أمثلة و مسائل

مثال 1:

إذا علم أن دالة الإنتاج تأخذ الصورة التالية:

$$Y = 6X^{\frac{1}{2}}$$

فوضح كيف يتم إشتقاق كلاً من الناتج المتوسط و الناتج الحدي، دالة الإنتاج المعكوسة لهذه الدالة ثم إشتق دوال التكاليف الكلية، المتوسطة و الحدية من هذه الدالة؟

الحل:

هذا الشكل من الدوال يتماثل مع دالة إنتاج كوب دوجلاس *Cobb-Douglas* التي سيأتي ذكرها فيما بعد.

وهي هنا دالة في متغير مستقل واحد (x) كما يشير الأس إلى مرونة إنتاج هذا المورد.

أولاً: الناتج المتوسط

إذ يعرف كما سبق بأنه الناتج الكلي مقسوماً على عدد وحدات الناتج أي ان:

$$APP = \frac{Y}{X} = \frac{6X^{\frac{1}{2}}}{X} = 6X^{\frac{1}{2}}X^{-1}$$

$$= 6X^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{6}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\sqrt{X}}$$

ثانياً: الناتج الحدي

ويعرف بأنه تفاضل دالة الناتج الكلي بالنسبة لمورد الإنتاج المتغير أي أنه:

$$MPP = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} 6x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

ثالثاً: دالة الإنتاج المعكوسة

يتضح من المعادلة رقم (6) ان دالة الإنتاج المعكوسة لهذه الدالة تأخذ الصورة التالية:

$$X = \frac{1}{36} Y^2 \qquad (7)$$

رابعاً: دالة التكاليف المتغيرة الكلية (TVC)

حيث أن

$$TVC = P_X X$$

فإنه بالتعويض عن X كما في المعادلة (7) ينتج أن :

$$TVC = P_x \frac{1}{36} Y^2$$

$$= \frac{P_x Y^2}{36} \qquad (8)$$

خامساً: متوسط التكاليف المتغيرة (AVC)

$$AVC\frac{TVC}{Y} \qquad (10)$$

فإنه بالتعويض عن (TVC) كما في المعادلة (8) في المعادلة (9) ينتج أن:

$$AVC=\frac{P_xY^2}{36Y}=\frac{P_xY}{36} \qquad (10)$$

سادساً: التكاليف الحدية MC

وتعرف بأنها تفاضل دالة التكاليف الكلية أو تفاضل دالة التكاليف المتغيرة بالنسبة للإنتاج Y أي أن:

$$MC=\frac{\partial TVC}{\partial Y}=\frac{P_X}{18} \qquad (11)$$

مثال 2:

إذا كانت دالة الإنتاج المقدرة تأخذ الصورة التالية:

$$Y = 3X + 2X^2 - 0.1X^3 \qquad \textbf{(12)}$$

حيث Y,X تشير إلى الناتج و مورد الإنتاج على الترتيب. حدد قيم X التي تفصل بين مراحل الإنتاج المختلفة ثم أوجد مرونة الإنتاج لهذا المورد المتغير؟

الحل:

أولاً:

من الواضح أنه عندما $x=0$ فإن هذا يشير إلى بداية المرحلة الأولى للإنتاج.

ثانياً:

حيث أن **متوسط الإنتاج يصل إلى أقصاه في نهاية المرحلة الأولى فإن هذا يعني أن التفاضل الأول لدالة الناتج المتوسط بالنسبة للمورد X تساوي صفر كما يلي:**

$$APP = \frac{Y}{X} = \frac{3X + 2X^2 - 0.1X^3}{X}$$

$$= 3 + 2X - 0.1X^2 \qquad (13)$$

وبتفاضل دالة الناتج المتوسط رقم (13) بالنسبة لوحدات المورد و مساواتها بالصفر فإن:

$$\frac{\partial APP}{\partial X} = 2 - 0.2X = 0$$

$$\therefore 2 = 0.2X$$

$$\therefore X = \frac{2}{0.2} = 10$$

وعليه فإن المرحلة الأولى تنتهي عندما تصل وحدات المورد المتغير إلى القدر 10 وحدات. وهذا يعني أن الحد الأدنى الذي يمكن إستخدامه من المورد المتغير هو 10 وحدات.

ثالثاً:

لتحديد المرحلة الثالثة للإنتاج فإننا نعلم أنها تبدأ عندما يصل الناتج الكلي أقصاه ومن ثم الناتج الحدي يصل إلى الصفر. ولهذا فإنه يلزم إشتقاق الناتج الحدي من الدالة (12) ثم مساواته بالصفر كما يلي:

$$MPP = \frac{\partial Y}{\partial X} = 3 + 4X - 0.3X^2$$

وبمساواة الناتج الحدي بالصفر نجد أن :

$$3 + 4X - 0.3X^2 = 0$$

وحيث أن المعادلة يصعب تحليلها بطريقة المقص فإنه يتم التطبيق في القانون التالي:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (14)$$

حيث a يشير إلى معامل X^2 ، b يشير إلى معامل X ، أما c فيشير غلى الحد المطلق في المعادلة (12) ولذلك

فإن:

$$X = \frac{-4-\sqrt{16-3.6}}{-0.6}$$
$$= 14.04$$

وهذا يعني أن الحد الأقصى الذي يمكن إستخدامه من هذا المورد خلال العملية **الإنتاجية هو القدر 14.04 وحدة.**

رابعاً:

يتضح مما سبق أن المرحلة الثانية (المرحلة الإقتصادية المثلى للإنتاج) تنحصر فيما بين المرحلة الثالثة و المرحلة الأولى للإنتاج وهكذا فإن المرحلة الثانية تتحدد عندما تكون X محصورة بين حد أدنى قدره 10 وحدات و حد أقصى قدره 14.04 وحدة أي عندما:

$$10 \leq X \leq 14.04$$

خامساً:

لحساب مرونة الإنتاج للمورد المستخدم التي تقيس درجة الإستجابة بين مدخلات الإنتاج

و مخرجات الإنتاج أي بمعنى آخر تقيس التغير النسبي في الإنتاج الكلي الناشيء من تغير عنصر الإنتاج المتغير بمقدار 1% مثلاً.

وتقاس هنا بقسمة الناتج الحدي على الناتج المتوسط أي أن:

$$E_P = \frac{\%\Delta Y}{\%\Delta X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}\frac{X}{Y}$$

$$= \frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{X}{Y}$$

$$= \frac{\frac{\partial Y}{\partial X}}{\frac{Y}{X}} = \frac{MPP}{APP} \qquad (15)$$

حيث تشير APP, MPP إلى كلاً من الناتج الحدي الفيزقي والنتائج المتوسط الفيزقي على الترتيب .

ومن المعادلة (12) وبالتطبيق في المعادلة رقم (15) فإن مرونة الانتاج تأخذ الصوره التالية:-

$$E_P = \frac{MPP}{APP} = \frac{3+4X-0.3X^2}{3+2X-0.1X^2}$$

وبالتعويض عن X بقيم مختلفه يمكن ايجاد قيم معامل المرونة عند هذه القيم إذ أن المرونة ليست ثابتة عند جميع نقاط منحنى الناتج الكلي أو المتوسط أو الحدى.

مثال 3:

إذا كانت دالة التكاليف الكلية تأخذ الصورة الرياضية التالية:

$$TC = 100 + 6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3 \quad (16)$$

حيث:

TC = التكاليف الكلية، Y = الناتج الكلي.

إحسب كل من متوسط التكاليف الثابته،المتغيرة والكلية وكذلك التكاليف الحدية، ثم إحسب قيمة Y عندما تكون متوسط التكلفة الكلية أقل ما يمكن، وكذلك قيمة Y عندما تكون متوسط التكاليف المتغيرة أقل ما يمكن ثم كمية Y التي تجعل التكاليف الحدية أقل ما يمكن؟

الحل:

أولاً :

متوسط التكاليف الثابته الكلية AFC:

يتضح من المعادلة رقم (16) أن القدر 100 في دالة التكاليف تمثل التكاليف الثابته إذ أنها غير مرتبطة بالإنتاج

فعندما يكون الإنتاج صفر فإن التكاليف الكلية =100 وهي عبارة عن التكاليف الثابته، وعليه فإن متوسط التكاليف

الثابته AFC يقدر بقسمة التكاليف الثابته على عدد وحدات الناتج Yكما يلي:

$$AFC = \frac{FC}{Y} = \frac{100}{Y}$$

ثانياً:

متوسط التكاليف المتغيرة AVC:

يشير الجزء المتبقي من التكاليف الكلية بعد طرح التكاليف الثابته إلى التكاليف المتغيرة TVC أي أن :

$$
\begin{aligned}
TVC &= TC - TFC \\
&= 100 + 6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3 - 100 \\
&= 6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

و لحساب متوسط التكاليف المتغيرة فإنه يتم بقسمة TVC على عدد وحدات الناتج أي أن :

$$AVC = \frac{TVC}{Y}$$

$$AVC = \frac{6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3}{Y}$$

$$AVC = 6 - 0.4Y + 0.02Y^2$$

ثالثاً:

متوسط التكاليف الكلية *ATC* :

يمكن إشتقاق متوسط التكاليف الكلية بطريقتين:

1− مباشرة بقسمة دالة التكاليف الكلية TC علىعدد وحدات الناتج، أي أن:

$$ATC = \frac{TC}{Y} = \frac{100 + 6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3}{Y}$$

$$\therefore ATC = 100Y^{-1} + 6 - 0.4Y + 0.02Y^2 \qquad (17)$$

2− بجمع متوسط التكاليف الثابته و متوسط التكاليف المتغيرة أي أن:

$$ATC = AFC + AVC$$

بالتعويض عن AFC، AVC كما في المعادلات السابق إشتقاقها نجد أن:

$$ATC = \left(\frac{100}{Y}\right) + \left(\frac{6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3}{Y}\right)$$

وهذا مساوٍ لـ:

$$ATC = \frac{TC}{Y} = \frac{100 + 6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3}{Y}$$

$$\therefore ATC = 100Y^{-1} + 6 - 0.4Y + 0.02Y^2$$

وهي النتيجة المتحصل عليها من المعادلة (17).

رابعاً:

التكاليف الحدية MC:

وتعرف بأنها التغير في التكاليف الكلية الراجع إلى التغير في الإنتاج أي أن:

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Y} = \frac{\partial TVC}{\partial Y}$$

و بالتطبيق في المعادلة (16) ينتج أن:

$$MC = 6 - 0.8Y + 0.06Y^2 \qquad (18)$$

خامساً:

قيمة Y عندما تكون التكاليف الحدية أقل ما يمكن:

يمكن تحديد ذلك من خلال التفاضل الأول لدالة التكاليف الحدية (18) بالنسبة لوحدات الناتج بالصفر كما يلي:

$$\frac{\partial MC}{\partial Y} = -0.8 + 0.12Y = 0$$

$$Y = \frac{0.8}{0.12} = 6.67$$

وهكذا فإن الناتج الحدي يصل إلى أدنى نقطة له عندما يبلغ الناتج 6.67 وحدة.

سادساً:

تحديد قيمة Y عندما يكون متوسط التكاليف المتغيرة أقل ما يمكن:

ويتحقق ذلك من خلال مساواة تفاضل متوسط التكاليف المتغيرة بالنسبة لوحدات الناتج بالصفر كما يلي :

$$\frac{\partial TVC}{\partial Y} = -0.4 + 0.04Y = 0$$

$$Y = \frac{0.40}{0.04} = 10$$

سابعاً:

تحديد قيمة Y عندما يكون متوسط التكاليف الكلية أقل ما يمكن:

ويتحقق ذلك من خلال مساواة تفاضل متوسط التكاليف الكلية بالنسبة لوحدات الناتج بالصفر كما يلي :

$$\frac{\partial AC}{\partial Y} = -100Y^{-1} - 0.4 + 0.04Y = 0$$
$$Y = 17.85$$

مما سبق يتضح أن التكاليف الحدية تصل إلى أدنى نقطة لها عند مستوى أقل من الناتج (6.67وحده)عن نظيرتها متوسط التكاليف المتغيرة التي تصل لهذه النقطة عند 10 وحدات من الناتج أو متوسط التكاليف الكلية التي تصل لهذه النقطة عند بلوغ الناتج 17.85 وحده.

مثال 4:

إشتق المنطقة الإقتصادية و دالة التكاليف الحدية لدالة الإنتاج التالية:

$$Y = 8X - \frac{1}{2}X^2 \tag{19}$$

حيث تشير كل من X,Y إلى الناتج و مورد الإنتاج على الترتيب.

الحل:

أولاً:

يمكن إشتقاق المنطقة الإقتصادية من دالة الإنتاج (19) وذلك من خلال الخطوات التالية:

1- الناتج المتوسط لهذه الدالة APP يعبر عنه كما يلي:

$$APP = \frac{Y}{X} = 8 - \frac{1}{2}X \tag{20}$$

2- الناتج الحدي MPP لهذه الدالة و يعبر عنه كما يلي:

$$MPP = \frac{\partial Y}{\partial X} = 8 - X \tag{21}$$

وبهذا فإن الناتج الكلي يصل إلى أقصاه عندما تكون X=8 (حيث يصل الناتج الحدي للصفر) ومن ثم فالمنطقة الإقتصادية لهذه الدالة تتحدد من خلال المدى الذي تنحصر فيه X بين 8 وحدات ، صفر وحدة أي عندما:

$$0 \leq X \leq 8$$

أي بمعنى آخر عندما:

$$0 \leq Y \leq 32$$

ثانياً:

لإشتقاق دالة التكاليف الحدية للدالة (19) يتم إشتقاق دالة التكاليف أولاً كما يلي:

(أ) تأخذ الدالة المعكوسة للدالة (19) الصورة التالية:

$$0 = -\frac{1}{2}X^{2} + 8X - Y$$

ومنها فإن قيمة X لهذه الدالة المقدرة كما يلي :

$$X = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4.\frac{1}{2}Y}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 8 - \sqrt{64 - 2Y}$$

بحيث أن :

$$0 \leq Y \leq 32$$

(ب)　يمكن إشتقاق دالة التكاليف من خلال X بالتطبيق في القاعدة:

$$TVC = P_X X = P_X (8 - \sqrt{64 - 2Y}$$

حيث:

TVC= التكاليف المتغيرة، P_X = سعر الوحدة من المورد، X = كمية المورد المتغير، Y = كمية الناتج

.($0 \leq Y \leq 32$)

(ج) من دالة التكاليف المشتقة TVC يمكن تقدير التكاليف الحدية كما يلي :

$$MC = \frac{\partial TVC}{\partial Y} = \frac{-2P}{\sqrt{64 - 2Y}}$$

حيث:

$$0 \leq Y \leq 32$$

يلاحظ أنه من الصعب تحديد قيمة MC إذا كانت $Y=32$ وحدة حيث يصبح المقام صفر.