نموذج لحل الاختبار النهائي
(الفصل الثاني 36/37 هـ)

السؤال الأول:

(1) (أ) المطلوب هو اثبات المبرهنة 2.2 (الصفحة 36).

(ب) المطلوب هو اثبات النتيجة 2.1 (الصفحة 37)

(2) ليكن $G=(V,E)$ بيانا عدد رؤوسه n، عدد أضلاعه e، وعدد مركباته k، ولتكن $G_i=(V_i,E_i)$ هي مركبات G.
لاحظ أنه لكل $1\leq i\leq k$، $|E_i|\geq|V_i|-1$ لأن لـ G_i شجرة مولدة.
إذاً $e=|E|=\sum_{i=1}^{k}|E_i| \geq \sum_{i=1}^{k}(|V_i|-1)=n-k$

(3) (أ) K_n مترابط وغير صفري لكل $n\geq 2$، وهو رسم منتظم من النوع $(n-1)$.
إذاً يكون K_n أويلريا إذا وفقط إذا كان $(n-1)$ عدداً زوجياً.
إذاً يكون K_n أويلريا إذا وفقط إذا كان n عدداً فردياً بحيث $n\geq 3$. ///

(N.B) نستبعد حالة $n=1$.

(ب) ليكن $n\geq 1$ عدداً صحيحاً.
من الواضح أن الرسم $K_{n,2n}$ مترابط وغير صفري
ولنا:
$$\{\deg u : u\in V(K_{n,2n})\}=\{n,2n\}$$
إذاً يكون $K_{n,2n}$ أويلريا إذا وفقط إذا كان n زوجياً (لأن $2n$ زوجي دائماً). ///

(ج) ليكن $n \geq 3$ عددا صحيحا.

* الرسمان $\overline{C}_3$ و C_4 غير مترابطين وبالتالي فإنهما غير هاملتونيين.
* $C_5 \cong \overline{C}_5$ وبما أن C_5 رسم هاملتوني.
* إذا كان $n \geq 6$، فإنه لكل رأس u لدينا:

$$\deg_{\overline{C}_n} u = n-1-2 = n-3$$

(لأن $\deg_{C_n} u = 2$)

وبما أن $n \geq 6$، فإن: $((n-3)-\frac{n}{2} = \frac{n-6}{2} \geq 0)$

وبالتالي فإن الرسم $\overline{C}_n$ هاملتوني.

إذا، يكون $\overline{C}_n$ رسما هاملتونيا إذا وفقط إذا كان $n \geq 5$.

(د) ليكن الرسم $K_{n,n}$ حيث $n \geq 2$.

إذا كان $n \in \{1,2\}$ فإن $K_{n,n}$ رسم مستو

لأن: $K_{1,1} \cong$  و $K_{2,2} \cong$ 

أما إذا كان $n \geq 3$ فإن الرسم $K_{n,n}$ يحتوي رسما جزئيا يماثل الرسم $K_{3,3}$ وبالتالي فإن الرسم $K_{n,n}$ غير مستو.

إذا، يكون الرسم $K_{n,n}$ مستويا إذا وفقط إذا كان $n \in \{1,2\}$.

(3) ليكن G رسما عدد رؤوسه r حيث $r \geq 1$.

(أ) ليكن $k = \chi(G)$, $\bar{k} = \chi(\overline{G})$

بما أن $\chi(G) = k$ فإنه يوجد تجزئ $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ للمجموعة $V(G)$، متكون من k مجموعة مستقلة في G

لیکن $1 \leq i \leq k$.
بما أن V_i مجموعة مستقلة في G فإن الرسم الجزئي $\overline{G}[V_i]$ المحدث بـ V_i، هو رسم تام،
وبالتالي، فإن: $\bar{k} = \chi(\overline{G}) \geq |V_i|$

إذن) $v = |V(G)| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq \sum_{i=1}^{k} \bar{k}$

ومنه) $v \leq k\bar{k}$

وبالتالي: $\boxed{\chi(G).\chi(\overline{G}) \geq v}$

(ب) لإثبات أن $\chi(G)+\chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{v}$، (أي $k+\bar{k} \geq 2\sqrt{v}$)،
يكفي أن نثبت أن:
$(k+\bar{k})^2 \geq 4v$.
بما أن $v \leq k\bar{k}$ (من الفقرة (أ)) فإن: $4v \leq 4k\bar{k}$.
إذا) لإثبات المطلوب، يكفي أن نثبت أن:
$4k\bar{k} \leq (k+\bar{k})^2$، وهذا طبعا متحقق،
إذ أن: $(k+\bar{k})^2 - 4k\bar{k} = k^2 + \bar{k}^2 - 2k\bar{k} = (k-\bar{k})^2 \geq 0$.

(2) لتكن كثيرة الحدود:
$$P(k) = k^7 - 4k^6 + 3k^5 - 2k^4 + 3k^3 - k^2$$
لنفرض بالتناقض أن $P(k)$ كثيرة حدود لونية،
ولتكن G رسما يحتمل $P(k)$.
إذا) G له بالضبط مركبتان و $e(G)=4$ و $v(G)=7$.

إذا) $e(G)=4$، $v(G)-2 = 7-2 = 5$
ومنه فإن $e(G) < v(G) - k$ حيث k هو عدد
مركبات الرسم G، وهذا يتناقض مع
الفقرة (2) من السؤال (1) .

/السؤال الثاني/ :

(1/ ليكن G رسماً مستوياً، عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e، وطول أقصر دورة فيه يساوي k، حيث $k\geq 3$ ،

(أ) يمكن إثبات المطلوب بتعديل بسيط في برهان النتيجة (4،2) (الصفحة 88)، وذلك كما يلي:
نأخذ نفس الرسم $H=(X,Y,E')$.
لكل وجه y لدينا: $\deg_H(y)\geq k$ و لكل ضلع x لدينا: $\deg_H x\leq 2$. إذاً، $|E'|=\sum_{i=1}^{e}\deg(x_i)=\sum_{j=1}^{f}\deg(y_j)$ ،
وعليه، $2e\geq |E'|\geq kf$.
بما أن G رسم مستوٍ ومترابط، فمن صيغة أويلر لدينا: $v-e+f=2$ ومنه، $kv-ke+kf=2k$ ،
وبالتالي فإن: $2k\leq kv-ke+2e$
(لأن $kf\leq 2e$)
إذاً، $(k-2)e\leq k(v-2)$ ومنه $\boxed{e\leq \frac{k}{k-2}(v-2)}$

(ب) إذا كان G مترابطاً، فالمطلوب متحقق من (أ) .
- إذا كان G غير مترابط لنأخذ:
$G_1=(V_1,E_1),\ \dots,\ G_k=(V_k,E_k)$
مركبات G، حيث $k\geq 2$، ممثلة تمثيلاً مستوياً.
- لكل $1\leq i\leq k$: ليكن $v_i\in V_i$.
- ليكن الرسم $\tilde{G}=(V(G),E(\tilde{G}))$ حيث:

$$E(\tilde{G})=E(G)\sqcup\{v_iv_{i+1};\ 1\leq i<k\}$$

من الواضح أن التمثيل المستوي للرسم G، الذي أخذناه، يعطينا تمثيلاً مستوياً للرسم $\tilde{G}$.

إذاً الرسم $\tilde{G}$ هو رسم مستوٍ ومترابط وطول أقصر دورة فيه يساوي k وبالتالي ، فإنه من الفقرة (أ) ، لنا :

$e(\tilde{G}) \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$ ، وبالتالي فإن : $e(G) \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$

(لأن $e(G) \leq e(\tilde{G})$) ،

(ب) * الرسم $K_{3,3}$ مترابط ، عدد رؤوسه $v=6$ ، وعدد أضلاعه $e=9$ ، وطول أقصر دورة فيه هو $k=4$.

إذاً $\frac{k}{k-2}(v-2)=8$ ومنه ، فإن :

$e > \frac{k}{k-2}(v-2)$ ، وبالتالي فإن الرسم $K_{3,3}$ غير مستوٍ من الفقرة (أ) .

* رسم بيترسن هو رسم مترابط عدد رؤوسه $v=10$ ، عدد أضلاعه هو $e=15$ (أي مترابط من النوع 3) وطول أقصر دورة فيه هو $k=5$.

نستنتج : $\frac{k}{k-2}(v-2)=\frac{40}{3}$ ، فإن :

$e > \frac{k}{k-2}(v-2)$ ، وبالتالي فإن رسم بيترسن غير مستوٍ من الفقرة (أ) .

(2) ليكن H رسما مستويا لا يحتوي على مثلثات، على رؤوسه p، حيث $p \geq 3$، وعلى أضلاعه m.

(1) - لنفرض أولا أن H ليس به دورات.

إذا، H غابة وبالتالي، فإن $m = p - q$ حيث $q \geq 1$ هو عدد مركبات H (من الفقرة (ب) من (1) من السؤال الأول).

إذا، $(2p-4) - m = 2p - 4 - p + q = p + (q-4)$

ومنه، $(2p-4) - m \geq p - 3 \geq 0$ (لأن $q \geq 1$)،

وبالتالي فإن: $\boxed{m \leq 2p-4}$.

- لنفرض الآن أن H ليس غابة، وليكن k طول أقصر دورة في الرسم H.

لنا إذا، $k \geq 4$ (لأن H يخلو من مثلثات).

من الفقرة (ب) من (1) لنا إذا، $m \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$.

لكن الدالة f المعرفة على $(2, \infty)$ كما يلي:

$f(x) = \frac{x}{x-2}$، قابلة للاشتقاق في $(2, \infty)$،

وتحقق: $f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$،

لكل $x \in (2, \infty)$، وبالتالي فإن:

$f(k) \leq f(4) = 2$ لأن $k \geq 4$.

إذا، $m \leq f(k)(p-2) \leq 2(p-2)$

ومنه، $\boxed{m \leq 2p-4}$.

(ب) لنفرض بالتناقض أن وجدم وأن الرسم $\bar{H}$ رسم مستوٍ.

نعرف من النتيجة (4.2) (الصفحة 88) وتعميمها للرسوم المستوية على المترابطة) أنه إذا كان:

$e(\bar{H}) \geq 3$، فإن: $e(\bar{H}) \leq 3p - 6$

N.B لاحظ أنه يمكن إثبات ذلك من خلال السؤال (1).

- لكن، إذا كان $e(\bar{H}) < 3$ فإنه لنا أيضاً:

$e(\bar{H}) \leq 3p-6$ (لأن $3p-6 \geq 21$)

- إذاً لنا:

$$\begin{cases} e(H) \leq 2p-4 \\ e(\bar{H}) \leq 3p-6 \end{cases}$$

وبالتالي فإن: $e(H)+e(\bar{H}) \leq 5p-10$

وبما أن $e(H)+e(\bar{H}) = \binom{p}{2}$، فإن:

$\frac{p(p-1)}{2} \leq 5p-10$ ومنه:

$$\boxed{p^2-11p+20 \leq 0} \quad (*)$$

لنبحث عن جذور $f(x) = x^2-11x+20$

$D = 11^2-80 = 121-80 = 41 > 0$

لنا جذران حقيقيان: $x_1 = \frac{11-\sqrt{41}}{2}$, $x_2 = \frac{11+\sqrt{41}}{2}$

إذاً:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2-11x+20$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لكن، $x_2 = \frac{11+\sqrt{41}}{2} < \frac{11+7}{2} = 9$

وبالتالي، فإن: $x^2 - 11x + 20 > 0$

لكل عدد حقيقي $x \in [9, \infty)$، وبالتالي:

فإن: $p^2 - 11p + 20 > 0$ (لأن $p \geq 9$)

وهذا يتناقض مع المتباينة (*).

السؤال الثالث:

(1) (أ) المطلوب إثبات خصوصيات المبرهنة (1.10)
(بالصفحة 31)

(ب) نستخدم الاستقراء الرياضي على n.

- إذا كان n=2، فإن:
$S(n,2) = S(2,2) = 1$ وبما أن $2^{2-1} - 1 = 1$، فإن التقرير $P(2)$
صادق حيث $P(k)$ هو: "$S(k,2) = 2^{k-1} - 1$"

- لنفرض أن $P(k)$ صادق، حيث $k \geq 2$.
من السؤال (أ)، لنا:
$$S(k+1, 2) = S(k, 1) + 2S(k, 2)$$
من فرضية الاستقراء نعرف أن: $S(k,2) = 2^{k-1} - 1$،
ومن ناحية أخرى، لنا: $S(k,1) = 1$.
إذاً، $S(k+1, 2) = 1 + 2(2^{k-1} - 1) = 2^k - 1$
وبالتالي فإن $P(k+1)$ صادق.

(2) نعتبر أن لدينا صندوق يحوي $7n$ كرة،
حيث $5n$ كرة من اللون الأبيض و $2n$ كرة
من اللون الأحمر.
ليكن N عدد طرق اختيار كرتين من الصندوق.

- بما أن عدد الكرات الجملي يساوي $7n$ فإن: $N = \binom{7n}{2}$
- من ناحية أخرى، عدد طرق الاختيار بحيث تكون الكرتان المختارتان من نفس اللون، هو N_1،
حيث $N_1 = \binom{5n}{2} + \binom{2n}{2}$
- وكذلك فإن عدد طرق الاختيار بحيث تكون الكرتان المختارتان مختلفتي اللون هو N_2،
حيث $N_2 = \binom{5n}{1} \times \binom{2n}{1} = 10n^2$

- بما أن $N = N_1 + N_2$ فإن:

$$\binom{7n}{2} = \binom{5n}{2} + \binom{2n}{2} + 10n^2$$

(3) ليكن N هو العدد المطلوب، أي N يساوي عدد الحلول الصحيحة للمعادلة:
$x_1 + x_2 + x_3 = 19$. حيث: $0 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 5,\ 0 \le x_3 \le 7$

- إذا كان (x_1, x_2, x_3) حلا للمسألة فإن:
$0 \le x_1 \le 3 \quad , \quad 0 \le x_2 \le 5, \quad 0 \le x_3 \le 7$
وبالتالي فإن: $0 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 3 + 5 + 7$
ومنه، $0 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 15$
وهذا يتناقض مع كون: $x_1 + x_2 + x_3 = 19$

إذا العدد المطلوب N يساوي: "0".

(4) لتكن المجموعة: $A = \{1, 2, \ldots, 4n\}$
حيث $n \ge 1$ عدد صحيح.

أ) ليكن N هو عدد طرق تجزئة A إلى n مجموعة تتكون كل منها من 4 عناصر.

- من السهل أن نرى أن :

$$N = \frac{1}{n!}\binom{4n}{\underbrace{4,4,\dots,4}_{n \text{ من المرات}}} = \frac{1}{n!}\,\frac{(4n)!}{(4!)^n}$$

إذاً العدد N المطلوب هو:

$$\boxed{N = \frac{(4n)!}{(n!)\,(24)^n}}$$

ب) ليكن N هو عدد التباديل f للمجموعة A بحيث: $f(\{n,4n\}) = \{n,4n\}$ ، $f(1) = 2n$ ، $f(2n) = 1$ ، و f تترك بالضبط $2n$ عنصرا في أماكنها الطبيعية.

- من الواضح أن $N = N_1 + N_2$ حيث :

* N_1 يساوي عدد التباديل f للمجموعة A بحيث: $f(n) = n$ ، $f(4n) = 4n$ ، $f(1) = 2n$ ، $f(2n) = 1$ و f تترك بالضبط $2n$ عنصرا في أماكنها الطبيعية.

* N_2 يساوي عدد التباديل f للمجموعة A بحيث: $f(n) = 4n$ ، $f(4n) = n$ ، $f(1) = 2n$ ، $f(2n) = 1$ و f تترك بالضبط $2n$ عنصرا في أماكنها الطبيعية.

- يمكن أن نرى أن :

$$N_1 = \binom{4n-4}{2n-2} d_{2n-2}$$

وأن:

$$N_2 = \binom{4n-4}{2n} d_{2n-4}$$

ـ إذا

$$\boxed{N = \binom{4n-4}{2n-2} d_{2n-2} + \binom{4n-4}{2n} d_{2n-4}}$$

السؤال الرابع

(1) ليكن a_r هو العدد المطلوب.

الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r) هي:

$$g(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 \times \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3$$

إذا:

$$g(x) = (e^x - 1)^2 (e^x)^3$$

$$= (e^{2x} - 2e^x + 1) e^{3x}$$

$$= e^{5x} - 2e^{4x} + e^{3x}.$$

ـ من الواضح إذا أن معامل x^r في مفكوك $g(x)$

يساوي:

$$\frac{5^r}{r!} - 2 \times \frac{4^r}{r!} + \frac{3^r}{r!}$$

إذا العدد a_r المطلوب هو:

$$\boxed{a_r = 5^r - 2 \times 4^r + 3^r}$$

(2) (أ) الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_n) حيث

$a_n = 4^n$ لكل $n \geq 0$ هي:

$$g_1(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} 4^n x^n = \frac{1}{1-4x}$$

(ب) لتكن المتتالية (b_n) حيث $b_n = n^2 4^n$ لكل $(n \geq 0)$

والمتتالية (c_n) حيث $c_n = n 4^n$ لكل $n \geq 0$.

لنا إذاً

$$\begin{cases} c_n = n a_n \\ b_n = n c_n \end{cases}$$

- وإذاً الدالة المولدة العادية للمتتالية (c_n) هي:

$$g_2(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n = x g_1'(x)$$

وبالتالي لدينا:

$$g_2(x) = x \left(\frac{4}{(1-4x)^2} \right) = \frac{4x}{(1-4x)^2}$$

- وبما أن $b_n = n c_n$، فإننا أيضاً

الدالة المولدة العادية للمتتالية (b_n) هي:

$$g_3(x) = x g_2'(x) = x \left(\frac{4x}{(1-4x)^2} \right)'$$

$$= x \left(\frac{4(1-4x)^2 - 2(-4)(1-4x) 4x}{(1-4x)^4} \right)$$

إذن

$$g_3(x) = \frac{x(1-4x)\left[4(1-4x)+8\times 4x\right]}{(1-4x)^4}$$

$$\boxed{g_3(x) = \frac{x(4+16x)}{(1-4x)^3}}$$

إذن الدالة المولدة المطلوبة هي :

$$\boxed{g_3(x) = \frac{4x+16x^2}{(1-4x)^3}}$$

(2) بما أن $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ فإن الدالة المولدة العادية للمتتالية (S_n) هي :

$$g_4(x) = \frac{g_3(x)}{1-x}$$

إذن الدالة المولدة المطلوبة هي :

$$\boxed{g_4(x) = \frac{4x+16x^2}{(1-x)(1-4x)^3}}$$

(3) لتكن $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ هي الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_n) المعطاة في المسألة ؛

لدينا إذاً

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= 1+\sum_{n\geq 1}\left(4a_{n-1}+3\cdot 2^n\right)x^n$$

$$= 1+4x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + 3\sum_{n\geq 1}(2x)^n$$

$$= 1+4x f(x)+3\left(\frac{1}{1-2x}-1\right)$$

إذاً :

$$(1-4x)f(x)=1+3\left(\frac{1-1+2x}{1-2x}\right)$$

إذاً ،

$$(1-4x)f(x)=\frac{1-2x+6x}{1-2x}=\frac{1+4x}{1-2x}.$$

إذاً ،

$$\boxed{f(x)=\frac{1+4x}{(1-2x)(1-4x)}}$$

نبحث عن عددين حقيقيين a و b بحيث

$$\frac{1+4x}{(1-2x)(1-4x)}=\frac{a}{1-2x}+\frac{b}{1-4x}.$$

• بالضرب في $(1-2x)$ ثم اختيار $x=\frac{1}{2}$ نحصل على :

$$a=\frac{1+4\times\frac{1}{2}}{1-4\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{-1}=-3$$

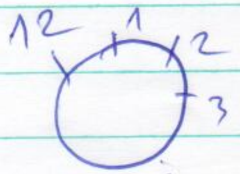
• بالضرب في $(1-4x)$ ثم باختيار $x=\frac{1}{4}$، نحصل على:

$$b = \frac{1+4\times\frac{1}{4}}{1-2\times\frac{1}{4}} = 4$$

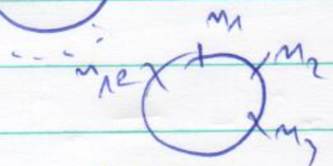
إذا،
$$f(x) = \frac{-3}{1-2x} + \frac{4}{1-4x}$$
$$= -3\left(\sum_{n\geq 0} 2^n x^n\right) + 4\left(\sum_{n\geq 0} 4^n x^n\right)$$

إذا،
$$\boxed{a_n = 4^{n+1} - 3\cdot 2^n}$$

(4) لنشكل الدور C_{12} كالتالي:



وليكن توزيع الأعداد كما يلي:



(أي العدد الموضوع على الرأس i هو n_i)

حيث $\{n_i : 1\leq i\leq 12\} = \{1,2,\dots,12\}$

- نعتبر أن لدينا $n = 1+2+\dots+12 = 78$ من الكرات
(الكرة ترمز للعدد "1")

وأنه قد تم توزيعها على $m=4$ من الصناديق:

• الصندوق S_1، يمثل الرؤوس 1,2,3
• الصندوق S_2، يمثل الرؤوس 4,5,6
• الصندوق S_3، يمثل الرؤوس 7,8,9
• الصندوق S_4، يمثل الرؤوس 10,11,12،

- من مبدأ برج الحمام، يوجد صندوق يحتوي على الأقل على $N = \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + 1 = 20$ من الكرات، وبالتالي توجد 3 رؤوس متتالية مجموع محتوياتها أكبر من أو يساوي 20.