Email: malderiny@ksu.edu.sa

المحاضرة الخامسة

ثانيا : تحليل التغاير Analysis of Covariance

الغرض من تحليل التغاير

دراسة وتحليل أثر متغيرات كمية ووصفية على متغير تابع كمي، كما يمكن تحقيق مجموعة من الأهداف الأخرى وهي:

- دراسة تأثير المتغير الوصفي بعد إزالة أثر المتغير الكمي
- اختبار توازي خطوط الانحدار الممثلة لمستويات المتغير المستقل الوصفي.
- اختبار تطابق خطوط الانحدار الممثلة لمستويات المتغير المستقل الوصفي.

نموذج تحليل التباين :

بفرض أن:

Y : يمثل المتغير التابع، $X_1, X_2, ..., X_p$: المتغيرات المستقلة الكمية، F المتغير المستقل الوصفي ومستوياته هي $F : F_1, F_2, ..., F_f$ ، ومن ثم يعبر عنه بـ $D_1, D_2, ..., D_{f-1}$ ،

$$D_j = \begin{cases} 1 \ if \ individual \in F_j \\ 0 \ otherwise \end{cases}$$

أي أن:

مجموعات المتغير الوصفي F	المتغيرات الصورية			
	D_1	D_2	…	D_{f-1}
F_1	1	0	…	0
F_2	0	1	…	0
. . .	. . .	. . .	…	.
F_a	0	0	…	0

يمكن كتابة نموذج تحليل التغاير كما يلي:

Email: malderiny@ksu.edu.sa

$$Y = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p}_{\text{متغيرات مستقلة كمية}} + \underbrace{\alpha_1 D_1 + \ldots + \alpha_{f-1} D_{f-1}}_{\text{متغيرات صورية}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{f-1} \theta_{ij} X_i D_j}_{\text{متغيرات التفاعل}} + \varepsilon$$

ومن ثم يتم اختبار التوازي والتطابق:

أولا: اختبار فرض توازي خطوط الانحدار

لكي تكون الخطوط متوازية وهي:

$$F_1: \begin{Bmatrix} D_1 = 1, \\ Other\ D = 0 \end{Bmatrix}: \quad Y_1 = (\beta_0 + \alpha_1) + (\beta_1 + \theta_{11})X_1 + (\beta_2 + \theta_{21})X_2 + \ldots + (\beta_p + \theta_{p1})X_p + \varepsilon$$

$$F_2: \begin{Bmatrix} D_2 = 1, \\ Other\ D = 0 \end{Bmatrix}: \quad Y_2 = (\beta_0 + \alpha_2) + (\beta_1 + \theta_{12})X_1 + (\beta_2 + \theta_{22})X_2 + \ldots + (\beta_p + \theta_{p2})X_p + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$F_{f-1}: \begin{Bmatrix} D_{f-1} = 1, \\ Other\ D = 0 \end{Bmatrix}: \quad Y_{f-1} = (\beta_0 + \alpha_{f-1}) + (\beta_1 + \theta_{1f-1})X_1 + (\beta_2 + \theta_{2f-1})X_2 + \ldots + (\beta_p + \theta_{pf-1})X_p + \varepsilon$$

$$F_f: \{all\ \ D = 0\}: \quad Y_f = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

يجب اختبار أن معاملا التفاعل جميعها صفرا، حيث يأخذ الفرض العدم الصورة التالية:

الفرض العدم: خطوط الانحدار كلها متوازية: $H_0: \theta_{11} = \theta_{21} = \ldots = \theta_{p,f-1} = 0$

ضد

الفرض البديل: ليست كل خطوط الانحدار متوازية. $H_1: At\ \ least\ \ one\ \ of\ \ \theta_{ij} \neq 0$

ومن ثم تحسب إحصائية الاختبار F^* بالمعادلة التالية:

$$F^* = \frac{\left(R^2_{(X,\ F,\ X*F)} - R^2_{(X,\ F)}\right)/(number\ of\ interactions)}{\left(1 - R^2_{(X,F,X*F)}\right)/(df_{errors_{(X,\ F,\ X*F)}})}$$

Email: malderiny@ksu.edu.sa

حيث أن

$R^2_{(X,\ F,\ X*F)}$: يعبر عن معامل التحديد، في النموذج الذي يشمل جميع المتغيرات (Interactions ، Dummy Variables ، Covariates)

$R^2_{(X\ ,\ F)}$: يعبر عن معامل التحديد، في النموذج الذي يشمل جميع المتغيرات بدون التفاعل (Dummy Variables ، Covariates)

$df_{errors_{(X,\ F,\ X*F}}$: درجات حرية الخطأ في النموذج الكامل (Dummy ، Covariates Interactions ، Variables) .

وبحساب المعنوية المحسوبة لاختبار فرض التوازي $ASig.(X*F)$، يتم مقارنتها بمستوى المعنوية α ، ومن ثم اتخاذ القرار.

ثانيا: اختبار فرض تطابق خطوط الانحدار.

لكي تكون الخطوط متطابقة يجب أولا التحقق إحصائيا من أنها متوازية، ويعني ذلك أن التفاعل ليس له أثر معنوي ، ومن ثم يتم تخفيض النموذج إلى الصورة التالية

$$Y = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p}_{\text{متغيرات مستقلة كمية}} + \underbrace{\alpha_1 D_1 + \ldots + \alpha_{f-1} D_{f-1}}_{\text{متغيرات صورية}} + \varepsilon$$

ولكي تكون الخطوط التالية

$$F_1: \begin{Bmatrix} D_1 = 1, \\ Other\ D = 0 \end{Bmatrix}: \quad Y_1 = (\beta_0 + \alpha_1) + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

$$F_2: \begin{Bmatrix} D_2 = 1, \\ Other\ D = 0 \end{Bmatrix}: \quad Y_2 = (\beta_0 + \alpha_2) + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$F_{f-1}: \begin{Bmatrix} D_{f-1} = 1, \\ Other\ D = 0 \end{Bmatrix}: \quad Y_{f-1} = (\beta_0 + \alpha_{f-1}) + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

$$F_f: \{all\ D = 0\}: \quad Y_f = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

Email: malderiny@ksu.edu.sa

متطابقة يجب أن تتساوى القواطع، ولا يتحقق ذلك إلا إذا كانت معاملا المتغيرات الصورية جميعها صفرا، حيث يأخذ الفرض العدم الصورة التالية:

الفرض العدم: خطوط الانحدار كلها متطابقة: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \theta_{f-1} = 0$

ضد

الفرض البديل: ليست كل خطوط الانحدار كلها متطابقة: $H_1 : At \ \ least \ \ one \ \ of \ \ \alpha_j \neq 0$

إحصائة الاختبار هي:

$$F^* = \frac{\left(R^2_{(X,F)} - R^2_{(X)}\right)/(number\ of\ Dummy\ variables)}{\left(1 - R^2_{(X,F)}\right)/(df_{errors_{(X,F)}})}$$

حيث أن $R^2_{(X)}$ يعبر عن معامل التحديد، في النموذج الذي يشمل متغيرات التغاير فقط (Covariates variables)

وبحساب المعنوية المحسوبة لاختبار فرض التطابق $Sig.(F)$، يتم مقارنتها بمستوى المعنوية α ، ومن ثم اتخاذ القرار.

تطبيق (2): لدراسة تأثير الدخل العائلي X_1 ، عدد أفراد الأسرة X_2 والجنسية (سعودي، غير سعودي) على الإنفاق Y داخل مدينة الرياض تم اختيار 30 أسرة وتم الحصول على الآتي:

No	Y	X1	X2	National
1	2.6	5.5	2	Non Suadi
2	2.5	5.7	2	Non Suadi
3	2.4	4.9	2	Non Suadi
4	3	6.6	3	Saudi
5	2.5	4.6	3	Saudi
6	3	7.3	3	Non Suadi
7	2.5	6.1	4	Saudi
8	2.6	6.4	4	Non Suadi
9	1.5	3.6	4	Non Suadi
10	2.6	5.7	4	Non Suadi
11	3.5	7.2	4	Saudi
12	2.6	4.8	5	Non Suadi
13	2.7	5.1	5	Non Suadi
14	2.8	6.5	5	Non Suadi
15	2.8	6.4	5	Non Suadi

No	Y	X1	X2	National
16	3.6	4.6	5	Saudi
17	3.3	6.1	5	Saudi
18	3.3	3.4	5	Saudi
19	3.6	5.5	5	Saudi
20	3.1	7.4	5	Non Suadi
21	2.4	2.8	6	Saudi
22	3.6	4.2	6	Saudi
23	3.8	7.1	6	Saudi
24	3.3	4.3	6	Non Suadi
25	3.3	3.4	6	Saudi
26	3	6.4	7	Non Suadi
27	3.5	5.1	7	Saudi
28	3.6	5	7	Saudi
29	3.1	2.4	7	Non Suadi
30	3.7	6.8	8	Saudi

Email: malderiny@ksu.edu.sa

والمطلوب:

1- كتابة نموذج تحليل التغاير الذي يمثل هذه البيانات.
2- اختبار فرض توازي خطي انحدار الإنفاق للجنسيتين عند مستوى دلالة 5%.
3- اختبار فرض التطابق إذا كان التحليل مناسب لذلك عند مستوى دلالة 5%.

حل تطبيق (2):

يلاحظ أن الجنسية متغير وصفي مكون من مجموعتين، لذا يكون عدد المتغيرات الصورية متغير واحد هو: $D_1 = \begin{cases} 1 & if \quad family \quad is \quad saudi \\ 0 & if \quad family \quad is \quad Non \quad saudi \end{cases}$

1- كتابة نموذج تحليل التغاير الذي يمثل البيانات.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 D + \beta_4 X_1 D + \beta_5 X_2 D + \varepsilon$$

2- اختبار فرض توازي خطي انحدار الإنفاق للجنسيتين عند مستوى دلالة 5%.

من البيانات أعلاه يتم الحصول على معاملات التحديد للنماذج التالية: EXCEL:

رقم	عدد المتغيرات المستقلة	النموذج	معامل التحديد من نتائج Excel
(1)	5	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 D + \beta_4 X_1 D + \beta_5 X_2 D + \varepsilon$	$R^2_{(X,D,X*D)} = 0.598$
(2)	3	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 D + \varepsilon$	$R^2_{(X,D,)} = 0.595$
(3)	2	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$	$R^2_{(X)} = 0.420$

خطوات اختبار التوازي:

- الفرض العدم : خطوط الانحدار كلها متوازية.: $H_0: \beta_4 = \beta_5 = 0$
- الفرض البديل: ليست كل خطوط الانحدار متوازية $H_0: at\ least\ one\ of\ (\beta_4\ , \beta_5 \neq 0)$.
- إحصائية الاختبار:

$$F^* = \frac{\left(R^2_{(X,\ F,\ X*F)} - R^2_{(X,\ F)}\right)/(number\ of\ interactions)}{\left(1 - R^2_{(X,F,X*F)}\right)/\left(df_{errors_{(X,\ F,\ X*F)}}\right)}$$

Email: malderiny@ksu.edu.sa

$$F^* = \frac{(0.598 - 0.595)/(2)}{(1 - 0.598)/(24)} = \frac{(0.003)/(2)}{(0.402)/(24)} = 0.094$$

- المعنوية : $Sig. = 0.911$ أكبر من مستوى معنوية 5% لذا نقبل الفرض العدم، ونرفض الفرض البديل، أي أن خطي انحدار الإنفاق متوازيين.

3- اختبار فرض تطابق خطي انحدار الإنفاق للجنسيتين عند مستوى دلالة 5%.

بما أن خطي الانحدار متوازيين، لذا يمكن اختبار التطابق.

خطوات اختبار التطابق:

- الفرض العدم: خطوط الانحدار كلها متطابقة.
- الفرض البديل: ليست كل خطوط الانحدار متوازية.
- إحصائة الاختبار هي:

$$F^* = \frac{\left(R^2_{(X,F)} - R^2_{(X)}\right)/(number\ of\ Dummy\ variables)}{\left(1 - R^2_{(X,F)}\right)/(df_{errors_{(X,F)}})}$$

$$F^* = \frac{(0.595 - 0.420)/(1)}{(1 - 0.595)/(26)} = \frac{(0.175)/(1)}{(0.405)/(26)} = 10.37$$

- المعنوية هي: $Sig. = 0.0005$
- القرار: رفض الفرض العدم لأن المعنوية المحسوبة $Sig. = 0.0005$ أقل من مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$، ويستدل من ذلك على أن خطي الإنفاق للجنسيتين غير متطابقين.