أمثلة ومسائل

مثال 1:

إذا علم أن العلاقة الموردية الناتجية تحكمها البيانات الموضحة بالجدول التالي :

أحسب كمية المورد المعظمة للربح إذا علم أن سعر الوحدة من المورد X=100 ريال وأن سعر الوحدة من الناتج Y=30 ريال وأن التكاليف الثابته للإنتاج = 1000 ريال.

جدول (1) العلاقة الموردية الناتجية

الناتج Y	المورد X
0.0	0
3.7	2
13.9	4
28.8	6
46.9	8
66.7	10
86.4	12
104.5	14
119.5	16
129.6	18
133.3	20
129.1	22

الحل:

من هذا الجدول يمكن تحديد كمية المورد ومن ثم الناتج المعظمة للربح عن طريق حساب الإيراد الكلي و التكاليف الكلية ثم إيجاد الفرق بينهما كما هو موضح بالجدول التالي:

جدول (3) الإيرادات الكلية والتكاليف الكلية والأرباح بالريال

الربح	قيمة الناتج الكلي	التكاليف الكلية	التكاليف المتغيرة	التكاليف الثابته	الناتج	المورد
TVP-TC	***$TVP=P_Y(Y)$***	***$TC=TFC+P_X(X)$***	***Px(X)***	***TFC***	***Y***	***X***
-1000	0	1000	0	1000	0	0
-1089	111	1200	200	1000	3.7	2
-983	417	1400	400	1000	13.9	4
-736	864	1600	600	1000	28.8	6
-393	1407	1800	800	1000	46.9	8
1	2001	2000	1000	1000	66.7	10
392	2592	2200	1200	1000	86.4	12
735	3135	2400	1400	1000	104.5	14
985	3585	2600	1600	1000	119.5	16
1088	3888	2800	1800	1000	129.6	18
999	3999	3000	2000	1000	133.3	20
673	3873	3200	2200	1000	129.1	22

ويتضح من الجدول أعلاه أن أقصى ربح يتحقق عند إستخدام القدر 18 وحدة من المورد المتغير X أي عند إنتاج 129.6 وحده من الناتج.

مثال 2:

باستخدام البيانات الموردية والتي تحصل عليها من المثال الأول حدد كمية المورد ومن ثم كمية الناتج المعظمة للربح باستخدام دالة الناتج بدلاً من دوال الإيرادات و التكاليف الكلية؟

الحل:

تتحدد كمية المورد المعظمة للربح عندما تتساوى قيمة الناتج الحدي للمورد مع سعر الوحدة من هذا المورد أي عندما:

$$P_Y . MPP_X = P_X$$

حيث P_X,P_Y تمثل سعر الوحدة من الناتج و سعر الوحدة من المورد على التوالي في حين تشير MPP إلى الناتج الحدي الفيزيقي للمورد X . وبالإستعانة ببيانات الجدول رقم 3. يمكن تحقيق هدف المنشأة كما هو موضح في الجدول رقم 4. التالي:

جدول(4) الناتج الحدي الفيزيقي وقيمة الناتج الحدي و سعر المورد

وحدات المورد X	وحدات الناتج Y	الناتج الحدي الفيزيقي MPP	سعر الوحدة من المورد P_X	قيمة الناتج الحدي $VMP_X=(MPP)P_y$
0	0.0	-	-	-
2	3.7	1.9	100	57
4	13.9	5.1	100	153
6	28.8	7.5	100	225
8	46.9	9.1	100	273
10	66.7	9.9	100	297
12	86.4	9.9	100	297
14	104.5	9.1	100	273
16	119.5	7.5	100	225
18	**129.6**	**5.1**	**100**	**153**
20	133.3	1.9	100	57
22	129.1	-2.1	100	-63

يتضح من الجدول رقم 4. أن كمية المورد المعظمة للربح والتي تتحقق عند مساواة قيمة الناتج الحدي $P_Y(MPP_X)$ مع سعر الوحدة من المورد P_X هي 18.2 وحدة وهي تقريباً النتيجة المتحصل عليها باستخدام الطريقة الأولى.

مثال 3:

إذا كانت منشأة تعمل في ظل التنافس التام وأن دالة تكاليفها المتوسطة كالتالي:

$$AC = \frac{25}{Q} + 5 + 0.05Q$$

وأن سعر الوحدة المباعة هو 10 ريال فاحسب كمية Q التي تعظم أرباح المنشأة؟

الحل:

بما أن السعر الذي تواجهه المنشأة ثابت (سوق منافسة كاملة) أي أن سعر الوحدة من الناتج هو:

$$P_Y = 10$$

وعليه فإن الإيراد الكلي:

$$TR = PQ = 10Q$$

و الربح:

$$\begin{aligned}
&\Pi = TR - TC \\
&= 10Q - \left(\frac{25}{Q} + 5 + 0.05Q \right) Q \\
&= 10Q - 25 - 5Q - 0.05Q^2 \\
&= 5Q - 25 - 0.05Q^2 \\
&\frac{\partial \Pi}{\partial Q} = 5 - 0.10Q = 0 \\
&0.10Q = 5 \\
&\therefore Q = \frac{5 \times 100}{10} = 50
\end{aligned}$$

أي أن كمية Q التي تعظم صافي ربح المنشأة هي 50 وحدة.

مثال 4:

من دالة الإنتاج التالية:

$$Y = X^{2} - \frac{1}{30} X^{3}$$

حدد كمية X المعظمة للربح عندما يكون $P_X = 100$, P_Y=30 ريال.

الحل:

تشير الدالة السابق الإشارة إليها إلى التقدير الإحصائي للبيانات الموردية الناتجية المشار إليها في الجدول رقم 4 ومن خلال قاعدة معظمة الأرباح المعروفة و هي:

$$P_Y (MPP_X) = P_X$$

يتطلب حساب الناتج الحدي الفيزيقي MPP_X إيجاد التفاضل الأول للمعادلة السابقة بالنسبة لعنصر الإنتاج المتغير X كما يلي:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = (2X - \frac{1}{10} X^{2})$$

ومن خلال قاعدة معظمة الأرباح فإن:

$$30(2X - \frac{1}{10} X^{2}) = 100$$

أي بمعنى آخر:

$$60X - 3X^{2} - 100 = 0$$

$$3X^{2} - 60X + 100 = 0$$

$$X^{2} - 20X + \frac{100}{3} = 0$$

ومنها:

$$X = \frac{2 + \sqrt{4 - (\frac{4}{3})}}{0.2} = 18.2$$

أي ان كمية المورد المعظمة للربح هي القدر 18.2 وحدة من X.

مثال 5:

إذا كانت دالة الإنتاج في مورد واحد تأخذ الصورة الرياضية التالية:

$$Y = 3X + 2X^{2} - 0.1X^{3}$$

حيث Y=الناتج، X= مورد الإنتاج والمطلوب: كيفية إشتقاق منحنى طلب المورد من هذه الدالة الإنتاجية؟

الحل:

يمكن إشتقاق دالة أو منحنى طلب المورد X من خلال تحقيق شرط التوازن المعروف أي من خلال تحقيق المساواة بين قيمة الناتج الحدي للمورد المتغير مع سعر الوحدة من هذا المورد كما سبق وأشرنا إذ أن هذا هو الشرط الضروري في هذا الخصوص وبتطبيق القاعدة:

$$P_{Y}\,(MPP_{X}) = P_{X}$$

ومن المعادلة الأساسية يمكن إشتقاق MPP_X كما يلي:

$$MPP_{X} = \frac{\partial Y}{\partial X} = 3 + 4X - 0.3X^{2}$$

وبتطبيق القاعدة فإن:

$$P_{Y}(3 + 4X - 0.3X^{2}) = P_{X}$$

أي أن:

$$(3 + 4X - 0.3X^{2}) = \frac{P_{X}}{P_{Y}}$$

أو:

$$(3 + 4X - 0.3X^{2}) - \frac{P_{X}}{P_{Y}} = 0$$

أي أن:

$$-0.3X^{2} + 4X + \left(3 - \frac{P_{X}}{P_{Y}}\right) = 0$$

ومنها:

$$X^{*} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-0.3)(3 - \frac{P_{X}}{P_{Y}})}}{-0.6}$$

واضح أن هناك قيمتين للمورد X أحدهما موجبة و الأخرى سالبة ولكي تكون المعادلة موجبة فإن هذا يستدعي أن يكون سعر المورد أقل من أو مساوٍ قيمة متوسط الإنتاج أي ان:

$$P_{X} \leq AVC$$

مثال 6:

إذا كانت دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل الرياضي التالي:

$$TC = 100 + 6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3$$

حيث TC = التكاليف الكلية، Y= الناتج الكلي . إحسب كل من:

أ) متوسط التكاليف المتغيرة الكلية و متوسط التكاليف الثابته؟

ب) دالة التكاليف الحدية؟

ت) مستوى الناتج Y الذي تبلغ عنده متوسط التكاليف المتغيرة و التكاليف الحدية أدنى قيمة لهما؟

ث) كمية Y التي تحقق تدنية متوسط التكاليف الكلية؟

الحل:

أ) حيث أن المقدار 100 في المعادلة يشكل التكاليف الثابته، فإن باقي المعادلة تشكل التكاليف المتغيرة التي تتأثر بتغير الكمية المنتجة Y ، و هكذا فإن متوسط التكاليف المتغيرة يعبر عنها بالمعادلة:

$$AVC = \frac{TVC}{Y} = \frac{6Y - 0.4Y^2 + 0.02Y^3}{Y}$$

$$= 6 - 0.4Y + 0.02Y^2$$

ومن ثم فإن متوسط التكاليف الثابته تصبح:

$$AFC = \frac{100}{Y}$$

ب) دالة التكاليف الحدية MC يتم الحصول عليها من خلال العادلة التالية:

$$MC = \frac{\partial TVC}{\partial Y} = 6 - 0.8Y + 0.6Y^2$$

ت) مستوى الناتج Y الذي عنده AVC أقل مايمكن يتم الحصول عليه بتفاضل دالة التكاليف المتغيرة بالنسبة للناتج Y ومساواة ذلك بالصفر كما يلي:

$$\frac{\partial AVC}{\partial Y} = -0.4 + .04Y = 0$$

$$\therefore Y = 10$$

وبالطريقة نفسها يمكن تحديد Y التي تحقق تدنية التكاليف الحدية كما يلي:

$$\frac{\partial MC}{\partial Y} = -0.8 + 0.12Y = 0$$

$$\therefore Y = 6.67$$

ويتضح من ذلك أن النقطة الدنيا لدالة التكاليف الحدية تتحقق قبل النقطة الدنيا لدالة متوسط التكاليف المتغيرة.

ث) بالطريقة نفسها الموضحة في (ت) يمكن إيجاد كمية Yالمحققة لأدنى نقطة على منحنى متوسط التكاليف الكلية كالآتي:

$$ATC = \frac{TC}{Y} = 100Y^{-1} + 6 - 0.4Y + 0.02Y^2$$

$$\therefore \frac{\partial ATC}{\partial Y} = -100Y^{-2} + 0.04Y - 0.4 = 0$$

$$\therefore \frac{-100}{Y^2} + 0.04Y - 0.4 = 0$$

ومنها Y=17.85 وحدة . و عند هذه النقطة نجد أن متوسط التكاليف الكلية تبلغ أدناها وتتساوى مع التكاليف الحدية وكلاهما يساوي 10.83 . أي انه عند نقطة تدنية متوسط التكاليف نجد أن:

$$ATC = MC = 10.83 \text{ ريال}$$

مثال 7:

إذا كانت دالة إنتاج المنشأة تأخذ الصورة التالية: $Y = 6X^2 - X^3$

كما أن دالة السعر يمكن أن يعبر عنها بالمعادلة : $P = Y^{-\frac{1}{2}}$

فاحسب قيمة كل من الناتج الحدي القيمي وقيمة الناتج الحدي وقارن بينهما؟

الحل:

هناك فرق واضح بين: قيمة الناتج الحدي VMP وهو عبارة عن الناتج الحدي مضروباً في قيمة الوحدة من الناتج.

و الناتج الحدي القيمي MVP الذي يشير إلى الزيادة في قيمة الناتج الكلي بالنسبة لزيادة الكمية المستخدمة من المورد الإنتاجي. ومن المعادلة السابقة نجد أن:

أ) قيمة الناتج الكلي (TVP) يساوي الناتج الكلي Y مضروباً في سعر الوحدة من المورد أي أن:

$$TVP = Y.P_Y = (6X^2 - X^3)Y^{-\frac{1}{2}}$$
$$= (6X^2 - X^3)(6X^2 - X^3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= (6X^2 - X^3)^{\frac{1}{2}}$$

ومنها نجد أن الناتج المتوسط القيمي AVP يصبح:

$$AVP = \frac{TVP}{X} = \frac{(6X^2 - X^3)^{\frac{1}{2}}}{X}$$
$$= (6 - X)^{\frac{1}{2}}$$

كما أن الناتج الحدي القيمي $Marginal\ Value\ Product(MVP)$:

$$MVP = \frac{\partial(TVP)}{\partial X} = \frac{\partial\left[(6X^2 - X^3)^{\frac{1}{2}}\right]}{\partial X}$$
$$= \frac{1}{2}(6X^2 - X^3)^{-\frac{1}{2}}(12X - 3X^2)$$

أما قيمة الناتج الحدي VMP فيتم الحصول عليه بحاصل ضرب الناتج الحدي الفيزيقي MPP في قيمة الوحدة من الناتج P_Y كما يلي : $VMP = MPP.P_Y$

$$VMP = \frac{\partial Y}{\partial X}.P_Y$$
$$= (12X - 3X^2)(Y)^{-\frac{1}{2}}$$

ومن المعادلة الأصلية نجد أن :

$$= (12X - 3X^2)(6X^2 - X^3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= (6X^2 - X^3)^{-\frac{1}{2}}(12X - 3X^2)$$
$$\therefore MVP \neq VMP$$