n^2 + 2 = 16q^2 + 16q + 6$$

$$= 4(4q^2 + 4q + 1) + 2$$

$$\Rightarrow 4 \nmid n^2 + 2$$

$r = 3$: $n = 4q + 3 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 24q + 9$

$$n^2 + 2 = 16q^2 + 24q + 11$$

$$= 4(4q^2 + 6q + 2) + 3$$

$$\Rightarrow 4 \nmid n^2 + 2$$

وبالتالي $4 \nmid n^2 + 2$ لأي $n \geq 1$.