جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

جامعة الملك سعود
King Saud University
1957

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 02

مقدمة عامة – الجزء الثاني

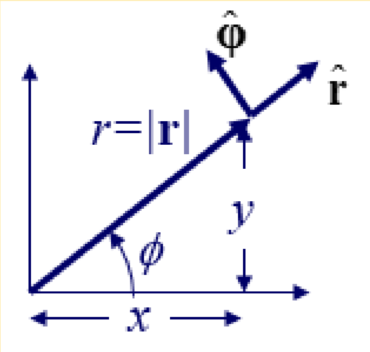
د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

1.7- الأحداثيات القطبية في بعدين 2D

- تطبيق قانون نيوتن الثاني أسهل ما يكون باستخدام الأحداثيات الكارتيزية.
- ولكن هذا لا يعني عدم أمكانية استخدامه مع غيرها من الأحداثيات
- ولنحاول دراسة الصورة عند استخدام الأحداثيات القطبية في بعدين فقط.
- التحويل بين النظامين يتم من خلال المعادلات التالية:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \arctan(y/x) \end{aligned}\right.$$



- لنقم الآن بتحديد متجهات الوحدة لهذه الأحداثيات كما يلي:

$$r \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$$
$$\phi \rightarrow \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

- وتذكر أن هذه المتجهات الوحدوية لها مقدار يساوي الوحدة، وأما اتجاهها فهو نفسه اتجاه الأحداثيات.

متجهات الوحدة في الأحداثيات القطبية

- هناك أكثر من طريقة لتحديد متجه وحدة لمتجه ما، فعلى سبيل المثال نختار متجها ما ولنقل **r** ثم نقسم ذلك المتجه على مقداره |**r**|. في هذه الحالة نحصل على متجه مقداره وحدة واحدة واتجاهه هو نفسه اتجاه المتجه الأصلي.

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

- هناك فرق كبير بين متجهات الوحدة الكارتيزية ونظيراتها في الأحداثيات القطبية وهو كون الأولى ذات مقدار ثابت يساوي الوحدة واتجاه ثابت هو نفسه اتجاه الأحداثيات الكارتيزية. أما متجها الوحدة القطبية فلديها أيضا مقادرير تساوي الوحدة غير أن اتجاهاتها تتغير كما في الشكل.

Cartesian unit vectors are constant

Polar coordinate unit vectors change (direction) with time

متجهات الوحدة في الأحداثيات القطبية

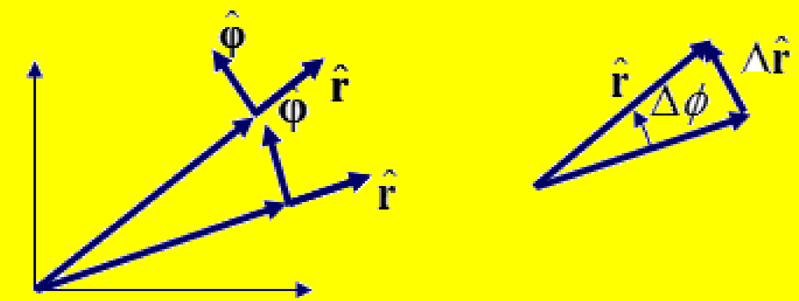
- بما أن متجهي الوحدة $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ متعامدين في الفضاء الثنائي، فأن أي متجه يمكن التعبير عنه بدلالة هذين المتجهين. على سبيل المثال يمكن أن نعبر عن القوة كما يلي: $\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
- مثلا تخيل أن كتلة صغيرة مربوطة بحبل ويتم الدوران بها في الفراغ بشكل أفقي فهناك مركبتان للقوة المؤثرة الأولى على طول الحبل F_r وتقابل قوة الشد في الحبل والثانية عمودية على الحبل F_ϕ وتقابل قوة ما ولنقل مقاومة الهواء للكتلة.
- أن اتجاه الموضع في هذه الحالة سهل ويعبر عنه بالصورة: $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$
- ولحساب القوة من قانون نيوتن الثاني أي $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ فأننا نحتاج إلى اشتقاق متجه الموضع بالنسبة للزمن. فلو قمنا بالاشتقاق الأول وباعتبار متغيرين مضروبين في بعض فأن القاعدة توصلنا للنتيجة:

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}}$$

- (تفاضل الأولى في الثانية + الثانية في تفاضل الأولى). لقد احتفظنا بالحد الثاني لأنه ليس ثابتا في هذه الحالة بل متغير.

اشتقاق وحدات المتجهات القطبية

- كثيرا ما نسمع بأن مشتقة القيمة الثابتة (بالنسبة للزمن) تساوي الصفر. وهذا الكلام صحيح ولكن بأخذ الاعتبار بأن اشتقاق المتجهات يساوي صفرا فقط في حالة كون مقدارها ثابتا واتجاهها ثابت كذلك.
- ولهذا فأن التسارع المرتبط بجسم يدور بسرعة ثابتة في مسار دائري لا يساوي الصفر بالرغم من أن التسارع هو مشتقة السرعة. والسبب في ذلك هو أن تلك السرعة متغيرة الاتجاه كما هو واضح.
- دعنا ندرس متجها للموضع **r** يتغير خلال الفترة الزمنية $t_2=t_1+\Delta t$ → t_1 كما في الصورة أدناه:



Recall: arc length $= r\theta$

In this case, $\theta = \Delta\phi$ *and* $r = |\hat{r}| = 1$

$$\Delta\hat{r} = \Delta\phi\,\hat{\varphi}$$

اشتقاق وحدات المتجهات القطبية

- إذن من الشكل السابق: $\Delta\hat{\mathbf{r}} \approx \Delta\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
- لنستخدم التعبير التالي:

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}\Delta t = \dot{\phi}\Delta t}$$

- إذن:

$$\Delta\hat{\mathbf{r}} \approx \dot{\phi}\Delta t\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (1)$$

$$\rightarrow \lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (2)$$

$$\therefore\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}r\hat{\mathbf{r}}$$

$$= \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (3)$$

- أي أن مركبات السرعة هي:

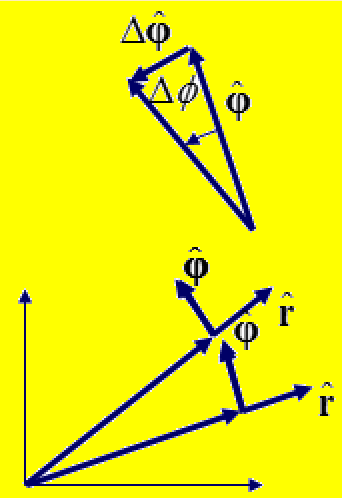
$$\boxed{v_r = \dot{r}; \qquad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega}$$

اشتقاق وحدات المتجهات القطبية

- لو قمنا بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة للزمن نحصل على ما يلي:

$$\mathbf{a}=\ddot{\mathbf{r}}=\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}}+r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)$$

$$=\frac{d\dot{r}}{dt}\hat{\mathbf{r}}+\dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}+\frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}+r\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}}+r\dot{\varphi}\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} \qquad (4)$$



- في الحد الخامس من المعادلة (4) ظهر لدينا الحد: $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}$

- للتعامل مع هذا الحد نستخدم نفس الطريقة السابقة. انظر للشكل

لتلاحظ أن:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}=-\Delta\phi\hat{\mathbf{r}} \qquad (5)$$

$$\because\ \Delta\phi=\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\Delta t=\dot{\phi}\Delta t \qquad (6)$$

$$(5)\rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\Delta t}=\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}=-\dot{\phi}\hat{\mathbf{r}} \qquad (7)$$

اشتقاق وحدات المتجهات القطبية

- في معادلة (5) اضفنا أشارة (-) حيث أن التغير في وحدة الاتجاه الدوراني هي عكس الاتجاه القطري. الآن معادلة (4) تصبح:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}) + (\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + r\dot{\phi}\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} \\ &= (\ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \left(\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} - r\dot{\phi}^2\hat{\mathbf{r}} \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (8)\end{aligned}$$

- قد تبدو هذه المعادلة معقدة بعض الشئ ولكن يمكن النظر إلى بعض الحالات الخاصة التي تصبح فيها أسهل. مثلا لو افترضنا أن $r = constant$ (مثلا كتلة تدول بطرف حبل طوله ثابت).

- في هذه الحالة الحدين الأول والرابع في (8) تصبح أصفارا وبالتالي:

$$\mathbf{a} = -r\dot{\phi}^2\hat{\mathbf{r}} + r\ddot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}} + r\alpha\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (9)$$

حيث الحد الأول عبارة عن التسارع المركزي المعروف $a_r = -r\omega^2 = -v^2 / r$ والحد الثاني التسارع الزاوي.

قانون نيوتن الثاني باعتماد الأحداثيات القطبية

- ❑ بما أن معادلة (8) السابقة تعطينا التسارع في الفضاء القطبي فأنه صار من الممكن التعبير عن قانون نيوتن الثاني في هذا الفضاء كما يلي:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) \\ F_\phi = m\left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right) \end{cases} \qquad (10)$$

- ❑ وسوف نقوم باشتقاق تلك المعادلة لاحقا باستخدام معادلات لاجرانج.

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة