نموذج لحل الاختبار الفصل الثاني

على المقرر 431 رياض

الفصل الأول 1437/1438

السؤال الأول (1) أ) يمكن الإثبات بتعديل بسيط في برهان "نتيجة (4,2)" بالصفحة 88 من الكتاب.

ب) من الفقرة أ) يمكن أن نفرض أن G غير مترابط.

ليكن $G_1, G_2, \dots, G_k$ مركبات G، حيث $k \geq 2$.

لكل $1 \leq i \leq k$، ليكن v_i رأسا من G_i. نعتبر الرسم $\tilde{G}$ حيث:

$V(\tilde{G}) = V(G)$, $E(\tilde{G}) = E(G) \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < k\}$,

واضح أن $\tilde{G}$ رسم مستو، لا يحتوي على متعددات، وأن $\tilde{G}$ مترابط. إذا من (أ) نرى أن:

$e(\tilde{G}) \leq 2v - 4$. لكن $e(\tilde{G}) = m + (k-1)$

إذا $m \leq m + (k-1) \leq 2v - 4$

$m \leq 2v - 4$ وهو المطلوب.

ج) $K_{3,3}$ هو رسم بدون متعددات. نفرض بالتناقض أنه مستو. ينتج من (ب) أن $e(K_{3,3}) \leq 2 \times 6 - 4$، وهو $9 \leq 8$. تناقض. إذا $K_{3,3}$ غير مستو.

(Page 1)

(2) من السهل أن نرى أن $K_{m,n}$ رسم مستوٍ إذا وفقط إذا كان:
$\min(m,n) \leq 2$ أو إذا كان $\min(m,n) \geq 3$، فإن $K_{m,n}$ غير مستوٍ لأنه يحتوي رسماً جزئياً يماثل $K_{3,3}$.

(3) لنكن $H : K_5 \cup K_3$.
نفترض أن H غير مستوٍ (يحتوي K_5 كرسم جزئي)
وأن $\overline{H}$ غير مستوٍ لأنه يحتوي (كرسم جزئي) يماثل $K_{3,3}$.

N.B لاحظ أن: $\overline{H} = \overline{K_5} + \overline{K_3}$

السؤال الثاني (1) المطلوب إثباته هو "مبرهنة (2,2)" بالصفحة 43 من الكتاب.

(2) ليكن N هو العدد المطلوب. يمكننا أن نرى أن:

(أ) $N = \binom{2n+1}{n} d_{n+1}$

(ب) لأن $N = (n+1)!$ / N يساوي عدد تباديل الأعداد الفردية: $1, 3, 5, \ldots, 2n+1$.

(ج) نبدأ بالحالتين: $\begin{cases} f(1) = 2n \\ f(n+1) = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n+1) = 2n \end{cases}$

نرى أن:

$$N = \binom{2n+1-2}{n-2} d_{n+1} + \binom{2n+1-2}{n} d_{n-1}$$

$$N = \binom{2n-1}{n-2} d_{n+1} + \binom{2n-1}{n} d_{n-1}$$ (أ)

3) لدينا صندوق يحتوي على $4n$ كرة بيضاء و $3n$ كرة سوداء.

ليكن: N عدد طرق اختيار كرتين من الصندوق.

أ) $N = \binom{7n}{2}$.

و بما أن الحالتين: "الكرتان من نفس اللون"

و "الكرتان ليست لهما نفس اللون" ذي أن:

$$N = \binom{4n}{2} + \binom{3n}{2} + \binom{4n}{1}\binom{3n}{1}$$

إذا

$$\binom{7n}{2} = \binom{4n}{2} + \binom{3n}{2} + 12n^2$$

السؤال الثالث: (1) أ) المعادلة هي:

$$N = \binom{13}{2,3,4,4} = \frac{13!}{2!\,3!\,4!\,4!}$$

ب) عدد حلول المعادلة هو:

$$N = \binom{4-1+13}{13} = \binom{16}{13}$$

(2) أ) واضح أن العدد المطلوب N هو عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة: $y_1 + y_2 + y_3 = 2$

أي ذلك بالتعويض: $(y_1 = x_1 - 4,\ y_2 = x_2 - 4,\ y_3 = x_3 - 7)$

إذا

$$N = \binom{3-1+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

ب) لتكن U هي مجموعة الحلول الصحيحة (x_1, x_2, x_3) غير السالبة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ و لتعتبر المجموعة الجزئية من U التالية:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 4,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\},$$

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 10,\ x_3 \geq 0\},$$

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 9\}.$$

- واضح أن العدد N المطلوب هو:

$$N = |U \setminus (A \cup B \cup C)|$$

من مبدأ الشمول و الاقصاء لدينا:

$$N = |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|.$$

- نحسب بسهولة القيم التالية:

$$* \ |U| = \binom{3-1+17}{17} = \binom{19}{17} = 171$$

$$* \ |A| = \binom{3-1+17-4}{17-4} = \binom{15}{13} = 105.$$

$$|B| = \binom{3-1+17-10}{17-10} = \binom{9}{7} = 36$$

$$|C| = \binom{3-1+17-9}{17-9} = \binom{10}{8} = 45, \quad |A \cap B| = \binom{5}{3} = 10,$$

$$|A \cap C| = \binom{6}{4} = 15, \quad |B \cap C| = 0, \quad |A \cap B \cap C| = 0.$$

$$N = \binom{19}{17} - \left[\binom{15}{13} + \binom{9}{7} + \binom{10}{8}\right] + \left[\binom{5}{3} + \binom{6}{4}\right] \Rightarrow \boxed{N = 10}$$

(Page 4)