problem 1-2:

Verify each of the following limits:

1) $\lim \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max(a, b)$, $a, b \geqslant 0$.

ANSWER NO 3:

$$\sqrt{x_n} \to 0.$$

ما يعني أن

أما إذا كان $x \neq 0$ فإن $x > 0$ وعليه $\sqrt{x} > 0$، وعندئذ

$$0 \leq \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{\left|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right|} \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}}$$

وبما أن $|x_n - x| \to 0$ فــإن النظرية 3.6 تقضي بأن $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \to 0$، أي أن $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

على

مثال 3.9

$$\lim n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

البرهان

لكل $n > 1$ نعلم أن $n^{\frac{1}{n}} > 1$ وعليه يوجد $h_n > 0$ بحيث

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n.$$

من هذا نرى أن

$$\begin{aligned} n &= (1+h_n)^n \\ &= 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 + \cdots + h_n^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \end{aligned}$$

وعلــيه فــإن $0 < h_n^2 < \dfrac{2}{n-1}$ لكــل $n > 1$. مــن نظرية 3.6 نستنتج الآن أن $h_n^2 \to 0$ وبالتالي فإن $h_n \to 0$، وهو المطلوب.