جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 03

بعض الطرق الرياضية في حساب التغيرات 1

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

6.0- مقدمة

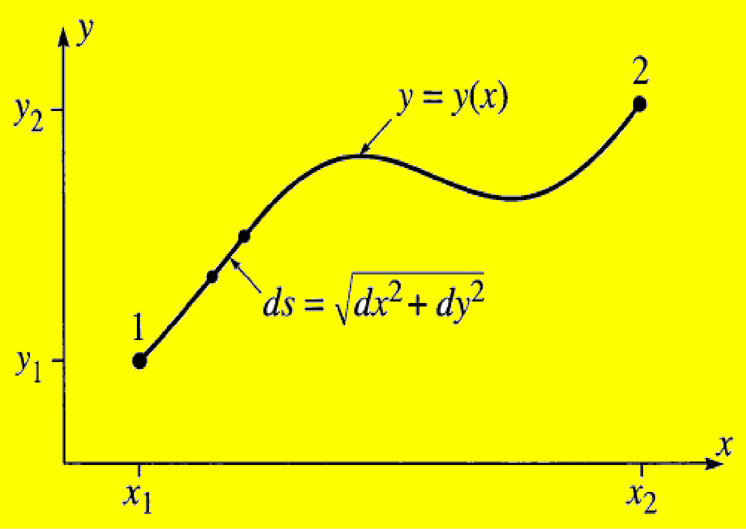
- كما في الباب الأول، هناك مسائل كثيرة يصبح من المناسب فيها استخدام أحداثيات أخرى غير الكارتيزية، فمثلا المسائل التي يكون لديها تناسق كروي يصلح لها الأحداثيات الكروية. ومن جانب آخر قد يحتم وضع المسالة اختيار نظام أحداثي معين، فمثلا في مسألة تصف حركة جسم فوق سطح كرة فمن المناسب هنا استخدام الأحداثيات الكروية وهكذا...
- لقد لاحظنا من الباب السابق ارتفاع درجة الصعوبة في التعبير عن قانون نيوتن الثاني عندما نطبقه على أحداثيات غير الكارتيزية، ومع ذلك تصبح المسائل أكثر صعوبة عندما نتحدث عن مسائل معقدة وصعبة.
- أن معنى ذلك أن استخدام قانون نيوتن الثاني لحل مثل تلك المسائل يصبح أصعب.
- أننا إذن بحاجة إلى طريقة لحل المسائل وأيجاد معادلات الحركة (قانون نيوتن الثاني) بشكل أسهل بالرغم من أن النتيجة هي نفسها في النهاية. وهذه الطريقة هي باستخدام معادلات لاجرانج.
- ولكن لن نتمكن من فهم معادلات لاجرانج إلا بالتعرف أولا على طريقة الحساب بالتغيرات Calculus of Variations .
- سوف نتعرف أكثر على هذا الموضوع من خلال بعض الأمثلة.

6.1- مثالان على حساب التغيرات

- تقوم فكرة حساب التغيرات على أساس البحث عن قيم دنيا minimum أو عظمى maximum للكميات التي يمكن التعبير عنها بالتكامل.
- المثال الأول: أقصر مسافة بين نقطتين

ربما كل واحد سوف يقول فورا: أقصر مسافة هي الخط المستقيم! ولكن كيف نثبت ذلك؟ أننا نحتاج لطريقة حساب التغيرات لأثبات هذه المقولة.

بحسب الصورة المرفقة، هناك نقطتان 1 و 2 وهناك خط منحني يصل بينهما. هذا الخط مهما كان شكله فهو لا يخرج عن العلاقة $y = y(x)$



يمكننا تحديد عنصر طولي في هذا الخط من نظرية فيثاغورس كما يلي: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

$$\because dy = \frac{dy}{dx}dx = y'(x)dx.$$

$$\therefore ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx \quad (1)$$

6.1- مثالان على حساب التغيرات

- إذن يمكن أيجاد طول الخط الواصل بين النقطتين باستخدام التكامل، ولكن معادلة (1) جعلت ذلك التكامل على متغير واحد هو x فقط. أذن ما نريد حسابه هو:

$$L=\int_1^2 ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx. \qquad (2)$$

- ما نريد حسابه الآن هو البحث عن طريقة ما بحيث تصبح الكمية L هي أقل ما يمكن (أو أكبر ما يمكن في حالات أخرى).
- بمعنى آخر، بما أن هذا التكامل يعتمد أساسا على الدالة *y(x)* فنحن إذن نبحث عن قيمة لهذه الدالة تجعل ناتج التكامل (2) أقل ما يمكن.
- سوف نعود لهذا المثال ونقوم بحله ولكن قبل ذلك نذكر المثال الثاني:
- المثال الثاني: مبدأ فرمات Fermat’s Principle

هنا السؤال المطلوب: ماهو المسار الذي يختاره الضوء للانتقال بين نقطتين في الفضاء. ولم يحدد ما إذا كان معامل الانكسار هو نفسه للفضاء أم متغيرا

6.1- مثالان على حساب التغيرات

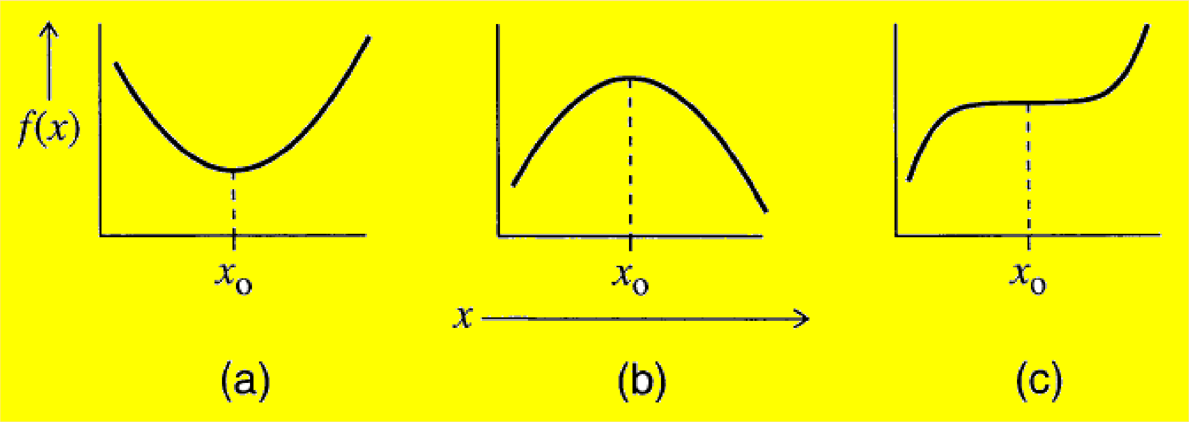
- قد يبدو الجواب بديهيا أن الضوء سوف يختار طريقا مستقيما في حالة كون معامل الانكسار هو نفسه، ولكن ماذا لو كان معامل الانكسار هو نفسه متغيرا؟ أو لو مر شعاع الضوء بعدسة سواء كانت مجمعة أو مشتته؟
- معلوم أن سرعة الضوء تختلف بحسب معامل انكسار الوسط فتكون أقصى ما يمكن في الفراغ وتقل كلما زادت قيمة معامل الانكسار n والذي يعرف بالعلاقة $n = c/v$ حيث c هي سرعة الضوء في الفراغ و v سرعته في الوسط.
- إذن الزمن الكلي الذي يحتاجه الشعاع لقطع المسافة بين النقطتين يعطى بالصورة:

$$\tau = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \frac{1}{c}\int_1^2 n\, ds = \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx. \qquad (3)$$

- مع ملاحظة أن معامل الانكسار في (3) متغير ويعتمد على كل من x و y .

6.1- مثالان على حساب التغيرات

- لو تأملنا في المثالين لوجدنا أن هدفنا في الأول التأكد من أن الخط المستقيم هو المطلوب كأقصر مسافة، وأن المسار الذي يلزمه أقصر فترة زمنية هو المطلوب في الحالة الثانية.
- ماذا تعني لنا عبارة: أقصر؟ أي قيمة التكامل هي الأقل؟ وهذا يكون عندما تكون قيمة مشتقة الدالة هي الأقل؟
- ربما نتصور بأن الصورتين الوحيدتين هما عندما تكون للدالة قيمة عظمى أو قيمة دنيا حيث يصبح التفاضل يساوي (الميل) ويساوي الصفر أي أن: $\frac{df}{dx} = 0$
- نتأمل في الشكل التالي



6.1- مثالان على حساب التغيرات

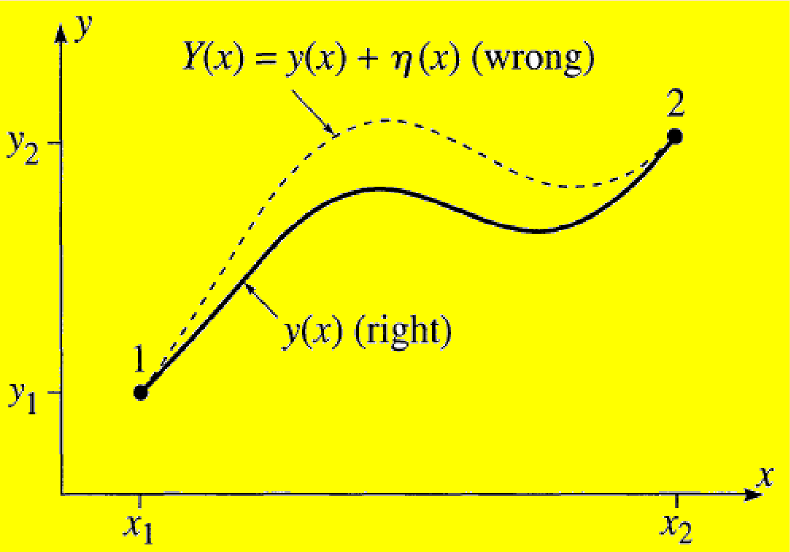
- في الشكل السابق (a) و (b) واضح أن هناك قاع وقمة على الأقل فيما يبدو بشكل مباشر.
- أما في الجزء (c) فأن تحديد النقطة التي تمثل نقطة الانقلاب بشكل واضح هو أمر صعب.
- إذن لابد من القيام بعمليات اختبار لقيمة المشتقة عند عدد من النقاط ابتداء من اليسار وحتى نصل لأفضل قيمة ممكنة تمثل القيمة الصفرية.
- هذه العملية هي ما نسميه : حساب التغيرات Calculus of Variations أي أنه يتم البحث عن تغيير صغير جدا يقربنا أكثر وأكثر من الحد الأدنى للمشتقة.
- وبتوضيح أكثر: في (a) نقوم بالتفاضل الأول ثم الثاني، فأن كانت قيمة المشتقة الثانية + فأن النقطة x_0 تمثل فعلا قيمة دنيا. وفي الجزء (b) نقوم بالتفاضل الثاني أيضا ونتوقع أن نحصل على قيمة – وهذا يدل كذلك على أن x_0 قيمة عظمى. أما في الجزء (c) فواضح أن التفاضل الثاني أيضا يساوي الصفر وبالتالي فلسنا متأكدين (رياضيا) أن النقطة x_0 تمثل قيمة دنيا أم عظمى. وهنا نحتاج لحساب التغيرات.

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

- لو تأملنا في المعادلة (3) لوجدنا في داخل التكامل كلا من n وهي دالة في المتغير x وكذلك y' . وبالتالي من المناسب أن نكتب تعبيرا عاما لأية دالة تعتمد على كل من x والمشتقة y' كما يلي:

$$S=\int_{x_1}^{x_2} f[y(x),y'(x),x]dx. \qquad (4)$$

- حيث ندرس هنا خطا منحنيا غير معلوم تمثله الدالة $y(x)$ لكنه يصل بين النقطتين x_1 و x_2



بما أننا لا نعلم ما هو الخط المناسب فنفترض وجود خطين كما هو في الشكل. أحدهما يمثل المسار المطلوب وهو $y(x)$ والثاني يمثل المسار الخاطئ وهو $Y(x)$. ونعبر عن الفرق بين المسارين باستخدام دالة ما هي: $\eta(x)$:

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

$$Y(x) = y(x) + \eta(x) \qquad (5)$$

- بالتأمل نجد أن هناك عددا لا نهائيا من الدوال $\eta(x)$ كلها تعطي منحنيات خاطئة ولكن نفترض أن كل تلك المنحنيات أطول من المنحنى المطلوب.
- لاحظ أن كون جميع المنحنيات مهما كانت خاطئة فهي تبدأ وتنتهي بنفس النقاط فأن:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \qquad (6)$$

- من أجل مرونة أكثر نقوم بأدخال متغير آخر للمعادلة (5) وهو α ونعيد كتابتها:

$$Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \qquad (7)$$

نعيد الآن كتابة المعادلة (4) كما يلي:

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f[Y, Y'(x), x]dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f[y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x]dx. \qquad (8) \end{aligned}$$

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

❑ المعادلة (8) سوف تساعدنا على تحديد المسار الأقل والذي يحقق: $dS/d\alpha = 0$ عندما تكون $\alpha = 0$.

❑ حتى نقوم بتفاضل التكامل في المعادلة (8) نحتاج لحساب التفاضل الجزئي $\partial S/\partial\alpha$ باستخدام قاعدة السلسلة Chain Rule:

$$\frac{\partial f(y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', x)}{\partial\alpha} = \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad (9)$$

$$\therefore \frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = 0 \qquad (10)$$

❑ المعادلة (1) لديها حدين ونقوم الآن بتكامل الحد الثاني بالتجزيء كما يلي:

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta'\frac{\partial f}{\partial y'}dx = \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx, \qquad (11)$$

ولكن الحد الأول عند التعويض يصبح = صفر لأن قيمة $\eta(x) = 0$ عند الطرفين

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

- إذن معادلة (11) تصبح (وهي تمثل الحد الثاني في (1)):

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx, \qquad (12)$$

- بالتعويض من معادلة (12) في المعادلة (10) الأصلية نحصل على:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y} - \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx = 0 \qquad (13)$$

- معادلة (1) تساوي الصفر، وعندها أما $\eta(x) = 0$ أو القوس يساوي الصفر. ولكن $\eta(x)$ تساوي الصفر فقط عند النهايتين بحسب الافتراض وبالتالي:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (14)$$

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \qquad (14)$$

- هذه المعادلة تسمى: **معادلة أولار-لاجرانج Euler-Lagrange equation**
- هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم x الواقعة في المدى $x_2 \geq x \geq x_1$
- معنى المعادلة: يمكننا الحصول على قيمة دنيا للمسار S لو استطعنا أن نجد دالة للمسار تحقق هذه المعادلة.
- أصبح حل المسائل يتم كما يلي: نبحث عن دالة $f[y(x), y'(x), x]$ بحيث تحقق المطلوب في المعادلة (4) السابقة. ثم نقوم بكتابة معادلة أولار-لاجرانج، ثم نقوم بحل تلك المعادلة لأيجاد الدالة المطلوبة y(x) التي تحقق شرط المسار الأقصر أو بشكل عام القيمة الدنيا (في بعض الأحيان القيمة القصوى أو العظمى).

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة