بسم الله الرحمن الرحيم

٣٨٤ ن ض :- التحليل الحقيقي II

محتوى المقرر :-

I - تكامل ريمان

1- قابلية التكامل بمفهوم ريمان.

2- نظرية داربو ومجاميع ريمان.

3- الخواص الأساسية لتكامل ريمان.

4- النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.

II - متتاليات ومتسلسلات الدوال.

1- متتاليات الدوال

2- التقارب المنتظم لمتتاليات الدوال وخواصه

3- متسلسلات الدوال.

III - قياس ليبيق

1- الجبر وجبر سيغما

2- قياس ليبيق

3- الدوال القابلة للقياس.

IV - تكامل ليبيق

1- تعريف تكامل ليبيق

2- تكامل ليبيق والتقارب النقطي.

3- مقارنة بين مفهومي ريمان وليبيق للتكامل.

المتطلب :- ٢٨٢ ريض (أو ما يعادله)

الخلفية العلمية المطلوبة :-

١٠٢ ريض ، ٢٠١ ريض ، ٢٠٢ ريض ، ٢٨٢ ريض

بالإضافة إلى بعض المفاهيم من الجبر والتبولوجيا.

المراجع :-

مبادئ التحليل الحقيقي - الجزء الثاني

الطبعة الثانية ١٤٢٩ هـ .

تأليف :- د. صالح السنوسي.

د. محمد القويز.

I- تكامل ريمان :

1-1- قابلية التكامل بمفهوم ريمان :

لتكن $[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة من $\mathbb{R}$ ولتكن f دالة حقيقية معرفة ومحدودة على $[a,b]$.

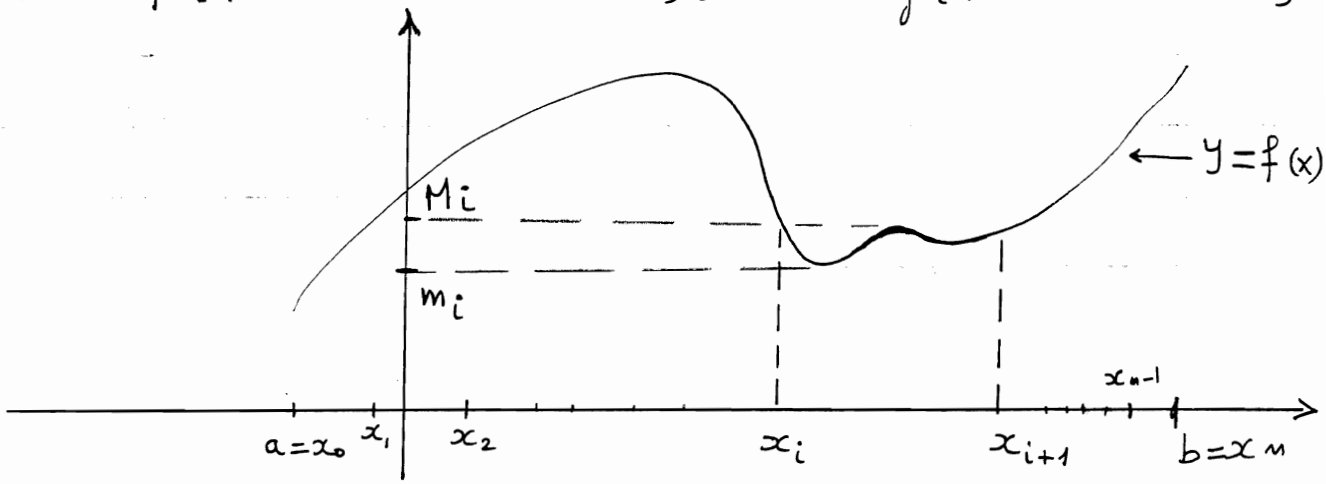
تعريف 1-1 :

المجموعة المنتهية والمرتبة $P=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تسمى تجزيئا للفترة $[a,b]$ إذا كان

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

لكل $i = 0, 1, \dots, n-1$ نضع

$$M_i = \sup\{f(x), x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ و } m_i = \inf\{f(x), x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$



تعريف 1-2 :

نعرف المجموع العلوي $U(f,P)$ و المجموع السفلي $L(f,P)$ للدالة f بالنسبة للتجزيء P على الشكل :

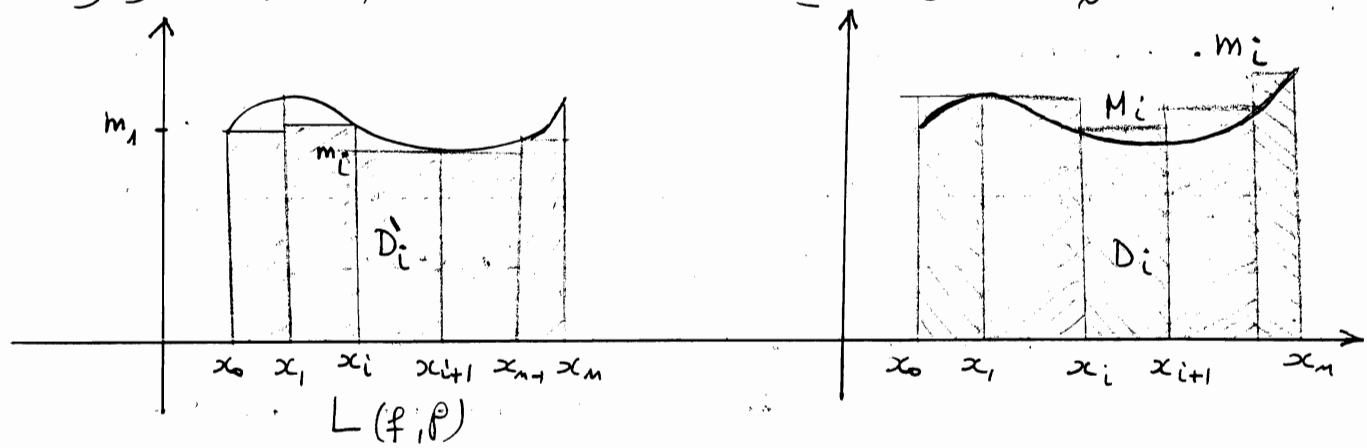
$$U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(x_{i+1} - x_i)$$

$$L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,(x_{i+1} - x_i).$$

ولدينا دوما $L(f,P) \leq U(f,P)$.

لاحظ أنه إذا كانت f موجبة على $[a,b]$ فإن $U(f,P)$

تمثل مجموع مساحات المستطيلات D_i حيث قاعدة D_i هي $[x_i, x_{i+1}]$ وارتفاعه الطول M_i. بالمثل $L(f,P)$ هو مساحة إتحاد المستطيلات D'_i حيث قاعدة D'_i هي $[x_i, x_{i+1}]$ وارتفاعه m_i



تعريف 3-1:

نقول إن التجزئ Q أدق من التجزئ P ونرمز لذلك بالرمز $Q \supset P$ إذا كانت المجموعة P محتواة في Q.

مثلا $P \cup Q$ عبارة عن تجزئ جديد أدق من كل من P و Q

إذا كان التجزئ Q أدق من P فإن:

$$L(f,Q) \geq L(f,P) \quad \text{و} \quad U(f,Q) \leq U(f,P)$$

أي أن تدقيق التجزئ ينقص المجاميع العلوية ويزيد السفلية.

تمهيدية 4-1:

لكل تجزيئين P و Q لدينا: $L(f,P) \leq U(f,Q)$.

لنرمز بـ $\mathcal{P}(a,b)$ لمجموعة كل التجزيئات P للفترة $[a,b]$ و لنضع $A = \{U(f,P),\ P \in \mathcal{P}(a,b)\}$ و $B = \{L(f,P),\ P \in \mathcal{P}(a,b)\}$

ولنلاحظ أن $\operatorname{Inf} A$ و $\operatorname{Sup} B$ موجودتان في $\mathbb{R}$.

تعريف 5-1:

لنعرف تكامل f العلوي على $[a,b]$ بالشكل:

$$U(f) = \operatorname{Inf} A = \inf \{ U(f,P) ,\ P \in \mathcal{P}(a,b) \}$$

ولنعرف تكامل f السفلي على $[a,b]$ بالشكل:

$$L(f) = \sup B = \sup \{ L(f,P) ,\ P \in \mathcal{P}(a,b) \}$$

ولدينا:

$$L(f) \leq U(f)$$

تعريف 6-1:

لتكن f دالة محدودة على $[a,b]$ ، ($f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$).

إذا تحققت المساواة $L(f) = U(f)$ فإننا نقول إن f قابلة لتكامل ريمان على $[a,b]$ ونرمز لقيمة هذا التكامل بالرمز: $I(f)$ أو $\int_a^b f$

ونسميها تكامل ريمان لـ f على $[a,b]$.

غالبا نكتب:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

لاحظ أن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy .$$

نرمز لمجموعة الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان بالرمز $\mathcal{R}(a,b)$.

ولما يكون التكامل الريماني $\int_a^b f(x)\,dx$ معرفا فإننا نكتب $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

مثال 7-1:

إذا كانت $f(x) = c$ دالة ثابتة معرفة على الفترة $[a,b]$ فإننا نختار تجزيئا للفترة بالشكل $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ وعندها يكون $M_i = m_i = c$ ، $\forall i = 0,1,2,\ldots,n-1$

إذا حسبنا المجموع السفلي والمجموع العلوي نجد:

$$\mathcal{U}(f,P) = \mathcal{L}(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} c(x_{i+1} - x_i) = c(b-a)$$

ومنه نجد

$$\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f) = c(b-a)$$

أي أن $f \in \mathcal{R}(a,b)$ ولدينا $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

مثال 8-1:

لتكن f معرفة على الفترة $[a,b]$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [a,b] \end{cases}$$

إذا كانت $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزيئا كيفيا للفترة $[a,b]$

فمن كثافة كل من $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ في $\mathbb{R}$ نجد:

الكثافة تضمن أن كل [illegible] عناصرض [illegible]

$$m_i = 0 \quad , \quad M_i = 1 \quad , \quad \forall\, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ومنه نجد

$$\mathcal{U}(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} 1\,(x_{i+1} - x_i) = b-a$$

$$\mathcal{L}(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} 0\,(x_{i+1} - x_i) = 0$$

لذا فإن

$$\mathcal{L}(f) = 0 \neq b-a = \mathcal{U}(f)$$

و $f \notin \mathcal{R}(a,b)$.

نظرية 9-1: (شرط ريمان للتكامل)

القضيتان التاليتان متكافئتان:

1) $f \in \mathcal{R}(a,b)$

2) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $P \in \mathcal{P}(a,b)$ حيث $\mathcal{U}(f,P) - \mathcal{L}(f,P) < \varepsilon$.

برهان:

(1) $\Leftarrow$ (2): ليكن $\varepsilon > 0$ معطى. من تعريف $\mathcal{U}(f)$ و $\mathcal{L}(f)$ يوجد تجزيئان P_1 و P_2 بحيث:

$$\mathcal{U}(f, P_1) < \mathcal{U}(f) + \varepsilon/2 \quad , \quad \mathcal{L}(f, P_2) > \mathcal{L}(f) - \varepsilon/2.$$

لنضع $P = P_1 \cup P_2$ فإنه من الملاحظة التي تلي التعريف 3-1 لدينا:

$$\mathcal{U}(f, P_1) \geqslant \mathcal{U}(f, P) \quad \text{و} \quad L(f, P_2) \leqslant L(f, P).$$

من الفرض (أي $f \in \mathcal{R}(a,b)$) فإن $L(f) = \mathcal{U}(f)$ ومنه

$$\mathcal{U}(f,P) \leqslant \mathcal{U}(f,P_1) < \mathcal{U}(f) + \varepsilon/2 = L(f) + \varepsilon/2 < L(f,P_2) + \varepsilon \leqslant L(f,P) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U}(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

② ⇐ ① : ليكن $\varepsilon > 0$ معطى.

من الفرض، نختار تجزئ P يحقق

$$\mathcal{U}(f,P) < L(f,P) + \varepsilon$$

من تعريف $\mathcal{U}(f)$ و $L(f)$ نجد :

$$\mathcal{U}(f) \leqslant \mathcal{U}(f,P) < L(f,P) + \varepsilon \leqslant L(f) + \varepsilon.$$

الآن، ε اختياري وبالتالي

$$\mathcal{U}(f) \leqslant L(f).$$

من جهة أخرى نعلم أن $\mathcal{U}(f) \geqslant L(f)$ دوما.

ومنه $L(f) = \mathcal{U}(f)$، وهذا بالتعريف يعني أن $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

نتيجة 10-1 :

تكون الدالة f قابلة لتكامل ريمان على $[a,b]$، (أي $f \in \mathcal{R}(a,b)$) إذا وفقط إذا وجدت متتالية (P_n) من التجزيئات للفترة $[a,b]$ بحيث

$$\mathcal{U}(f,P_n) - L(f,P_n) \longrightarrow 0 \quad \text{و} \quad n \longrightarrow \infty.$$

وعندئذ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n).$$

برهان :

لتكن $f \in \mathcal{R}(a,b)$. بأخذ $\varepsilon = \frac{1}{n}$ فإن من شرط ريمان (النظرية 9-1) يوجد تجزئ P_n يحقق

$$0 \leqslant \mathcal{U}(f, P_n) - L(f, P_n) < \frac{1}{n} \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

فنستنتج أن $\mathcal{U}(f, P_n) - L(f, P_n) \longrightarrow 0$.

من جهة أخرى، إذا كانت (P_n) متتالية من التجزيئات التي تحقق

$$\mathcal{U}(f, P_n) - L(f, P_n) \longrightarrow 0$$

فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد N بحيث

$$\mathcal{U}(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon \quad , \forall n \geqslant N$$

فمن شرط ريمان فإن $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

الآن لدينا:

$$L(f, P_n) \leqslant L(f) = I(f) = \mathcal{U}(f) \leqslant \mathcal{U}(f, P_n) \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه:

$$0 \leqslant I(f) - L(f, P_n) \leqslant \mathcal{U}(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon \quad , \forall n \geqslant N.$$

وهذا يؤدي إلى المساواة:

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{U}(f, P_n).$$

مثال 11 ـ 1 :-

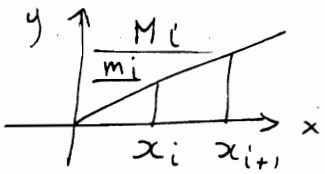
إذا كانت $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $f(x) = x$

فبين أن $f \in \mathcal{R}(a,b)$ واحسب $\int_a^b f(x)\,dx$.

الحل :-

لدينا $M_i = x_{i+1}$ و $m_i = x_i$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$

ومنه نجد :-



$$\mathcal{U}(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 .$$

لنختار التجزئ المنتظم لـ $[a,b]$ وعندها $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$

ومنه :- $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(f,P_n) - L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n-i} \frac{(b-a)^2}{n^2} = \frac{(b-a)^2}{n} \longrightarrow 0$$

ومنه النتيجة 10 ـ 1 نجد $f \in \mathcal{R}(a,b)$:-

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

تعريف 12 ـ 1 :

إذا كان $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تجزيئا لـ $[a,b]$ فإن مقياس P هو $\|P\| = \max\{x_{i+1} - x_i \text{ و } i = 0, 1, \ldots, n-1\}$

نظرية 13 ـ 1 :-

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ فإن $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

برهان :-

لتكن $\varepsilon > 0$ معطى . بما أن $[a,b]$ متراصة و f متصلة فإن f متصلة بإنتظام على $[a,b]$ ، أي يوجد $\delta > 0$ حيث

$$\forall x, x' \in [a,b] \; ; \; |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

لنختار التجزئ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ الذي يحقق $\|P\| < \delta$.

f متصلة على كل $[x_i , x_{i+1}]$ و بالتالي يوجد $u_i , v_i \in [x_i ; x_{i+1}]$

بحيث $i = 0, 1, \dots, n-1$ ، $m_i = f(u_i)$ و $M_i = f(v_i)$

$\|P\| < \delta \Leftarrow |u_i - v_i| < \delta$ ومن (*) نستنتج أن

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

و منه :

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon .$$

$\Leftarrow$ f تحقق شرط ريمان و بالتالي $f \in R(a,b)$.

ملاحظة 14-1 :

العكس غير صحيح ، فمثلا :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & , x = \frac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f \in R(a,b)$ مع $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ في حين أن f غير متصلة .

تمرين 15-1 :

بين أنه إذا كانت f مطّردة على $[a,b]$ فإن $f \in R(a,b)$.

تمارين :

المطلوب حل التمارين : (الفصل 1-1)

3 ، 5 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 و 11 .

نظرية 16-1 : (نظرية داربو)

لتكن f دالة محدودة على $[a,b]$. لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$

بحيث إذا كان P تجزيئا يحقق $\|P\| < \delta$ فإن

$$U(f,P) - U(f) < \varepsilon \quad \text{و} \quad L(f) - L(f,P) < \varepsilon$$

برهان :-

نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى . من تعريف $\mathcal{U}(f)$ يوجد تجزئ $P_0 = \{u_0, u_1, \dots, u_r\}$ حيث .

$$\mathcal{U}(f, P_0) < \mathcal{U}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

بما أن f محدودة فإنه يوجد $K > 0$ حيث $|f(x)| \leq K$ على $[a,b]$

فلنضع $\delta_1 = \varepsilon / 8rK$ و ليكن $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئ يحقق $\|P\| < \delta_1$.

بأخذ $P_1 = P \cup P_0$ فإن

$$\mathcal{U}(f, P) - \mathcal{U}(f, P_1) \leq 4Kr\|P\| < \varepsilon/2 .$$

ومنه $\mathcal{U}(f, P) - \mathcal{U}(f, P_0) < \varepsilon/2$

إذا $\mathcal{U}(f, P) - \mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(f, P) - \mathcal{U}(f, P_0) + \mathcal{U}(f, P_0) - \mathcal{U}(f) < \varepsilon$

بالمثل نبين أن $L(f) - L(f, P) < \varepsilon$ حيث $\|P\| < \delta_2$.

نحصل على المطلوب بوضع $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

تعريف 1-17 :

إذا كان $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزيئا لـ $[a,b]$ فإن $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ تسمى علامة على التجزئ P إذا كان $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$ لكل $i = 0, 1, \dots, n-1$.

المجموع

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i)$$

يسمى مجموع ريمان بالنسبة لـ P و α .

ولدينا : $L(f, P) \leq S(f, P, \alpha) \leq \mathcal{U}(f, P)$

لكل P و α .

نظرية 1-18 :

القضيتان التاليتان متكافئتان :

1) $f \in \mathcal{R}(a,b)$ وتكاملها يساوي I .

2) لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كان P تجزيئا يحقق $\|P\|<\delta$ و α علامة على P فإن

$$|S(f,P,\alpha)-I|<\varepsilon$$

أي أن $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S(f,P,\alpha)=I$ مهما كان إختيارنا لـ α.

برهان:

1 ⇐ 2 : ليكن $\varepsilon>0$ معطى. بما أن $I=U(f)=L(f)$

فمن النظرية 1-16 يوجد $\delta>0$ حيث إذا كان P تجزيئا يحقق $\|P\|<\delta$ فإن $U(f,P)-I<\varepsilon$ و $I-L(f,P)<\varepsilon$.

من جهة أخرى $L(f,P)\leq S(f,P,\alpha)<U(f,P)$

ومنه $|S(f,P,\alpha)-I|<\varepsilon$.

2 ⇐ 1 : ليكن $\varepsilon>0$ معطى وليكن $\delta>0$ حيث

$$\|P\|<\delta \Rightarrow |S(f,P,\alpha)-I|<\varepsilon/2$$

لكل α. ليكن P تجزيئا يحقق $\|P\|<\delta$، لدينا:

$$m_i>f(\alpha_i)-\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{و} \quad M_i<f(\beta_i)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\Leftarrow U(f)\leq U(f,P)<I+\varepsilon \quad \text{و} \quad L(f)\geq L(f,P)>I-\varepsilon$$

لنجعل $\varepsilon\to 0$ للحصول على

$$U(f)\leq I\leq L(f)$$

وهذا لا يقتضي إلا المساواة $L(f)=I=U(f)$.

نتيجة 1-19:

لتكن $f\in R(a,b)$. إذا كانت (P_n) متتالية من التجزيئات تحقق $\|P_n\|\to 0$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\alpha_n)$$

مهما كان إختيار العلامة α_n على P_n.

مثال 20-1:

أحسب النهاية $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$

الحل: لنعتبر الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ على $[0,1]$.

إذا إخترنا تجزيئا منتظما وعلامة معينة فإن:

$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$ و $x_i = \frac{i}{n}$ و $\alpha_i = x_i = \frac{i}{n}$

فعندها:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$$

لكن $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

وبالتالي: $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$

تمارين: (الفقرة 2-1 ص 27)

1، 2 (i)، 3 (i)، 5.

خواص تكامل ريمان 1-21 :-

1) $f_1, f_2 \in R(a,b)$ و $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ فإن $k_1 f_1 + k_2 f_2 \in R(a,b)$ ،

ولدينا

$$\int_a^b (k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 \int_a^b f_1 + k_2 \int_a^b f_2$$

2) $f, g \in R(a,b)$ و $f \geqslant g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.

بالخصوص $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$.

3) $f \in R(a,b)$ و $c \in (a,b)$ فإن :-

$$f \in R(a,b) \Leftrightarrow f \in R(a,c) \text{ و } f \in R(c,b)$$

مع

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

لدينا أن $\int_a^b f = -\int_b^a f$. ومنه :-

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$ لكل c من $\mathbb{R}$ (يمكن $c \notin (a,b)$)

4) إذا كانت $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ قابلة للتكامل على $[a,b]$

وكانت $\varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة فإن الدالة

$\varphi \circ f$ قابلة للتكامل على $[a,b]$.

5) $f \in R(a,b) \Rightarrow |f| \in R(a,b)$ ولدينا $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

العكس غير صحيح، أي قد تكون $|f| \in R(a,b)$ و $f \notin R(a,b)$.

مثلا :-

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & , x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

فإن $f \notin R(0,1)$ في حين أن $|f| = 1 \in R(0,1)$.

6) $f \in R(a,b)$ و $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^n \in R(a,b)$.

7) $f, g \in R(a,b)$ فإن $fg \in R(a,b)$ ،

8) نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :-

إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ فإنه يوجد $c \in (a,b)$

يحقق :-

$$\int_a^b f = f(c)(b-a) .$$

برهان 8:

f متصلة على $[a,b]$ فإن $f(u) = m \leq f(x) \leq M = f(v)$

حيث $u, v \in [a,b]$. بالمكاملة نجد

$$f(u) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(v)$$

نطبق نظرية القيم الوسطية فنجد:

$$\exists\, c \in [a,b] \quad \text{و} \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

تمارين 22-1:

4، 6، 8، 10.

التمرين (10) واجب منزلي.

نظرية 23-1:

لتكن $f \in R(a,b)$ ولنعرف الدالة المعرفة من خلال تكامل

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

عندئذ:

1) F متصلة على $[a,b]$.

2) إذا كانت f متصلة عند نقطة $c \in [a,b]$ فإن F قابلة للاشتقاق عند c و $F'(c) = f(c)$.

برهان:

1) f محدودة $|f(x)| \leq K$ ومنه $|F(y) - F(x)| \leq \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq K|y-x|$

$\Leftarrow$ F ليبشيتزية وبالتالي متصلة.

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \quad |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{x-c}\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{|x-c|}\int_c^x \varepsilon\,dt = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c).$$

نتيجة 24-1 :-

$f \in \mathcal{C}([a,b])$ و $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x \in [a,b]$ فإن

F قابلة للإشتقاق على $[a,b]$ و $F'(x) = f(x)$.

نظرية 25-1 :- (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)

إذا كان F دالة حيث $F' \in \mathcal{R}(a,b)$ فإن

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

برهان :

إذا كان $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزيئا لـ $[a,b]$ فإن

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right)$$

ومنه حسب نظرية القيمة المتوسطة للإشتقاق، لكل $i = 0, 1, \dots, n-1$

يوجد $\alpha_i \in (x_i, x_{i+1})$ حيث

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i)$$

فيكون

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i) = S(F', P, \alpha)$$

حيث $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ علامة على P.

إذا اخترنا متتالية (P_k) من التجزيئات حيث $\|P_k\| \to 0$ فإن

$$F(b) - F(a) = S(F', P_k, \alpha_k) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

وبما أن $F' \in \mathcal{R}(a,b)$ فإن $\lim_{k\to\infty} S(F', P_k, \alpha_k) = \int_a^b F'$ ومنه نجد

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx.$$

التكامل بالتعويض 26-1 :-

1) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق ومشتقتها متصلة. إذا كانت f متصلة على مدى φ فإن :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

2) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ متصلة و $\varphi'(t) \neq 0$ على $[a,b]$ و f متصلة على $I = \varphi([a,b])$ و $\psi = \varphi^{-1}$ فإن :-

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

التكامل بالتجزئ 27-1

f و g قابلتين للإشتقاق على $[a,b]$ و $f', g' \in R([a,b])$ فإن

$$\int_a^b f g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g$$

تمارين 28-1 :-

3 ، 6 ، 7 ، 9 .

مثال :- (التمرين 9) :-

$f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة و $f(x) \neq 0 \ , \ \forall x \in (0,\infty)$.

$$f^2(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ , \ \forall x > 0$$

بالإشتقاق ، نجد $2 f(x) f'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x)\,(2 f'(x) - 1) = 0$$

$$f(x) \neq 0 \Rightarrow 2 f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + C$$

لكن $f^2(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x \ ...$$

هنا لاحظ أن f قابلة للإشتقاق لم تعطى في التمرين

لكن لاحظ مع ذلك أن $f^2(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

وبما أن f متصلة فإن $\int_a^x f(t)dt$ قابلة للإشتقاق

ومنه f^2 أيضا وبالتالي f قابلة للإشتقاق.

التكاملات المختلة :-

في ما سبق فرضنا f محدودة و $[a,b]$ محدودة.

ماذا لو كانت أحداهما غير ذلك ؟

1) حالة الدالة الغير محدودة 29-1 :-

أ) $\int_{a^+}^b f(x)\,dx$:-

إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على $(a,b]$ و $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

فإن $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ يكون معتلا و يعرف بالنهاية :-

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة فإننا نقول إن التكامل المعتل $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ متقارب و قيمته تساوي قيمة هذه النهاية ، أي :-

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a^+}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx .$$

إذا كانت هذه النهاية غير موجودة فإننا نقول إن متباعد .

ب) $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$:-

بنفس الطريقة نعرف التكامل $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ من خلال النهاية :-

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{s \to b^-} \int_a^s f(x)\,dx .$$

ج) $\int_a^b f(x)\,dx$ حيث يوجد $c \in (a,b)$ و $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$:

إذا كانت f غير محدودة في جوار c فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ تكامل معتل . يقسم كما يلي :-

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c^-} f(x)\,dx + \int_{c^+}^{b} f(x)\,dx .$$

إذا كان كل من $\int_{c^+}^{b} f(x)\,dx$ و $\int_a^{c^-} f(x)\,dx$ متقارب فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ متقارب و قيمته تساوي مجموع القيمتين . أما إذا كان أحدهما متباعد فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ متباعد .

لاحظ أن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t_1 \to c^-} \int_a^{t_1} f(x)\,dx + \lim_{t_2 \to c^+} \int_{t_2}^{b} f(x)\,dx$$

القيمة التالية

$$PV\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left\{\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right\}$$

تسمى قيمة كوشي الرئيسية (أو القيمة الأساسية لكوشي).

ملاحظة :-

قد يكون التكامل متباعدا في حين أن قيمة كوشي الرئيسية موجودة. مثلا :- $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$ متباعد. لكن

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^3} = \left[\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon^2}-\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^3} = \left[\frac{1}{2x^2}\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\varepsilon^2}$$

وبالتالي $PV\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3} = 0$.

٤) حالة الفترة غير المحدودة 30-1 :-

أ) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$:-

نعرف هذا التكامل المعتل بواسطة النهاية :-

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^{M} f(x)\,dx$$

إذا وجدت هذه النهاية فإننا نقول إن التكامل متقارب وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية، أما إذا كانت غير موجودة فإننا نقول إنه متباعد.

ب) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$:-

بنفس الطريقة نعرف التكامل المعتل :-

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{m\to-\infty}\int_{m}^{b} f(x)\,dx .$$

ج) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$:-

ينقسم هذا التكامل بالشكل :-

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة متقارب فإننا نقول إن التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ متقارب وقيمته تساوي مجموع القيمتين. أما إذا كان أحدهما متباعد فهو أيضا متباعد.

حالة خاصة:

قد يكون $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ متباعدا في حين أن النهاية $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)dx$ موجودة.

تسمى القيمة $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)dx$ قيمة كوشي الأساسية ويرمز لها بالرمز:

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)\,dx.$$

فمثلا: $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx$

متباعد وذلك لأن $\int_{0}^{\infty} x^3 dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^M = \infty$

لكن

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx = \lim_{M\to\infty}\left\{\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-M}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^M\right\}$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{-\frac{M^4}{4} + \frac{M^4}{4}\right\} = 0.$$

نظرية 31-1: (اختبار المقارنة)

لتكن $f, g \in R(a,t)$ لكل $t > a$ حيث

$$|f(x)| \leq g(x) \quad , \quad \forall x \in [a,\infty).$$

إذا كان التكامل المحتمل $\int_a^{\infty} g(x)dx$ متقاربا فإن $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب.

نظرية 32-1: (شرط كوشي)

لتكن $f \in R(a,t)$ لكل $t > a$. فإن الشرطين التاليين متكافئين

1) للدالة f تكامل معتل على $[a, \infty)$، (أي متقارب).

2) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $M > 0$ بحيث

$$t, s \geq M \Rightarrow \left| \int_s^t f(x)\,dx \right| < \varepsilon .$$

تكاملات ريمان 1-33 :

1) لكل $-\infty < a < b < \infty$ - التكاملات المعتلة

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

تتقارب إذا وفقط إذا كان $\alpha < 1$.

2) لكل $a > 0$ التكامل المعتل :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

يكون متقارب إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$.

تكاملات برتراند 1-34 :

ليكن α و β عددين حقيقيين.

لكل $a > 0$ التكامل المعتل

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

يكون متقارب إذا وفقط إذا كان

إما $\alpha > 1$.

أو $\alpha = 1$ و $\beta > 1$.

نظرية 1-35 : (اختبار النهاية)

إذا كانت كل من f و g دالة متصلة وموجبة تماما على $[a, \infty)$ وكانت $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$ فإن التكاملين $\int_a^\infty f$ و $\int_a^\infty g$ متقاربين معا أو متباعدين معا.

ملاحظة : نفس النتيجة صالحة للحالات الأخرى : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f}{g} = L > 0$ لما $(-\infty, b]$ وعلى $[a, b)$ لما $\lim_{x \to b^-} \frac{f}{g} = L > 0$ و $(a, b]$ لما $\lim_{x \to a^+} \frac{f}{g} = L > 0$.

مثال 1-36

Exercise 1. Decide on the convergence or divergence of

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)}$$

Answer. First notice that the denominator is equal to 0 when x=1. Then the function inside the integral sign is unbounded at x=1. Hence we have two bad points 1 and ∞. So we must split the integral and write

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)} = \int_1^{2} \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)}$$

Let us first take care of the integral

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)}$$

We have

$$\frac{1}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)} \le \frac{1}{x\ln^2(x)},$$

$\ln^2 x \le \sqrt{\ln x} + \ln^2 x$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\ln x}+\ln^2 x} \le \frac{1}{\ln^2 x}$

Since (by Bertrand's test) the improper integral

برتراند

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x)}$$

is convergent, then by the comparison test the improper integral

مقارنة

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)}$$ is convergent.

Next we take care of the integral

$$\int_1^{2} \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)}$$

First notice that when $x \approx 1$, then

$$\frac{1}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$$

One may check this by showing that

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)}=1$$

On the other hand (and this is the crucial step in this exercise) is to find a polynomial approximation of $\ln(x)$ when $x \approx 1$. This will be done via Taylor polynomials. Indeed, we have

$$\ln(x) \sim \ln(1) + \ln'(1)(x-1) \quad + \cdots$$

when $x \approx 1$, which gives

$$\ln(x) \sim (x-1) \quad , \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

Hence we have

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

which implies

$$\frac{1}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

when $x \approx 1$. The p-test implies that the improper integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

is convergent. Therefore the limit test implies that the improper integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)}$$

is convergent. Putting the two integrals together, we conclude that the improper integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{\ln(x)}+\ln^2(x)\right)}$$

is convergent.

1-37 J Ho

Exercise 2. Decide on the convergence or divergence of

$$\int_1^{\pi/2} \frac{\tan(x)}{x^{3/2}} dx$$

$x^{3/2}$ zero

Answer. The term $x^{2/3}$ is never equal for $x \in [1, \pi/2]$. So let us focus on the term $\tan(x)$. According to the domain of the tangent function, the only bad points we have to worry about is $\pi/2$. Clearly we have

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\tan(x)}{x^{3/2}} = \infty$$

Hence we have an improper integral or Type I at the bad point $\pi/2$. Clearly we have

$$\frac{\tan(x)}{x^{3/2}} \sim \frac{\tan(x)}{(\pi/2)^{3/2}} \sim \frac{\sec(x)}{(\pi/2)^{3/2}} = \frac{1}{(\pi/2)^{3/2}\cos(x)}$$

when $x \approx \pi/2$. So let us approximate $\cos(x)$ when $x \approx \pi/2$. Again we will use Taylor polynomials, we have

$$\cos(x) \sim \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots$$

when $x \approx \pi/2$. This gives

$$\cos(x) \sim -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

when $x \approx \pi/2$. Putting the stuff together we get

$$\frac{\tan(x)}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{(\pi/2)^{3/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

The p-test implies that the improper integral

$$\int_1^{\pi/2} \frac{1}{(\pi/2)^{3/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$$

is divergent. Therefore the improper integral

$$\int_1^{\pi/2} \frac{\tan(x)}{x^{3/2}}dx$$

is divergent.

Exercise 3. Decide on the convergence or divergence of

مثال 1-38 ←

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(1/x)}{\sqrt{x}}dx$$

Answer. The only improper behavior is around ∞. Hence this integral is of Type II not of Type I. Therefore no need for splitting it. Note that when $x \approx \infty$, then $\frac{1}{x} \approx 0$. Hence

في جوار ∞

$$\frac{\sin^2(1/x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{(1/x)^2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

when $x \approx \infty$. The p-test implies that the improper integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2.5}}dx$$

is convergent. Therefore the limit test implies that the improper integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(1/x)}{\sqrt{x}}dx$$

is convergent.

Problems

Next you will find some not so easy problems on improper integrals. We invite you to solve them and submit the answer to SOS MATHematics. We will publish your answer with your name. Good luck.

Problem 1. First decide on the convergence and divergence of

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}dt$$

Then evaluate $f(x)$.

Problem 2. Assume that $f : [0,1] \to (-\infty, \infty)$ is continuous. Find $\lim_{x \to 0} I(x)$, where

$$I(x) = \int_0^1 \frac{x f(t)}{(x^2 + t^2)} dt$$

Problem 3. Consider the function

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt$$

Find $f(x)$.

Problem 4. Evaluate

$$\int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} + \ln(t) - \frac{1}{t} \right) dt$$

Problem 5. In this problem, we will evaluate

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

1

Evaluate

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n + 1/2)x}{2\sin(x/2)} dx \ , \quad n = 0, 1, \cdots$$

2

Let $f : [0, \pi] \to (-\infty, \infty)$ which C^1 function (that is f is differentiable and f' is continuous). Show that

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi f(x) \sin(n + 1/2)x dx = 0$$

3

Evaluate

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Problem 6. Decide on convergence or divergence of

$$\int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{x^\alpha}dx$$

where $x > 0$ and α is any real number.

Problem 7. Decide on convergence or divergence of

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x + \cos(x)}}dx$$

Problem 8. Decide on convergence or divergence of

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}dx$$

If I is convergent, evaluate it.

Problem 9. Find

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^1 e^{-x}\frac{\sin(ax)}{x}dx$$

II- متتاليات ومتسلسلات الدوال :

1- متتاليات الدوال :

إذا كان $D \subset \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

دوال حقيقية ، فإن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية دوال .

بأخذ قيم هذه الدوال عند $x \in D$ نجد متتالية من الأعداد الحقيقية $(f_n(x))_n$. إذا كانت هذه الأخيرة متقاربة فإن (f_n) متقاربة نقطيا ونهايتها النقطية هي الدالة f المعرفة ب :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

تعريف 1-2 :

نقول إن $(f_n)_n$ تتقارب نقطيا إلى f على D إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D, \exists N \in \mathbb{N}, (N = N(\varepsilon, x)), \forall n \geq N$$
$$\Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ونرمز لذلك بالرمز $\lim f_n = f$ أو $f_n \longrightarrow f$ على D .

مثال 2-2 :

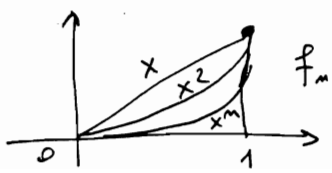
$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f_n(x) = x^n$$

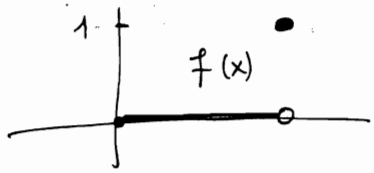
لكل $0 \leq x < 1$ لدينا $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

وبما أن $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$ فإن النهاية النقطية f تعطى ب :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 . \end{cases}$$

f_n متصلة لكل n ، لكن f ليست متصلة : $\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x)$





مثال 3-2 :

$f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ على $[0,1]$. لدينا :

$f_n(x) \longrightarrow 0$ على $x \in (0,1)$ و $f_n(0) = f_n(1) = 0$ لكل n فإن

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ , \ \forall x \in [0,1].$$

$f_n \in R(0,1)$ و لدينا :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

لكن $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$ و بالتالي :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

مثال 4-2 :

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f_n(x) = \begin{cases} -1 \ , & x < -\frac{1}{n} \\ \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \ , & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 1 \ , & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 \ , & x < 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ 1 \ , & x > 0 \end{cases}$$

تعليل :

إذا كان $x > 0$ (و بما أن $0 < 1$) فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x > \frac{1}{N}$. و منه $x > \frac{1}{n}$ لكل $n \geq N$ $\Leftarrow$ $f_n(x) = 1$ لكل $n \geq N$

إذاً $f_n(x) \longrightarrow 1$ لما $n \longrightarrow \infty$.

كذلك $x < 0$ $\Leftarrow$ $f_n(x) \longrightarrow -1$.

لكن $f_n(0) = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و منه نجد f f علاه.

هنا $f(x) = Sgn(x)$ و هي غير (متصلة) قابلة للإشتقاق في حين f_n قابلة للإشتقاق.

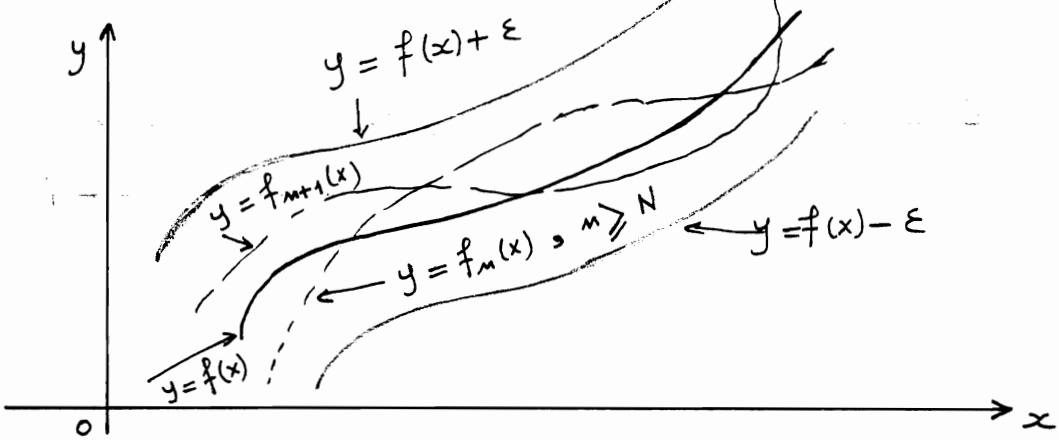
مثال 5-2 : $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ و لدينا $f_n \longrightarrow 0$. $f \equiv 0$ قابلة للإشتقاق مثل f_n لكن $f'(x) = 0 \neq f_n'(x) = \cos nx$.

تعريف 6 - 2 :

نقول إن متتالية الدوال (f_n) حيث $f_n : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ لكل n، أنها متقاربة بانتظام من الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و نرمز لذلك بالرمز $f_n \xrightarrow{U} f$ إذا تحقق ما يلي :

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ $(N = N(\varepsilon))$ بحيث

$$n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad , \forall x \in D.$$



أمثلة 7 - 2 :

1) من المثال 5 - 2 لدينا $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n} \longrightarrow 0$ نقطيا على $\mathbb{R}$. سنثبت أن $f_n \xrightarrow{U} f \equiv 0$ على $\mathbb{R}$ باستعمال التعريف السابق 6 - 2 :

ليكن $\varepsilon > 0$. لدينا :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}|\sin nx| \leqslant \frac{1}{n} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

بأخذ $N \in \mathbb{N} \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ فإن

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}|\sin nx| < \varepsilon \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أن $f_n \xrightarrow{U} f$.

2) $f_n(x) = x^n \longrightarrow 0$ نقطيا على $(0,1)$.

بأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ فإن :

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \frac{1}{2} \Longrightarrow x < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$$

إذا المتباينة $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ تتحقق

فقط على الجزء $(0 \text{ و } \sqrt[n]{\frac{1}{2}})$ من الفترة $(0,1)$ وليس على الجزء الآخر $[\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \text{ و } 1)$ مهما كان اختيارنا لـ N.

وبالتالي: $x^n \xrightarrow{\text{نق}} 0$ نقطيا في حين أن $x^n \not\xrightarrow{\text{ن}} 0$.

ملاحظة:

$f_n \xrightarrow{\text{ن}} f \Longrightarrow f_n \longrightarrow f$ نقطيا.

لكن

$f_n \longrightarrow f$ نقطيا $\not\Longrightarrow f_n \xrightarrow{\text{ن}} f$ كما يوضح المثال 7-2 رقم (2).

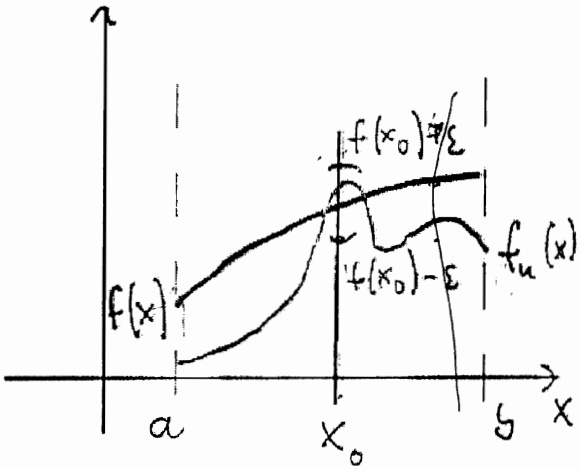
30 bis

- For *pointwise* convergence we could *first* fix a value for x and *then* choose N. Consequently, N depends on both ε and x.
- For *uniform* convergence $f_n(x)$ must be *uniformly* close to $f(x)$ for *all* x in the domain. Thus N only depends on ε but not on x.

Let's illustrate the difference between pointwise and uniform convergence graphically:

Pointwise Convergence

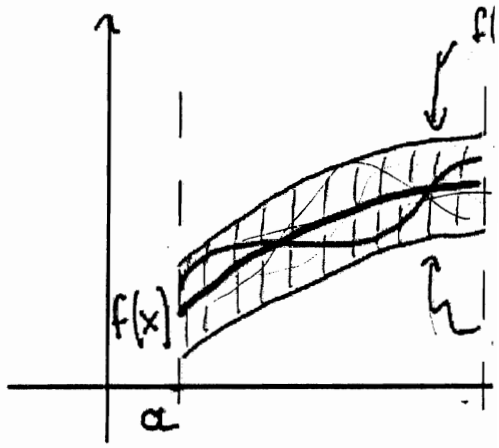
For pointwise convergence we first fix a value x_0. Then we choose an arbitrary neighborhood around $f(x_0)$, which corresponds to a vertical interval centered at $f(x_0)$.



Finally we pick N so that $f_n(x_0)$ intersects the vertical line $x = x_0$ inside the interval $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

Uniform Convergence

For uniform convergence we draw an ε-neight around the *entire* limit function f, which results strip" with $f(x)$ in the middle.



Now we pick N so that $f_n(x)$ is completely insid *for all x in the domain.*

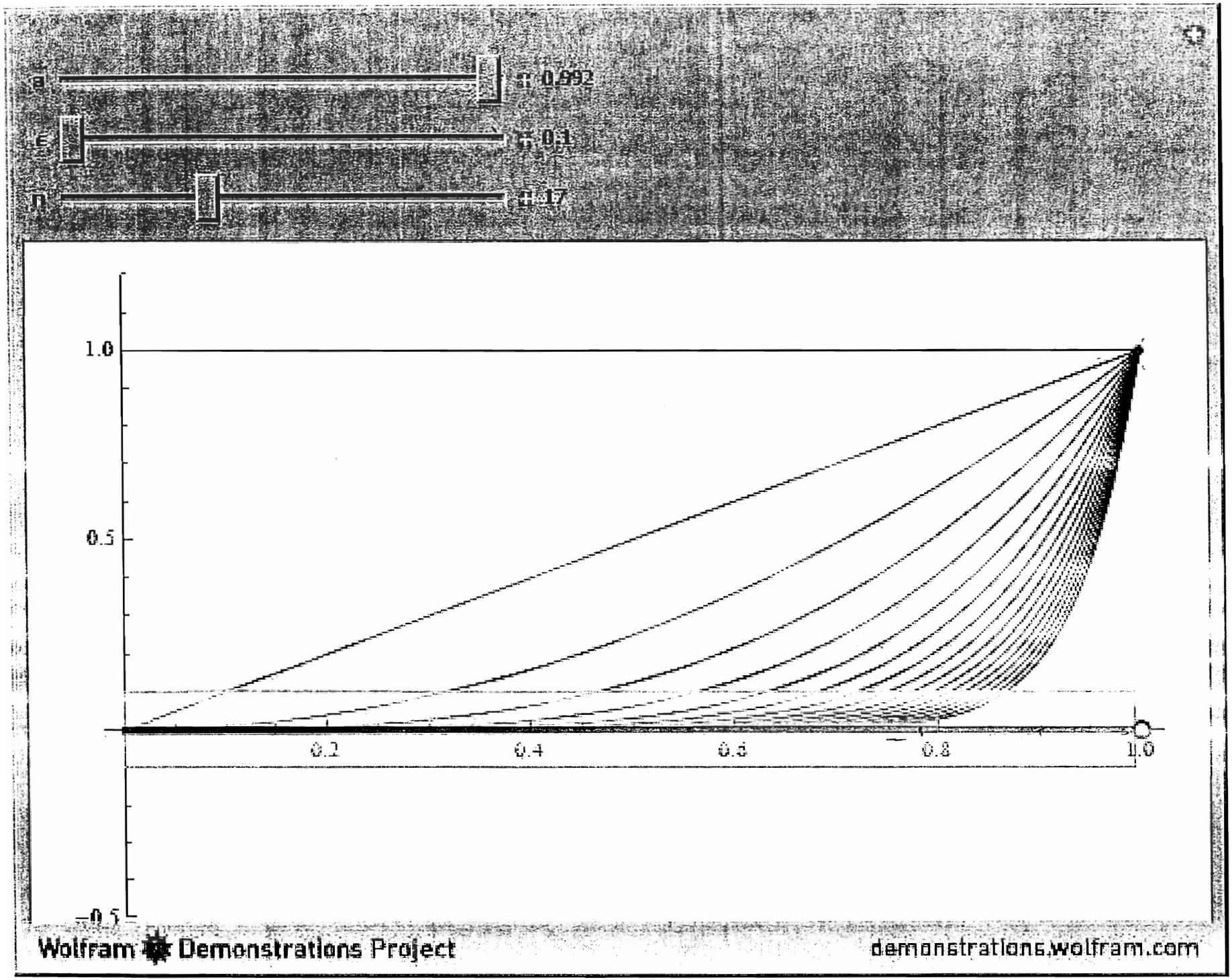
Example 8.2.2: Pointwise versus Uniform Convergence

- Define $f_n(x) = x/n$ with domain $D = [a, b]$. Show that the sequence $\{ f_n(x) \}$ converges uniformly to zero. What if we change the domain to *all real* numbers?
- Let $f_n(x) = x^n$ with domain $D = [0, 1]$. Show that $\{ f_n(x) \}$ converges pointwise but not uniformly. What if we change the domain slightly to $D = (0, 1)$?
- The sequence $f_n(x) = max(n - n^2 |x - 1/n|, 0)$ with domain $D = [0, 1]$ converges pointwise to zero. Does it also converges uniformly?
- Remember that we discussed uniform continuity in a previous chapter. We showed that a function that is (regularly) continuous on a compact set is automatically uniformly continuous. Is that true also for pointwise and uniform convergence, i.e. is a sequence that converges pointwise on a compact set automatically uniformly convergent?
- Can you find a uniformly convergent sequence for all real numbers?

Uniform convergence clearly implies pointwise convergence, but the converse is false as the above examples illustrate. Therefore uniform convergence is a more "difficult" concept. The good news is that uniform convergence preserves at least some properties of a sequence.

Theorem 8.2.3: Uniform Convergence preserves Continuity

31


a
0.992
ε
0.1
n
0.17
1.0
0.5
−0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Wolfram Demonstrations Project
demonstrations.wolfram.com

نظرية 8-2 :-

لتكن $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متتالية دوال، فإن :

$\{f_n\}$ تتقارب بانتظام إلى f على D إذا وفقط إذا كان

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

برهان :

يكفي ملاحظة أن

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in D \iff \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$\iff \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

$$n \longrightarrow \infty .$$

مثال 9-2 :-

لتكن $\{f_n\}_n$ متتالية دوال معرفة ب : $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \ , \ x \geqslant 0$.

1) أوجد نهايتها $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

2) بين أنه إذا كان $a > 0$ فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام إلى f على $[a , \infty)$.

3) بين أن $\{f_n\}$ لا تتقارب بانتظام إلى f على $[0 , \infty)$.

الحل :

1) بما أن $f_n(0) = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = f(0) = 0$.

من أجل $x > 0$، لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{nx}} = 1$$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 1 \ , \ x > 0$.

ومنه نجد :-

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & x > 0 \\ 0 \ , & x = 0 \end{cases}$$

(النهاية النقطية للمتتالية)

2) إذا كان $x \geqslant a$ فإن :-

$$\left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \frac{1}{1+nx} \leqslant \frac{1}{1+na} \quad \text{و} \quad (\text{لأن } x \geqslant a)$$

كما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+na} = 0$ و منه :

$$\sup_{[a,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

إذاً $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام إلى f على $[a,\infty)$.

3) إذا كان $n \in \mathbb{N}$ وكان $0 < x < \frac{1}{n}$ فإن:

$$\left|\frac{nx}{1+nx} - 1\right| = \frac{1}{1+nx} > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad (\text{لأن } nx < 1)$$

وبالتالي $\sup_{[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$، ومنه $\{f_n\}$ لا تتقارب بانتظام إلى f على $[0,\infty)$.

نظرية 10-2: "معيار كوشي للتقارب المنتظم"

تكون المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على D إذا وفقط إذا كان

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ و

$$n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in D.$$

$$\left(\text{أي } \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\right).$$

البرهان:

"$\Leftarrow$" إذا كان $f_n \xrightarrow{u} f$، فليكن $\varepsilon > 0$ وليكن $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2, \quad \forall x \in D$$

فإنه لكل $n, m \geq N$ لدينا:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \forall x \in D.$$

"$\Rightarrow$" لنفرض أن $\{f_n\}$ تحقق معيار كوشي، فإن $\{f_n(x)\}$ متتالية لكوشي لكل $x \in D$، وبالتالي فهي متقاربة على $x \in D$ في $\mathbb{R}$.

لنضع $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ وذلك لكل $x \in D$.

لنثبت n و لنجعل $m \to \infty$ فنحصل على:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in D$$

وهذا يعني أن $f_n \xrightarrow{u} f$ على D.

تمارين: 8، 9، 15، 16.

مثال 11 ـ 2 :

لتكن $\{f_n\}$ متتالية دوال معرفة على $[0,1]$ بـ $f_n(x) = 2x + \frac{x}{n}$.

1) أحسب $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

2) هل f متصلة ؟

هل أن $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$ لكل $x \in [0,1]$ ؟

هل $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ ؟

الحل :- 1) $f(x) = 2x$ ، 2) و هي متصلة على $[0,1]$.

3) $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = 2$ و كذلك $f_n'(x) = 2 + \frac{1}{n}$

و بالتالي :- $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 = f'(x)$.

4)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[x^2 + \frac{x^2}{2n}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1 .$$

مثال 12 ـ 2 :

1) توجد متتاليات دوال متصلة (قابلة للإشتقاق) لكن نهايتها النقطية ليست متصلة (قابلة للإشتقاق) :

$f_n(x) = x^n$ على $[0,1]$ متصلة (و أيضا قابلة للإشتقاق على $[0,1]$

في حين أن $f(x) = \begin{cases} 1 , & x = 1 \\ 0 , & x \in [0,1) \end{cases}$ ليست متصلة (و بالتالي ليست قابلة للإشتقاق) .

2) توجد متتاليات من الدوال القابلة للمكاملة و نهايتها ليست كذلك على $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & x \in Q \\ 0 , & \text{عدا ذلك} \end{cases} \xleftarrow{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 , & x = \frac{p}{m} \in Q , m \leq n \\ 0 , & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

كل f_n تقبل عدد منتهي من النقاط الغير صفرية و بالتالي $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$. لكن $\int_0^1 f(x)\,dx$ غير موجود .

مثال 13 ـ 2 : أعط أمثلة عن متتاليات دوال حيث :

1) $f_n \to f$ على $[0,1]$ و $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq \left(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\right)'$ عند $x = 1$

2) $f_n \to f$ على $[0,1]$ و $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

الحل :-

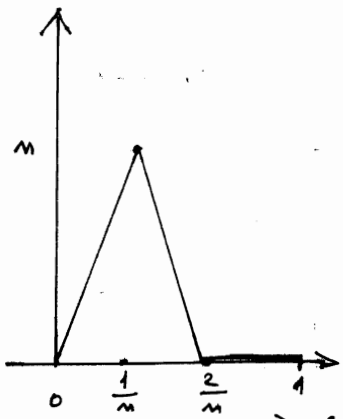
1) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ على $[0,1]$ لكل $n \geq 1$. لدينا : $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$

f متصلة و f_n دوال متصلة ~~لكنها~~ و

$$f_n'(x) = x^{n-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} x^{n-1} = \begin{cases} 0 , & x \in [0,1) \\ 1 , & x = 1 . \end{cases}$$

في حيث أن $f'(x) = 0$.



2) لتكن $(f_n)_n$ معرفة على $[0,1]$ بـ :-

$$f_1(x) = 1$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x , & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x , & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 , & \frac{2}{n} < x \leq 1 . \end{cases}$$

$n \geq 2 \to \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right) \cdot n = 1$ ($\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 .$$

لكن $f_n(x) \longrightarrow 0$ على $[0,1]$ ، (بين ذلك) .

و بالتالي :- $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

نظرية 14-2 :-

إذا كانت $f_n \xrightarrow{u} f$ (بانتظام) على D و f_n متصلة لكل n فإن f أيضا متصلة على D.

برهان :- $\forall \varepsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N} , \forall n \geq N$:-

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ لكل $x \in D$.

ليكن $c \in D$ مثبت . بما أن f_N متصلة على D فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث $|x - c| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(c)| < \varepsilon/3$.

ومنه :

$$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(c)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(c) - f(c)|}_{< \varepsilon/3}$$

$$< \varepsilon .$$

نظرية 15 - 2 :

لتكن $\{f_n\}$ متتالية دوال قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ ومتقاربة نحو الدالة f على $[a,b]$.

إذا كانت $\{f'_n\}$ تتقارب بانتظام على $[a,b]$ فإن $\{f_n\}$ أيضا تتقارب بانتظام و $f'_n \longrightarrow f'$.

برهان :-

استعمل نظرية القيمة المتوسطة مطبقة على نقطتين $x_0 \in [a,b]$ و $x \in [a,b]$ ثم معيار كوشي للتقارب المنتظم.

نظرية 16 - 2 :

إذا كانت $f_n \in R(a,b)$ لكل $n \geq 1$ وكانت $f_n \xrightarrow{u} f$ على $[a,b]$ فإن :-

1) $f \in R(a,b)$.

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

برهان :-

استعمل شرط ريمان (النظرية 9-1) والنظرية 8-2.

2- متسلسلات الدوال :

لتكن $\{f_n\}$ متتالية دوال معرفة على $D \subset \mathbb{R}$. مجموع حدودها يسمى متسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

المجموع الجزئي لهذه المتسلسلة هو عبارة عن متتالية دوال معرفة ب :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

نقول أن المتسلسلة متقاربة إذا كانت المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة نقطيا في D، ونهايتها على D هي مجموع المتسلسلة أي

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ و } x \in D.$$

نقول إن $\sum f_n(x)$ متباعدة عند x إذا كانت متتالية

الأعداد $\{S_n(x)\}$ متباعدة.

نقول عن $\sum f_n$ أنها متقاربة بإنتظام إذا كانت (S_n) كذلك، ونقول إنها متقاربة مطلقا إذا كانت $\sum |f_k|$ متقاربة.

ملاحظة 2-17:

$\sum f_n$ متقاربة على D $\Leftarrow$ $(f_n(x))$ متقاربة نقطيا إلى 0.

$\sum f_n$ متقاربة بإنتظام على D $\Leftarrow$ (f_n) متقاربة بإنتظام إلى 0.

نظرية 2-18:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متسلسلة دوال متقاربة بإنتظام على $D\setminus\{x\}$ ولنفرض أن لكل $n \geq 1$ فإن $\lim_{t\to x} f_n(t)$ موجودة.

عندئذ لدينا: $\lim_{t\to x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to x} f_n(t)$.

كنتيجة لذلك: إذا كانت f_n متصلة لكل n فإن $\sum f_n$ متصلة.

نظرية 2-19:

لنفرض أن $f_n \in \mathcal{R}(a,b)$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا كانت $\sum f_n$ متقاربة بإنتظام على $[a,b]$ فإن $f = \sum f_n \in \mathcal{R}(a,b)$ ولدينا

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

نظرية 2-20:

لتكن f_n قابلة للإشتقاق على $[a,b]$ لكل n و $\sum f_n$ متقاربة. إذا كانت $\sum f_n'$ متقاربة بإنتظام على $[a,b]$ فإن $\sum f_n$ أيضا متقاربة بإنتظام ومجموعها دالة قابلة للإشتقاق حيث $(\sum f_n)'(x) = \sum f_n'(x)$.

نظرية 2-21: (معيار كوشي للتقارب المنتظم)

المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بإنتظام على D إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث:

$$n, m \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

تمرين 2-22:

إستنتج من النظرية 2-21 أن $\sum f_n$ متقاربة بإنتظام $\Leftarrow$ $f_n \xrightarrow{u} 0$

(ضع $n = m+1$ في معيار كوشي).

نظرية 23-2: (إختبار فايرشتراس) (إختبار - M).

لتكن (f_n) متتالية دوال على D و (M_n) متتالية حقيقية تحقق

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad , \forall x \in D , n \in \mathbb{N}$$

إذا كانت $\sum M_n$ متقاربة فإن كل من $\sum f_n$ و $\sum |f_n|$ متقاربة بإنتظام على D.

برهان: نطبق معيار كوشي:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| < \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon .$$

نظرية 24-2: (إختبار ديريشليه)

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين من الدوال على D تحققان:

1) يوجد $K > 0$ حيث $\left|U_n(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leq K , \forall x \in D , \forall n \in \mathbb{N}$

(متتالية المجاميع الجزئية لـ u_n محدودة بإنتظام).

2) المتتالية (v_n) متناقصة على D، أي:

$$v_{n+1}(x) \leq v_n(x) \quad , \forall x \in D , \forall n \in \mathbb{N}.$$

3) $v_n \xrightarrow{u} 0$

عندئذ $\sum v_n u_n$ متقاربة بإنتظام على D.

نظرية 25-2: (إختبار آبل)

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين من الدوال على D تحققان:

1) $\sum u_n$ متقاربة بإنتظام على D.

2) (v_n) محدودة بإنتظام ومتناقصة على D.

عندئذ $\sum u_n v_n$ متقاربة بإنتظام على D.

مثال 26-2: ناقش التقارب المنتظم للمتسلسلات:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ على $\mathbb{R}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ على $[0, 2\pi]$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{n^2}$ على $\mathbb{R}$.

الحل :-

1) $\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geqslant |f_n(n)| = \frac{n^n}{n!} \geqslant 1$

بإستخدام معيار كوشي فهذه ليست متقاربة بإنتظام.

2) هناك تقارب نقطي. لاحظ أن $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
أمّا أجل $10 \leqslant n$ و $h \in \mathbb{N}$ حيث $2n \leqslant n+h < \frac{n\sqrt{n}\pi}{4}$ ولكل $k \in \mathbb{N}$ حيث $n \leqslant k \leqslant n+h$، لدينا $k/n\sqrt{n} < \frac{\pi}{4}$، ومنه

$$\frac{2}{\pi}\frac{k}{n\sqrt{n}} \leqslant \sin\left(k\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

وهذا يستلزم

$$\sum_{k=n}^{n+h} \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2}{\pi}\frac{k}{n\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=n}^{n+h} \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(k\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

لكن

$$\sum_{k=n}^{n+h} \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2}{\pi}\frac{k}{n\sqrt{n}} = \sum_{k=n}^{n+h} \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \geqslant \sum_{k=n}^{n+h} \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{\pi}\frac{h}{n} \geqslant \frac{2}{\pi}.$$

$$\Leftarrow \quad \sup_{x\in[0,2\pi]} \left|\sum_{k=n}^{n+h} \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kx)\right| \geqslant \frac{2}{\pi}$$

لكل $10 \leqslant n$ و $h \in \mathbb{N}$ حيث $2n \leqslant n+h < n\frac{\sqrt{n}\pi}{4}$.
وهذا يعني أن التقارب غير منتظم على $[0, 2\pi]$.

3) بأخذ $M_n = \frac{1}{n^2}$ لكل $1 \leqslant n$ فإنه

$\left|\frac{\cos^2(nx)}{n^2}\right| \leqslant M_n$ وذلك لأن $|\cos(nx)| \leqslant 1$.

المتسلسلة $\frac{1}{n^2}$ متقاربة وبالتالي حسب إختبار M-فيرشتراس فإنها متقاربة.

مثال 27-2 :

إختبر تقارب المتسلسلات : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ (1) ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ (2)

الحل :-

1) لدينا $|\sin nx| \leq 1$ ومنه $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$، وبما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإنه حسب إختبار فايرشتراس فإن $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ متقاربة بإنتظام على $\mathbb{R}$.

2) لا نستطيع تطبيق إختبار فايرشتراس لأنه لو كان $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq M_n$ لكل $x \in I$ فإن $M_n \geq \frac{c}{n}$ حيث $c = \sup_I |\sin nx| > 0$.

وبما أن $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة، فإنه لا يمكننا إذا تطبيق هذا الإختبار.

لنطبق إختبار ديريشليه على $[a,b] \subset (2m\pi, 2m\pi + 2\pi)$ حيث $m \in \mathbb{Z}$. لدينا:

$$\sum_{n=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}, \quad x \neq 2m\pi, \ m \in \mathbb{Z}$$

لنضع $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ حيث $u_k(x) = \sin kx$، فنجد أن

$$|U_n(x)| \leq \frac{|\cos\frac{x}{2}| + |\cos(n+\frac{1}{2})x|}{2\,|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leq \max\left\{\frac{1}{|\sin\frac{a}{2}|}, \frac{1}{|\sin\frac{b}{2}|}\right\}, \quad \forall x \in [a,b], \ \forall n \in \mathbb{N}$$

لكن $m\pi < \frac{a}{2} < \frac{b}{2} < (m+1)\pi \Leftarrow \sin\frac{a}{2} \neq 0$ و $\sin\frac{b}{2} \neq 0$.

بوضع $v_n(x) = \frac{1}{n}$ على $[a,b]$ نحصل على متتالية متناقصة تقترب بإنتظام من 0.

الآن متتالية المجاميع الجزئية $\{U_n(x)\}$ محدودة بإنتظام على $[a,b]$ و $\{v_n\}$ متناقصة وتؤول إلى 0، فحسب إختبار ديريشليه فإن $\sum u_n v_n = \sum \frac{\sin nx}{n}$ متقاربة بإنتظام على $[a,b]$.

لاحظ أن التقارب المنتظم على كل $\mathbb{R}$ غير محقق.

مثال 28 - 2 :-

إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة، فإن $\sum a_n x^n$ متقاربة بإنتظام على $[0,1]$.

بالفعل، بوضع $u_n(x) = a_n$ و $v_n(x) = x^n$ فإن :-

أ) $\sum u_n(x) = \sum a_n$ متقاربة (بإنتظام على $[0,1]$ لا تتعلق بـ x)

ب) $\{x^n\}$ محدودة بإنتظام ومتناقصة على $[0,1]$ إذ أن :-

$\sup_{[0,1]} |x^n| \leq 1$ و $x^{n+1} \leq x^n$ لكل $x \in [0,1]$.

فحسب إختبار آبل، فإن $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بإنتظام على $[0,1]$.

متسلسلات القوى :-

ليكن $a_n \in \mathbb{R}$ ، c لكل $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

كل متسلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ حيث $f_n(x) = a_n(x-c)^n$ تسمى متسلسلة قوى ، وهي حالة خاصة من متسلسلات الدوال حيث $f_n(x) = a_n(x-c)^n$ ، فكل ما ينطبق على متسلسلات الدوال ينطبق على متسلسلات القوى بالإضافة إلى بعض الخصوصيات التي تتمتع بها متسلسلات القوى .

لاحظ أنه في الحالة العامة ندرس متسلسلات القوى $\sum a_n x^n$ وذلك دون الإخلال بعمومية المسألة.

ملاحظة :-

$\sum a_n x^n$ تتقارب عند $x=0$ لمهما كان a_0 .

تعريف 29 - 2 :-

لأي متسلسلة قوى $\sum a_n x^n$ نعرف القيمة

$$\rho = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

ونضع $R = \frac{1}{\rho}$ حيث $0 < \rho < \infty$ ، $R = 0$ عندما $\rho = \infty$ ، $R = \infty$ إذا كانت $\rho = 0$.

يسمى R نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum a_n x^n$.

غالبا ما نجد R عن طريق حساب النهاية:

$$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| .$$

فترة تقارب متسلسلة القوى تأخذ إذا أحد الأشكال : $(-R, R)$ ، $[-R, R)$ ، $[-R, R]$ أو $[-R, R]$.

نظرية 30 - 2 :- (كوشي - هادامارد)

تكون المتسلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة مطلقا إذا كان $|x| < R$ ومتباعدة إذا كان $|x| > R$. (وتدرس حالة $|x| = R$ على حدى) .

نظرية 31 - 2 :- (التقارب المنتظم)

ليكن R نصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\sum a_n x^n$.

إذا كانت $0 < r < R$ فإن المتسلسلة تتقارب بإنتظام على $[-r, r]$

برهانه (انظر التمارين) .

نظرية 32 - 2 :-

إذا كان $R>0$ نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum a_n x^n$ فإن دالة المجموع $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابلة للإشتقاق على $(-R, R)$ ومشتقتها تساوي :- $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ المتقاربة أيضا على $(-R, R)$.

وبصفة عامة هي قابلة للإشتقاق عدد غير منته من المرات

$$S^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n x^{n-m}$$

لذا نجد :-

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

تعريف 33 - 2 :-

تسمى متسلسلة القوى $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ و $x \in I$ مفكوك تايلور لـ f حول c.

نقول عن f أنها تحليلية على الفترة I إذا كانت تساوي مفكوكها عند كل $x \in I$، أي إذا كانت f قابلة للإشتقاق عدد غير منته من المرات على I وكان باقيها $R_n(x) \longrightarrow 0$ عند كل $x \in I$ لما $n \longrightarrow \infty$، علما أن الباقي معرف بـ :-

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad x<d<c.$$

أمثلة عن دوال تحليلية 34 - 2 :-

1) كثيرات الحدود $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$

2) الدالة الأسية : (تحليلية على $\mathbb{R}$)

$$\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

3) الدالة اللوغاريتمية

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x = e^{\ln x}, \quad x \in (0, \infty)$$

4) الدالتان $\sin x$ و $\cos x$:- (تحليليتان على $\mathbb{R}$)

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

مثال 35 – 2 :-

أوجد نصف قطر و فترة تقارب كل من متسلسلات القوى:

1) $\sum \frac{x^n}{n^n}$ ، 2) $\sum \frac{n^n x^n}{n!}$ ، 3) $\sum n^{-\sqrt{n}} x^n$

الحل :-

1) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

إذا $R=\infty$ و فترة التقارب هي $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$

و ليس هناك تقارب منتظم على كل $\mathbb{R}$ ، لكن فقط على كل فترة متراصة من $\mathbb{R}$ ، مثلا $[-r,r]$ حيث $r\in\mathbb{R}$.

2) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^{-\sqrt{n}}}{(n+1)^{-\sqrt{n+1}}}\right| = ?$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left|n^{-\sqrt{n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

لكن $\ln n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln n \longrightarrow \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ومنه $$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = e^0 = 1.$$

نصف قطر تقاربها هو $R=1$.

لما $x=1$ فإنها تصبح $\sum \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$ و هي متقاربة

لأن $n\geq 4 \Rightarrow \sqrt{n}\geq 2 \Rightarrow n^{\sqrt{n}}\geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}\leq\frac{1}{n^2}$

و $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة .

كذلك الحال لما $x=-1$ و منه فترة التقارب هي $[-1,1]$

III قياس لبيق :-

* إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ مجموعة من الأعداد الحقيقية فإن $\mathcal{P}(E)$ ترمز للمجموعة المكونة من كل أجزاء E وتسمى مجموعة القوة لـ E

مثلا :- $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

ولدينا $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ حيث $|E|$ يرمز لعدد عناصر E.

* إذا كانت I فترة حقيقية فإن $\ell(I)$ ترمز لطولها والذي يساوي الفرق بين طرفيها أي $\ell([a,b]) = b-a$.

نريد تعميم مفهوم الطول لكل عناصر $\mathcal{P}(\mathbb{R})$، أي نريد إيجاد دالة m تحقق ما يلي :-

1) مجالها $\mathcal{P}(\mathbb{R})$، أي $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty)$.

2) لكل فترة I من $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ لدينا $m(I) = \ell(I)$.

3) إذا كانت $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ حيث $E_1 \cap E_2 = \phi$ فإن

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

وبشكل عام إذا كانت $\{E_n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ حيث $E_i \cap E_j = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

(خاصية التجميع القابل للعد).

4) $m(x+E) = m(E), \forall x \in \mathbb{R}, \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

وحيث أنه من الصعب إيجاد دالة تحقق كل هذه الشروط فإن الشرط الأول سيخفف إلى مجموعة جزئية من $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

تعريف 1-3 :-

إذا كانت $\mathcal{R}$ مجموعة غير خالية من مجموعات Ω الجزئية فإن $\mathcal{R}$ تسمى حلقة بولية (أو حلقة) في Ω إذا حققت :- $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

أي إذا كانت مغلقة تحت عمليتي الإتحاد والفرق.

مثال 2-3 :

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}$ مجموعة جزئية و $A, B \subset \Omega$ ، $(\Omega \neq \phi)$ فإن كل من المجموعات التالية تشكل جلقة في Ω :

1) $\mathcal{P}(\Omega)$. 3) $\{\phi, A, A^c, \Omega\}$

2) $\{\phi, A\}$ 4) $\{\phi, A, B, A\cap B, A\cup B, A\setminus B, B\setminus A, A\Delta B\}$

(للتذكير فإن $A\Delta B = A\setminus B \cup B\setminus A$)

تعريف 3-3 :

إذا كانت $D \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ فإننا نقول عنها أنها ~~مجموعة~~ منفصلة زوجيا (أو مثنى مثنى) (أو فقط منفصلة) إذا كان $A, B \in D, A \neq B \Rightarrow A\cap B = \phi$

وعندها نقول عن الإتحاد $\cup\{A, A\in D\}$ أنه منفصل.

تعريف 3-4 :

1) (هنا $[a,b) = \phi$ لما $a \geq b$) و $\mathcal{I} = \{[a,b), a, b \in \mathbb{R}\}$ مجموعة كل القترات النصف مفتوحة من $\mathbb{R}$.

2) $\mathcal{E}$ مجموعة كل الإتحادات المنتهية والمنفصلة من عناصر $\mathcal{I}$ أي كل $E \in \mathcal{E}$ يكتب بالشكل $E = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ حيث $I_i \in \mathcal{I}$ ، $I_i \cap I_j = \phi$ لما $i \neq j$.

تمهيدية 3-5 :

إذا كانت I_1 و $I_2 \in \mathcal{I}$ فإن :

i) $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}$

ii) $I_1 \setminus I_2 \in \mathcal{E}$.

نظرية 3-6:

$\mathcal{E}$ حلقة بولية.

برهان:

بالتعريف $\mathcal{E}$ مغلقة بالنسبة للإتحادات المنتهية والمنفصلة.

لنعتبر الإتحادين المنفصلين

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} I_i \quad و \quad F = \bigcup_{j=1}^{m} J_j \quad , \quad I_i , J_j \in \mathcal{I}.$$

$E \cap F = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{m} I_i \cap J_j$ و $I_i \cap J_j \in \mathcal{I}$ من التمهيدية السابقة

و بما أن $\{ I_i \cap J_j \text{ و } 1 \leq i \leq m \text{ ، } 1 \leq j \leq m \}$ منفصلة فإن $E \cap F \in \mathcal{E}$.

كذلك

$E \setminus F = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{m} I_i \setminus J_j$ و $I_i \setminus J_j \in \mathcal{E}$ من التمهيدية السابقة

و بما أن $\{ I_i \setminus J_j \text{ ، } 1 \leq i \leq m \}$ منفصلة لكل $1 \leq j \leq m$ فإن

$\bigcup_{i=1}^{m} I_i \setminus I_j \in \mathcal{E}$ لكل $1 \leq j \leq m$ وعليه فإن $E \setminus F \in \mathcal{E}$، لأن

$\mathcal{E}$ مغلقة بالنسبة للتقاطعات المنتهية.

من جهة أخرى

$$E \cup F = \underset{\in \mathcal{E}}{(E \setminus F)} \cup \underset{\in \mathcal{E}}{F}$$

$$\Rightarrow E \cup F \in \mathcal{E}$$

لأن F و $E \setminus F$ منفصلين.

ملاحظة 3-7:

ϕ تنتمي إلى كل حلقة بولية.

تعريف 3-8:

لتكن $\mathcal{A}$ حلقة بولية من مجموعات Ω حيث تحوي Ω ذاتها كعنصر منها فإن $\mathcal{A}$ تسمى عندئذ جبر.

خاصية 3-9 :-

1) $\mathcal{A}$ جبر إذا وفقط إذا كانت مغلقة بالنسبة للإتحاد والتتميم أي :-

$$E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{A}$$

$$E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}.$$

2) $\mathcal{E}$ ليست جبر، لأنه لا توجد مجموعة منتهية من الفترات المحدودة يغطي إتحادها $\mathbb{R}$.

تعريف 3-10 :-

1) إذا كانت $\mathcal{R}$ مجموعة غير خالية من مجموعات Ω الجزئية وكانت مغلقة بالنسبة للإتحادات القابلة للعد والفرق فإنها تسمى حلقة سيغما، أي

$$E_i \in \mathcal{R}, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{R}$$

$$E, F \in \mathcal{R} \Rightarrow E \setminus F \in \mathcal{R}.$$

2) كل حلقة سيغما تحوي Ω تسمى جبر سيغما.

ملاحظة 3-11 :-

كل حلقة سيغما مغلقة تحت التقاطعات القابلة للعد.

نظرية 3-12 :-

لكل مجموعة جزئية $\mathcal{D}$ من $\mathcal{P}(\Omega)$ يوجد جبر سيغما أصغري $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ في Ω بحيث :-

i) $\mathcal{A}(\mathcal{D}) \supset \mathcal{D}$.

ii) إذا كان $\mathcal{X}$ جبر سيغما يحوي $\mathcal{D}$ فإن $\mathcal{X} \supset \mathcal{A}(\mathcal{D})$ (أصغر جبر سيغما).

تعريف 3-13 :-

يسمى جبر سيغما المولد من $\mathcal{I}$ جبر سيغما بوريل في $\mathbb{R}$ ويرمز له بالرمز $\mathcal{B}$ وتسمى عناصره مجموعات بوريل.

ملاحظة 3-14 :-

إذا كانت τ هي مجموعة المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ و $\mathcal{C}$ هي مجموعة المجموعات المغلقة وكانت :

$$\mathcal{I}_0 = \{ (a,b) \ , \ a,b \in \mathbb{R} \}$$
$$\mathcal{I}_1 = \{ [a,b] \ , \ a,b \in \mathbb{R} \}$$
$$\mathcal{I}_2 = \{ (a,\infty) \ , \ a \in \mathbb{R} \}$$
$$\mathcal{I}_3 = \{ [a,\infty) \ , \ a \in \mathbb{R} \}$$

فإن :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}(\mathcal{I}_0) = \mathcal{A}(\mathcal{I}_1) = \mathcal{A}(\mathcal{I}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{I}_3) = \mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(\mathcal{C}).$$

وبالتالي $\mathcal{B}$ تحوي المجموعات المفتوحة والمغلقة والفترات والمجموعات القابلة للعد والمجموعات وحيدة العنصر وإتحادات لها وتقاطعات لها ....

تمهيدية 3-15 :-

إذا كانت I فترة محدودة طرفاها a و b حيث $a \leq b$ وعرفنا طول I على أنه $\ell(I) = b - a$ وفي حالة I غير محدودة ب $\ell(I) = \infty$ فإن

$$\ell : \mathcal{I} \longrightarrow [0,\infty)$$

دالة تحقق ما يلي :-

i) $\ell(\phi) = 0$

ii) مطّردة : $I, J \in \mathcal{I} \ , \ I \subset J \Rightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$

iii) خاصية الجمع المنته :- إذا كانت $\{I_1, \dots, I_n\}$ مجموعة منتهية ومنفصلة من الفترات في $\mathcal{I}$ وإتحادها في $\mathcal{I}$ فإن :

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ell(I_i)$$

تعريف 3-16 إذا كانت $E = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \in \mathcal{E}$ حيث $I_1, \dots, I_n$ فترات منفصلة من $\mathcal{I}$ فإن طول E يعرف ب :

$$\ell(E) = \sum_{i=1}^{n} \ell(I_i).$$

هذا الطول لمجموعة E من $\mathcal{E}$ يحقق خاصية ما دون التجميع

$$\ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \ell(E_i). \qquad \text{(subadditivity)}.$$

إذا كانت $\{I_i, i \in \mathbb{N}\}$ مجموعة قابلة للعد من عناصر $\mathcal{I}$ بحيث :

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

فإنها تسمى غطاء (تغطية) للمجموعة E في $\mathcal{I}$.

بما أن $\mathbb{R} = \bigcup^{\infty} [-n, n)$ فإن $\{[-n, n), n \in \mathbb{N}\}$ تشكل غطاءً قابلاً للعد لكل جزء من $\mathbb{R}$.

تعريف 3-17 (قياس لبيسق الخارجي)

يعرف قياس لبيسق الخارجي m^* لمجموعة E من $\mathbb{R}$ على أنه القيمة :

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i),\ I_i \in \mathcal{I},\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}.$$

تمرين 3-18 :- $m^*(I) = \ell(I)$, $\forall\ I \in \mathcal{I}$

نظرية 3-19 :-

i) $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$

ii) $m^*(\phi) = 0$

iii) $E \subset F \Rightarrow m^*(E) \leq m^*(F)$

iv) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$

(خاصية ما دون التجميع القابل للعد).

تمرين 3-20 :-

إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ قابلة للعد، فبين أن $m^*(E) = 0$.

إستنتج من التمرين أعلاه أن $[0, 1]$ غير قابلة للعد.

تعريف 3-21 :-

لتكن Ω مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}$ و ليكن $\mathcal{A}$ جبر سيغما في Ω.
تسمى الدالة

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

قياسا على $\mathcal{A}$ إذا كانت تحقق :

1) $\mu(\phi) = 0$

2) لكل عائلة منفصلة $\{E_i , i \in \mathbb{N}\}$ من $\mathcal{A}$ لدينا :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

(خاصية التجميع القابل للعد).

عندها تسمى الثلاثية $(\Omega , \mathcal{A} , \mu)$ فضاء قياس.
μ يسمى قياسا على $\mathcal{A}$ (أو على Ω).

مثال 3-22

لتكن $\lambda \in \mathbb{R}$ و لنعرف $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \{0, 1\}$ بـ :-

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 , & \lambda \in E \\ 0 , & \lambda \notin E \end{cases}$$

لاحظ أن μ تحقق شروط القياس فهي قياس يسمى قياس ديراك عند النقطة λ.

تعريف 3-23

نقول عن المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ إنها قابلة لقياس لبيق (حسب مفهوم كاراثيودوري) إذا كان

$$(*) \quad m^*(A) = m^*(E \cap A) + m^*(E^c \cap A) , \forall A \subset \mathbb{R}$$

وسنرمز بـ $\mathcal{M}$ للمجموعة المشكلة من عناصر $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ القابلة لقياس لبيق.

ملاحظة 3-24 :-

1) ϕ و $\mathbb{R}$ قابلتين للقياس.

2) دوما لدينا $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$ لذا يكفي إثبات $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$ $\forall A \subset \mathbb{R}$ للحصول على $(*)$.

3) إذا كان $m^*(E)=0$ فإن $E \in \mathcal{M}$ (كل مجموعة قياسها الخارجي معدوم قابلة للقياس)

تمهيدية 3-25 :

$\mathcal{M}$ عبارة عن جبر سيغما في $\mathbb{R}$.

برهان :-

1) (واضح) $E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E^c \in \mathcal{M}$

2) إذا كان $E, F \in \mathcal{M}$ بأخذ $A \cap (E \cup F)$ مكان A في $*$ نجد

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A \cap (E \cup F)^c)$$

ومنه $E \cup F \in \mathcal{M}$.

3) $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$

إذاً $\mathcal{M}$ جبر في $\mathbb{R}$.

4) إذا كانت $E_i \in \mathcal{M}$ لكل $i \in \mathbb{N}$ فإنه بالإستقراء الرياضي يمكننا إثبات أن

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

وباستعمال هذه الأخيرة نجد :-

$$m^*(A) = m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c), \ \forall A \subset \mathbb{R}$$

حيث $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

نتيجة 3-26

إذا كانت $\{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ عائلة منفصلة من $\mathcal{M}$ فإن

$$(**) \quad m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i), \ \forall A \subset \mathbb{R}.$$

نتيجة هامة 3-27 :

إقتصار m^* على $\mathcal{M}$ عبارة عن قياس على $\mathcal{M}$.

برهان :

يكفي أخذ $A = \mathbb{R}$ في $(**)$ فنجد

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

تعريف 3-28 :

يسمى إقتصار m^* على $\mathcal{M}$ (أي $m^*/_{\mathcal{M}}$) قياس لبيغ ويرمز له بالرمز m. ومنه $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ فضاء قياس

نظرية 3-29 : مجموعات بوريل قابلة للقياس، $\mathcal{B} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

برهان :- بما أن $\mathcal{B} = A(\mathcal{I}_3)$ (من 3-14) فإنه يكفي إثبات $[a,\infty) \in \mathcal{M}$ لكل $a \in \mathbb{R}$.

لتكن $A \subset \mathbb{R}$ ولنضع $A_1 = A \cap [a,\infty)$ و $A_2 = A \cap [a,\infty)^c = A \cap (-\infty, a)$

ليكن $\varepsilon > 0$، فإنه يوجد غطاء $\{I_i , i \in \mathbb{N}\}$ في $\mathcal{I}$ لـ A بحيث

$$m^*(A) + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$$

نستطيع إثبات $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \leqslant m^*(A) + \varepsilon$

$$\Rightarrow m^*(A) \geqslant m^*(A_1) + m^*(A_2) = m^*(A \cap [a,\infty)) + m^*(A \cap [a,\infty)^c)$$

$\Leftarrow$ $[a,\infty) \in \mathcal{M}$.

ملاحظة 3-30 :

1) $m/_{\mathcal{B}}$ يسمى قياس بوريل، (بما أن $\mathcal{B}$ جبر سيقما).

2) $m/_{\mathcal{M}}$ يتمتع بخاصية التمام (الغير متوفرة في $m/_{\mathcal{B}}$) التالية

إذا كانت $F \in \mathcal{M}$ و $m(F) = 0$ فكل $E \subset F$ قابلة للقياس و $m(E) = 0$.

لذا تبقى الحاجة إلى $\mathcal{M}$ بدل $\mathcal{B}$ مطروحة بالرغم من أن كل مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية والمهمة موجودة في $\mathcal{B}$.

نظرية 3-31 :

قابلية القياس لا تتأثر بالإنسحاب و بالتحاكي :- إذا كانت $E \in \mathcal{M}$ و $a \in \mathbb{R}$ فإن $E + a \in \mathcal{M}$ و $aE \in \mathcal{M}$، كما أن

$$m(E+a) = m(E) \quad \text{و} \quad m(aE) = |a|\, m(E).$$

برهان :- تمرين. (أنظر الكتاب ص 192).

نظرية 3-32 :

إذا كان μ قياسا على $\mathcal{B}$ يحقق $\mu(I) = \ell(I)$, $\forall I \in \mathcal{I}$

فإن $\mu(E) = m(E)$, $\forall E \in \mathcal{B}$.

أي أن قياس ليبيغ m هو القياس الوحيد على $\mathcal{B}$ والذي يمدد مفهوم الطول ℓ .

لقد وصلنا إلى هدف هذا الفصل حيث وجدنا قياس m يمدد الطول و لا متغير بالإزاحة . لكن حساب $m(E)$ بواسطة التعريف أمر صعب، لذا نقدم نظريتي التقريب التاليتين :-

نظرية 33-3: (نظرية التقريب الأولى)

لتكن $E \subset \mathbb{R}$. التقاريب التالية متكافئة:

i) $E \in \mathcal{M}$.

ii) لكل $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مفتوحة $G \supset E$ بحيث $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$.

iii) لكل $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مغلقة $F \subset E$ بحيث $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$.

برهان:

(i) $\Rightarrow$ (ii): نفرض مبدئيا أن $m(E) < \infty$ وأن $\mathcal{I} \supset \{I_i\}$ غطاء لـ E يحقق

$$m(E) + \varepsilon/2 > \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$$

بأخذ $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ حيث $J_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, b_i)$ و $I_i = [a_i, b_i)$ فإن $E \subset G$ مفتوحة ولدينا

$$m(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) + \frac{\varepsilon}{2} < m(E) + \varepsilon.$$

بما أن $E \in \mathcal{M}$ و G فمن خاصية الطرح نجد $m^*(G \setminus E) = m(G \setminus E) = m(G) - m(E) < \varepsilon$

إذا كان $m(E) = \infty$ فنضع $E_n = E \cap (-n, n)$ ونأخذ $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{M}$ مفتوحة (حيث $G_n \supset E_n$ تحقق $m^*(G_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^n$) ولدينا

$$m^*(G \setminus E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(G_n \setminus E_n) < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): لكل $\varepsilon = \frac{1}{n}$ نختار $G_n \supset E$ حيث $m^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$ ونضع $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ونلاحظ أن $G \in \mathcal{M}$ و $E \subset G$. ثم أن

$$G \setminus E = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E) \Rightarrow m^*(G \setminus E) < \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow m^*(G \setminus E) = 0 \Rightarrow G \setminus E \in \mathcal{M}$$

(من الملاحظة 3 في 24-3)

$$\Rightarrow E = G \setminus (G \setminus E) \in \mathcal{M}.$$

بالنسبة للتكافؤ (i) $\Leftrightarrow$ (iii):

لاحظ أن $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$ ولو كانت G مفتوحة فإن G^c مغلقة. كذلك بوضع $F = G^c$ فإن

$$E \setminus F = E \cap G = G \setminus E^c \Rightarrow m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \varepsilon.$$

كذلك $F^c \setminus E^c = E \setminus F \Rightarrow E^c \in \mathcal{M} \Rightarrow E \in \mathcal{M}$.

تمرين 34-3: أثبت (i) $\Leftrightarrow$ (iii) باستعمال التكافؤ (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

نظرية 5-3 : (نظرية التقريب الثانية)

لتكن $E \subset \mathbb{R}$. إذا كان $m^*(E) < \infty$ فإن $E \in \mathcal{M}$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $H \in \mathcal{E}$ بحيث

$$m^*(E \Delta H) < \varepsilon ،$$

(حيث للتذكير لدينا : $E \Delta H = (E \setminus H) \cup (H \setminus E)$)

برهان :

"$\Leftarrow$" فرضنا $E \in \mathcal{M}$ و $\varepsilon > 0$ فمن نظرية التقريب الأولى وجدنا G مفتوحة حيث $E \subset G$ و $m(G \setminus E) < \varepsilon/2$.

وضعنا $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ و $H = \bigcup_{i=1}^{m} [a_i, b_i)$

ثم حسبنا القياسين :

$$m(E \setminus H) \leq m(G) - m\left(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)\right) < \varepsilon/2$$

$$m(H \setminus E) \leq m(G \setminus E) < \varepsilon/2$$

وبالتالي $m(E \Delta H) \leq m(E \setminus H) + m(H \setminus E) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

"$\Rightarrow$" ليكن $\varepsilon > 0$ ولنختار $H = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ حيث $m^*(E \Delta H) < \varepsilon$.

يكفي أن نثبت وجود $E \subset G$ مفتوحة تحقق $m^*(G \setminus E) < 3\varepsilon$.

لنعرف $H_1 = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i - 2^{-i}\varepsilon, b_i)$ ، فنحصل على مجموعة مفتوحة تحقق

$$(*) \quad m^*(E \Delta H_1) \leq m^*(E \setminus H_1) + m^*(H_1 \setminus E)$$

$$< m^*(E \setminus H) + m^*(H \setminus E) + \varepsilon$$

$$< 2\varepsilon .$$

من جهة أخرى ، من تعريف $m^*(E \setminus H_1)$ يوجد غطاء $\{I_1\}$ من $\mathcal{I}$ للمجموعة $E \setminus H_1$ يحقق :

$$m^*(E \setminus H_1) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$$

ومنه نستطيع تشكيل مجموعة مفتوحة H_2 تحوي $E \setminus H_1$ وتحقق :

$$m^*(H_2) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) + \varepsilon/2 < m^*(E \setminus H_1) + \varepsilon$$

بوضع $G = H_1 \cup H_2$ نحصل على مجموعة مفتوحة G تحوي E و تحقق:

$$G \setminus E \subset H_2 \cup (H_1 \setminus E)$$

$$\Rightarrow m^*(G \setminus E) \leq m^*(H_2) + m^*(H_1 \setminus E)$$

$$< m^*(E \setminus H_1) + m^*(H_1 \setminus E) + \varepsilon \quad \text{من}$$

$$= m^*(E \Delta H_1) + \varepsilon$$

$$< 3\varepsilon \quad \text{من } (*)$$

مثال 3-36:

لتكن $E \subset \mathbb{R}$ حيث $m^*(E) = 0$. بين أن E قابلة لقياس ليبيغ.

الحل:

لدينا $m^*(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i),\ I_i \in \mathcal{I},\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\} = 0$

$\Leftarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عائلة من الفترات $\{I_j\}$ تحقق:

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) < \varepsilon .$$

لنضع $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ فإن لدينا: $E \subset G$

و G مفتوحة باعتبارها إتحاد منته أو قابل للعد لمجموعات مفتوحة.

الآن نلاحظ أن:

$$m^*(G \setminus E) \leq m(G) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) < \varepsilon$$

حسب النظرية فإن E قابلة للقياس.

(نظرية التقريب الأولى)

الدوال القابلة للقياس :-

نظرية 37-3 :-

لتكن $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. عندئذ التقارير التالية متكافئة :-

1) $\{x , f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2) $\{x , f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{M}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3) $\{x , f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4) $\{x , f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathcal{M}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

تعريف 38-3 :- (قابلية دالة للقياس)

نقول إن الدالة $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قابلة لقياس لبيق، (أو مجرد قابلة للقياس)، إذا كانت $\Omega \in \mathcal{M}$ وحققت f أحد المتكافئات الأربعة في النظرية السابقة.

نتيجة 39-3 :-

إذا كانت $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قابلة للقياس فإن المجموعة $\{x , f(x) = \alpha\}$ قابلة للقياس لكل $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

البرهان :-

لما $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\{x , f(x) = \alpha\} = \{x , f(x) \leqslant \alpha\} \cap \{x , f(x) \geqslant \alpha\}$

ولما $\alpha = \pm\infty$ فإن :- $\{x , f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x , f(x) > n\}$

$\{x , f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x , f(x) < -n\}$

وبما أن $\mathcal{M}$ جبر سيغما، فإن البرهان إكتمل .

ملاحظة 40-3 :-

قابلية $\{x , f(x) = \alpha\}$ للقياس لا تقتضي قابلية f للقياس .

تعريف 41-3 :-

نقول إن $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قابلة لقياس بوريل إذا كانت

لكل دالتين $f : D_f \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ، $g : D_g \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ نعرف الدوال :

$\max(f,g) = f \vee g$ ، $\min(f,g) = f \wedge g$ ، الجزء الموجب f^+ و الجزء السالب f^-

كما يلي :-

$$f \vee g : D_f \cap D_g \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \ , \ x \longrightarrow (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

$$f \wedge g : D_f \cap D_g \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \ , \ x \longrightarrow (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

$$f^+ : D_f \longrightarrow [0,\infty] \ , \ x \longrightarrow f^+(x) = (f \vee 0)(x) = \max\{f(x), 0\}.$$

$$f^- : D_f \longrightarrow [0,\infty] \ , \ x \longrightarrow f^-(x) = -(f \wedge 0)(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

و نلاحظ أن $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$

و $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$

الآن، لكل متتالية $f_n : D \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ من الدوال و لكل $x \in D$ نعرف الدوال

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : x \longrightarrow \sup\{f_n(x) \ , \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n : x \longrightarrow \inf\{f_n(x) \ , \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$\limsup_{n \to \infty} f_n : x \longrightarrow \limsup_{n \to \infty} f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k$$

$$\liminf_{n \to \infty} f_n : x \longrightarrow \liminf_{n \to \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k$$

نتيجة 47 – 3 :-

1) إذا كانت كل من $f, g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قابلة للقياس فإن الدوال $f \vee g$ ، $f \wedge g$ ، f^+ و f^- كلها دوال قابلة للقياس.

2) إذا كانت $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس، فإن الدوال $\sup f_n$ ، $\inf f_n$ ، $\limsup f_n$ ، $\liminf f_n$ و كذا دالة النهاية $\lim f_n$ كلها دوال قابلة للقياس.

تعريف 48 – 3 :-

نقول إن $f, g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ متساويتان a.e. أي ($f = g$ a.e.) إذا كان $m(\{x \in \Omega \ , \ f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

نظرية 49 – 3 :-

لتكن $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتان حيث $f = g$ a.e. . إذا كانت f قابلة للقياس، فإن g أيضا قابلة للقياس.

تعريف 50 – 3 :

لكل مجموعة $E \subset \mathbb{R}$ نعرف الدالة المميزة لها χ_E بالشكل:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 , & x \in E \\ 0 , & x \in E^c , (x \notin E). \end{cases}$$

واضح أنه: χ_E قابلة للقياس $\Longleftrightarrow$ E قابلة للقياس.

تعريف 51 – 3 :

إذا كانت $\{E_1, \dots, E_n\}$ مجموعة منتهية ومنفصلة من عناصر $\mathcal{M}$ كل تركيبة خطية للدوال الذاتية $\chi_{E_1}, \dots, \chi_{E_n}$ بالشكل

$$(*) \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$$

تسمى دالة بسيطة.

إذا كان $c_i \neq c_j$ لكل $i \neq j$ فإن التمثيل $(*)$ يصبح وحيدا ويسمى التمثيل القانوني لـ φ.

لاحظ أنه إذا كانت φ و ψ دالتين بسيطتين، فإن $k\varphi$ ، $\varphi + \psi$ ، $\varphi\psi$ ، $\varphi \vee \psi$ كلها دوال بسيطة.

نظرية 52 – 3 : (نظرية الكثافة)

إذا كانت $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ قابلة لقياس لبيق، فإنه توجد متتالية (φ_n) من الدوال البسيطة بحيث:

i) $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$

ii) $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \Omega$.

ونرمز لذلك بالرمز $\varphi_n \uparrow f$.

برهانه:

عادة نشكل φ_n إنطلاقا من صور f العكسية كما يلي:

نضع $F_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right)$, $i \in \{1, 2, \dots, n2^n\}$

$$F_{n,\infty} = f^{-1}([n, \infty))$$

ثم نشكل φ_n بالصيغة:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{F_{n,i}} + n \chi_{F_{n,\infty}} .$$

IV - تكامل ليبيغ :

لتكن $\Omega \in \mathcal{M}$ و لنرمز لمجموعة الدوال $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ القابلة للقياس بالرمز $\mathcal{L}^0(\Omega)$ أو $\mathcal{L}^0$.

مجموعة الدوال البسيطة يرمز لها بالرمز $\mathcal{S}(\Omega)$ ولدينا $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$.

نرمز للدوال التي لا تأخذ قيم سالبة بالرمز $\mathcal{L}^0_+$ و $\mathcal{S}^*_+$.

1) تكامل ليبيغ للدوال $\mathcal{S}_+$:

إذا كانت $f \in \mathcal{S}^+(\Omega)$ فإنها تكتب بالشكل $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{E_i}$ حيث $\{E_i, i=1,\dots,m\} \subset \mathcal{M}$ تجزئ لـ Ω (منفصل). نعرف تكامل f على Ω بالنسبة لـ m بالشكل

$$\int_\Omega f \, dm = \sum_{i=1}^{m} c_i \, m(E_i)$$

(هنا نعتبر $0 = \infty . 0$).

لاحظ أن : $\int_\Omega \chi_{E_i} dm = \int_{E_i} dm = m(E_i)$

حيث E_i قابلة للقياس.

ونستطيع أن نبين أن قيمة $\int_\Omega f \, dm$ لا تعتمد على التمثيل $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{E_i}$.

لاحظ أن :

1) إذا كان $f, g \in \mathcal{S}_+$ و $\alpha, \beta \geq 0$ فإن

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \, dm = \alpha \int_\Omega f \, dm + \beta \int_\Omega g \, dm .$$

2) إذا كان $f, g \in \mathcal{S}_+$ و $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in \Omega$ فإن

$$\int_\Omega f \, dm \geq \int_\Omega g \, dm .$$

2) تكامل ليبيغ للدوال $\mathcal{L}^0_+$:

إذا كانت $f \in \mathcal{L}^0_+$ فإننا نعرف تكامل ليبيغ لها على أنه :

$$\int_\Omega f\,dm = \sup\left\{ \int_\Omega \varphi\,dm \,,\ \varphi \in \mathcal{S}_+(\Omega) \,,\ \varphi \leq f \right\}$$

من نظرية سابقة، كل دالة موجبة و قابلة للقياس عبارة عن نهاية متتالية متزايدة من الدوال البسيطة الموجبة. لذا نستطيع إيجاد التكامل بطريقة مماثلة لتكاملات الدوال $\mathcal{S}_+$:

نظرية 1-4 :

لنفرض أن $f \in \mathcal{L}_+(\Omega)$ وأن (φ_n) متتالية من $\mathcal{S}_+(\Omega)$ بحيث $\varphi_n \nearrow f$. إذاً :

$$\int_\Omega f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n\,dm .$$

مثال 2-4 :

لتكن $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة ب $f(x) = x$. أحسب $\int_{[0,1]} f\,dm$.

الحل :

من نظرية تقريب دوال $\mathcal{L}_+^0$ بعناصر $\mathcal{S}_+$ لدينا :

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n}\, \chi_{\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]}$$

حيث $\varphi_n \in \mathcal{S}_+$ و $\varphi_n \nearrow f$.

حسب النظرية السابقة لدينا :

$$\int_{[0,1]} f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \varphi_n\,dm$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n}\, m\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{2^n(2^n-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} .$$

نظرية 3-4 :

1) $\int_\Omega (\alpha f+\beta g)\,dm = \alpha\int_\Omega f\,dm + \beta\int_\Omega g\,dm,\ \forall \alpha,\beta\geq 0,\ \forall f,g\in\mathcal{L}^0_+$

2) $f(x)\geq g(x),\ \forall x\in\Omega \Rightarrow \int_\Omega f\,dm \geq \int_\Omega g\,dm,\ \forall f,g\in\mathcal{L}^0_+$

3) تكامل ليبيق للدوال $\mathcal{L}^0$:

بما أن كل $f\in\mathcal{L}^0(\Omega)$ تكتب على الشكل $f=f^+-f^-$ ،
وكل من f^- و f^+ دالة من $\mathcal{L}^0_+$ وكنا قد عرفنا
تكامل دالة من $\mathcal{L}^0_+$ فإن :

$$\int_\Omega f\,dm = \int_\Omega f^+\,dm - \int_\Omega f^-\,dm.$$

نقول إن f قابلة لتكامل ليبيق على Ω إذا كان

$$\int_\Omega f\,dm \in \mathbb{R}$$

أي إذا كان $\int_\Omega f^+\,dm<\infty$ و $\int_\Omega f^-\,dm<\infty$.

نرمز لمجموعة الدوال القابلة لتكامل ليبيق بالرمز $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

ملاحظة 4-4 :

1) $f\in\mathcal{L}^1(\Omega) \Rightarrow |f|\in\mathcal{L}^1(\Omega)$.

كذلك

$$\left.\begin{array}{l}|f|\in\mathcal{L}^1(\Omega)\\ f\in\mathcal{L}^0(\Omega)\end{array}\right\}\Rightarrow f\in\mathcal{L}^1(\Omega)$$

2)

$$\left.\begin{array}{l}f\in\mathcal{L}^0(\Omega)\\ E\subset\Omega,\ m(E)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}f\in\mathcal{L}^1(E)\\ \int_E f\,dm=0\end{array}$$ و

3)

$$\left.\begin{array}{l}\Omega\supset E\in\mathcal{M}\\ f\in\mathcal{L}^1(\Omega)\end{array}\right\}\Rightarrow \int_E f\,dm=\int_\Omega f\,\chi_E\,dm.$$

خواص تكامل ليبيغ 5-4 :

1) $E, F \in \mathcal{M}$ جزئيتين منفصلتين من Ω . فإن :

$$f \in \mathcal{L}^1(E) \cap \mathcal{L}^2(F) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(E \cup F)$$

و $\int_{E \cup F} f\, dm = \int_E f\, dm + \int_F f\, dm$.

2) $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $f = g$ a.e. $\Rightarrow g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $\int_\Omega f\, dm = \int_\Omega g\, dm$

3) إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $m\{x \in \Omega, |f(x)| = \infty\} = 0$.

4) إذا كانت $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $f + g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ كما أن :

$$\int_\Omega (f+g)\, dm = \int_\Omega f\, dm + \int_\Omega g\, dm .$$

5) $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in \mathcal{L}^1$ و $\int_\Omega cf\, dm = c \int_\Omega f\, dm$

6) $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $f(x) \geq g(x)$ a.e. $\Rightarrow \int_\Omega f\, dm \geq \int_\Omega g\, dm$

7) $\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \text{ a.e. على } \Omega \\ \text{و } \int_\Omega f\, dm = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0$ a.e.

8) $\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \\ \int_E f\, dm = 0, \forall E \in \mathcal{M}, E \subset \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow$ على Ω $f = 0$ a.e.

مثال 6-4 : احسب $\int_{[-1,2]} x^3\, dx$.

الحل :

بأخذ $f^-(x) = x^3 \chi_{[-1,0]}$ و $f^+(x) = x^3 \chi_{[0,2]}$ و

طريقة إنشاء :

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{2(i-1)}{2^n}\right)^3 \chi_{\left[\frac{2(i-1)}{2^n}, \frac{2i}{2^n}\right)} , \quad \psi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right)^3 \chi_{\left[\frac{-i}{2^n}, \frac{-(i-1)}{2^n}\right)}$$

فإن $\varphi_n \nearrow f^+$ و $\psi_n \nearrow f^-$ فنجد :

$$\int_{[-1,2]} f^+\, dm = \lim_{n \to \infty} \int_{[-1,2]} \varphi_n\, dm = \cancel{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{(i-1)^2}{2^{3n}} (2)^3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{(i-1)^3}{2^{3(n-1)}} \left(\frac{i}{2^{n-1}} - \frac{i-1}{2^{n-1}} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^{4(n-1)}} (i-1)^3$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{4(n-1)}} \sum_{k=1}^{2^n-1} k^3$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{4(n-1)}} \left(\frac{2^n(2^n-1)}{2} \right)^2 = 4 .$$

بنفس الطريقة فإن

$$\int_{[-1,2]} f^- \, dm = \lim_{n \to \infty} \int_{[-1,2]} \psi_n \, dm$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i}{2^n} \right)^3 \left(\frac{1-i}{2^n} + \frac{i}{2^n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i^3}{2^{4n}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{2^n(2^n-1)}{2} \right)^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

الآن كل من $\int_{[-1,2]} f^+ dm < \infty$ و $\int_{[-1,2]} f^- dm < \infty$ ، إذاً

$$\int_{[-1,2]} x^3 \, dm = \int_{[-1,2]} f^+ dm - \int_{[-1,2]} f^- dm = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

نظريات التقارب في تكامل ليبيغ:

1 نظرية التقارب المطرّد (Monotone Convergence theorem) 4-7:

إذا كانت $f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $f_n \nearrow f$ فإن $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ وعندئذ

$$\int_\Omega f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dm.$$

برهان:

(f_n) قابلة للقياس $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ قابلة للقياس (نظرية سابقة)

$\Leftarrow$ $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

لكل $f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ يوجد $(\varphi_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_+$ بحيث $\varphi_{nk} \nearrow f_n$.

نعرف المتتالية: $\psi_k = \max\{\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \dots, \varphi_{kk}\}$

فنجد: $\psi_k \in \mathcal{S}_+(\Omega)$ وهي متزايدة $\psi_1 \le \psi_2 \le \dots$

فمن النظرية السابقة لدينا: بما أن $\psi_k \nearrow f$

$$\int_\Omega f\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi_k\,dm.$$

من جهة أخرى نستطيع إثبات أن $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi_k\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dm$

ومنه نجد $\int_\Omega f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dm$.

لاحظ: النظرية ليست صحيحة في تكامل ريمان.

نتيجة 4-8:

لتكن (f_n) متتالية من $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ بحيث:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in \Omega$$

فإن $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ ولدينا:

$$\int_\Omega f\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n\,dm.$$

نتيجة 4-9: إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$E \in \mathcal{M},\ E \subset \Omega,\ m(E) < \delta \Rightarrow \left|\int_E f\,dm\right| < \varepsilon$$

أي أن $\lim_{m(E)\to 0} \int_E f\,dm = 0$.

برهان :

1) نعرف $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ ونلاحظ أن $g_n \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$

و $g_n \nearrow f$ فيكون $f \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$.

بتطبيق نظرية التقارب المطرد نجد :

$$\int_\Omega f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\,dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega f_k\,dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f_k\,dm .$$

2) (يسمى هذه النتيجة نظرية الاتصال.)

لكل $n \in \mathbb{N}$ نعرف

$$f_n(x) = \begin{cases} |f(x)| , & |f(x)| \leq n \\ n , & |f(x)| > n . \end{cases}$$

واضح أن $f_n \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$ و أن $f_n \nearrow |f|$.

من نظرية التقارب المطرد نجد

$$\int_\Omega |f|\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dm$$

ليكن $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$ لدينا

$$\int_\Omega (|f| - f_n)\,dm < \varepsilon/2$$

بأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ فإذا كان $m(E) < \delta$ نلاحظ أن

$$\left|\int_E f\,dm\right| \leq \int_E |f|\,dm = \int_E f_N\,dm + \int_E (|f| - f_N)\,dm$$

$$\leq N\,m(E) + \int_\Omega (|f| - f_N)\,dm < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

وذلك لأن $f_N \leq N$ ، $|f| - f_m \geq 0$ و $m(E) < \delta = \frac{\varepsilon}{2N}$.

تعريف 1-4

نعرف $\liminf$ و $\limsup$ كما يلي :

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} f_k(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x).$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x).$$

تمرين: $f_n \in \mathcal{L}^0(\Omega) \Leftarrow \limsup f_n$ و $\liminf f_n \in \mathcal{M}$.

2) تمهيدية فاتو 4-11 (Fatou's Lemma):

إذا كانت (f_n) متتالية في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ فإن $\liminf f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

كما أن $\int_\Omega \liminf f_n \, dm \leq \liminf \int_\Omega f_n \, dm$.

برهان:

من التمرين أعلاه فإن $\liminf f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$. فلنتحقق من الباقي.

نضع $\psi_n = \inf\{f_k , k \geq n\}$ و $\psi = \liminf f_n$

$$\Rightarrow \psi_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega) \text{ و } \psi_n \nearrow \psi .$$

نظرية التقارب المطرد 4-7 تعطي

$$\int_\Omega \psi \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_n \, dm .$$

$$= \liminf \int_\Omega \psi_n \, dm = \limsup \int_\Omega \psi_n \, dm \quad (1)$$

بما أن $\psi_n \leq f_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$\int_\Omega \psi_n \, dm \leq \int_\Omega f_n \, dm$$

$$\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_n \, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm . \quad (2)$$

خلاصة النظرية نحصل عليها من (1) و (2).

3) نظرية التقارب المسقوف: "Dominated Convergence theorem" 4-12:

لنفرض أن $(f_n) \subset \mathcal{L}^0(\Omega)$ وأن $f_n \longrightarrow f$ a.e.

إذا وجدت $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{a.e.} \quad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ولدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm = \int_\Omega f \, dm .$$

برهان :- النتيجة 3-47

$f_n \longrightarrow f$ a.e. $\Leftarrow$ $f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ من نظرية سابقة . و بما أن

$|f_n| \leq g$ a.e. و بالتالي $|f| \leq g$ a.e. و منه :

$\int_\Omega |f_n| dm \leq \int_\Omega g\, dm < \infty$ و $\int_\Omega |f| dm \leq \int_\Omega g\, dm < \infty$ $\Leftarrow$ $(f_n) \subset \mathcal{L}^1(\Omega)$

و $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

الآن لنضع $h_n = 2g - |f_n - f|$ $\Leftarrow$ $h_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

$\left(|f_n - g| \leq |f_n| + |g| \leq 2g \Rightarrow 2g - |f_n - f| \geq 0 \right.$

$\left. \text{كذلك } f_n , f \text{ و } g \text{ قابلة للقياس} \Rightarrow h_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega) \right)$

تمهيدية فاتو تستلزم أن :

$$\int_\Omega \liminf h_n\, dm \leq \liminf \int_\Omega h_n\, dm$$

و بما أن $h_n \longrightarrow 2g$ نقطيا (وذلك لأن $f_n \longrightarrow f$) فإن :

$$\int_\Omega 2g\, dm \leq \liminf \left(\int_\Omega 2g\, dm - \int_\Omega |f_n - f| dm \right)$$

$$= \int_\Omega 2g\, dm - \limsup \int_\Omega |f_n - f| dm$$

$$\Rightarrow \limsup \int_\Omega |f_n - f| dm \leq 0$$

لكن $\int_\Omega |f_n - f| dm \geq 0$ $\Leftarrow$ $\liminf \int_\Omega |f_n - f| dm \geq 0$

ومنه $\lim \int_\Omega |f_n - f| dm = 0$ ، $(\liminf \leq \limsup)$

بما أن $\left| \int_\Omega f_n\, dm - \int_\Omega f\, dm \right| \leq \int_\Omega |f_n - f| dm$

فإن النتيجة محققة .

ملاحظة 3-43 لاحظ أن النظرية تعطي $\lim \int_\Omega |f_n - f| dm = 0$

و هي أقوى من $\lim \int_\Omega f_n\, dm = \int_\Omega f\, dm$.

4) نتيجة :- (نظرية التقارب المحدود) 4-14 :-

إذا كانت $m(\Omega) < \infty$ وكانت (f_n) متتالية محدودة في $\mathcal{L}^0(\Omega)$ و $f_n \longrightarrow f$ a.e. فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ولدينا

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, dm = \int_\Omega f \, dm.$$

برهان :- تمرين (طبق DCThm).

نتيجة 4-15 :-

إذا كانت $f_t \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ لكل $t \in I$ (وسيط حقيقي) فترة وكانت

$$\lim_{t \to t_0} f_t(x) = f(x) \quad a.e. \quad , t_0 \in \overline{I},$$

وإذا وجدت دالة $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث :

$$|f_t(x)| \leq g(x) \quad a.e. \quad , \forall \, t \in I$$

فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ولدينا :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} \int_\Omega f_t \, dm = \int_\Omega f \, dm.$$

برهان :- تمرين.

نتيجة 4-16 :-

لتكن (f_n) متتالية من عناصر $\mathcal{L}^1(\Omega)$. إذا كان

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |f_n| \, dm < \infty$$

فإن هناك $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a.e.

ولدينا

$$\int_\Omega f \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, dm$$

برهان :- تمرين.

تكامل ليبيق وتكامل ريمان :

تكامل ليبيق إمتداد لتكامل ريمان .

نظرية 4-17 :

لتكن f دالة محدودة على $I=[a,b]$ (فترة متراصة).

إذا كانت $f\in\mathcal{R}(a,b)$ فإن $f\in\mathcal{L}^1(I)$ وعندئذ

$$\int_{[a,b]} f\,dm=\int_a^b f(x)\,dx.$$

برهان :

ليكن $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تجزيئا للفترة I . لنعرف الدالتين ψ_P و φ_P على I بالشكل :

$$M_i=\sup\{f(x),x_i\leq x\leq x_{i+1}\}\ ,\ \psi_P=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\,\chi_{[x_i,x_{i+1}]}$$

و

$$m_i=\inf\{f(x),x_i\leq x\leq x_{i+1}\}\ ,\ \varphi_P=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\,\chi_{[x_i,x_{i+1}]}$$

ولنلاحظ أن :

1) $\varphi_P\leq f\leq\psi_P\ ,\ \psi_P,\varphi_P\in\mathcal{E}(I)$

2) $\int_I\psi_P\,dm=\mathcal{U}(f,P)\ ,\ \int_I\varphi_P\,dm=L(f,P)$

3) $P\subset Q\Rightarrow\psi_Q\leq\psi_P$ و $\varphi_Q\geq\varphi_P$

نختار متتالية من التجزيئات (P_n) لـ I بحيث :

$\|P_n\|\longrightarrow 0$, $P_{n+1}\supset P_n$ لكل n .

ثم نضع $\psi_n=\psi_{P_n}$ و $\varphi_n=\varphi_{P_n}$ فإن (ψ_n) متناقصة و (φ_n) متزايدة ، ولدينا تعريفا :

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\ ,\ \psi(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)$$

من الواضح أن : $\varphi,\psi\in\mathcal{L}^0(\Omega)$ و $\varphi\leq f\leq\psi$

بما أن f دالة محدودة فإن $(\psi_n-\varphi_n)$ متتالية محدودة فنطبق نظرية التقارب المحدود ونظرية داربو لنجد

$$\int_I(\psi-\varphi)\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_I(\psi_n-\varphi_n)\,dm$$

$$=\lim_{n\to\infty}\big(\mathcal{U}(f,P_n)-L(f,P_n)\big)$$

$$=\mathcal{U}(f)-L(f)=0\ ,\ (\text{لأن } f\in\mathcal{R}(a,b))$$

بما أن $\psi - \varphi \geq 0$ على I فإن $\psi - \varphi = 0$ a.e.

$$\Leftarrow \quad f = \varphi = \psi \quad \text{a.e.}$$

$\Leftarrow$ $f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ ، ولدينا :

$$\int_I f\,dm = \int_I \varphi\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n\,dm$$

$$= \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = L(f)$$

$$= \int_a^b f\,dx.$$

نظرية 18-4 :

لتكن f دالة محدودة على $I=[a,b]$ مجال اتصالها على $C\subset I$.
عندئذ، $f\in R(a,b)$ إذا وفقط إذا كان $m(I\setminus C)=0$، أي أن
f قابلة لتكامل ريمان إذا وفقط إذا كانت متصلة a.e.

برهان :-

لتكن P_n، ψ_n، φ_n، ψ و φ كما في برهان النظرية السابقة.

* $f\in R(a,b) \Rightarrow m(I\setminus C)=0$:-

يكفي أن نثبت أن $I\setminus C\subset E\cup\{x\in I,\ \psi(x)\neq\varphi(x)\}$
حيث $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n$ هي المجموعة المكونة من جميع نقاط التجزيئات P_n، وذلك لأن $m(E)=0$ (E قابلة للعد) وكذلك
$m\{x\in I,\ \psi(x)\neq\varphi(x)\}=0$ لأن $\psi=\varphi$ a.e. (من برهان النظرية السابقة)
لتكن $x\in I\setminus C$ فإنه يوجد $\varepsilon>0$ ومتتالية (x_k) في I
بحيث $x_k\to x$ و $|f(x_k)-f(x)|\geq\varepsilon$.
إذا كانت $x\notin E$ فلكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد k بحيث
تقع x و x_k في الفترة الجزئية نفسها من P_n. لكن
$|f(x_k)-f(x)|\geq\varepsilon \Rightarrow \psi_n(x)-\varphi_n(x)\geq\varepsilon$
$\Rightarrow \psi(x)-\varphi(x)\geq 0$. (أي $\psi(x)\neq\varphi(x)$).

* $m(I\setminus C)=0 \Rightarrow f\in R(a,b)$:-

إذا كانت $x\in C$ فلكل $\varepsilon>0$ نستطيع اختيار $\delta>0$ بحيث
$x'\in(x-\delta,x+\delta) \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$. (**)
بما أن $\|P_n\|\to 0$ فنستطيع اختيار N بحيث الفترة
الجزئية من P_N التي تحتوي x محتواة بكاملها في
$(x-\delta,x+\delta)$. من (**) نجد
$\psi_N(x)-\varphi_N(x)\leq 2\varepsilon \Rightarrow \psi(x)-\varphi(x)\leq 2\varepsilon$.
الآن ε اختياري $\Rightarrow \varphi(x)=\psi(x)$. لكن $m(I\setminus C)=0$ فإن
$\varphi=\psi$ a.e. $\Rightarrow U(f)=L(f)$ (حسب برهان النظرية السابقة)
$\Rightarrow f\in R(a,b)$.

تعريف 19-4 :-

تسمى الدالة البسيطة $\varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{E_i}$ دالة درجية (step fct)
إذا كانت E_i فترة حقيقية لكل $1 \leq i \leq m$.

نظرية 20-4 :-

إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد

i) دالة درجية ψ على Ω و فترة متراصة I بحيث

$$\psi(x) = 0, \ \forall x \notin I, \quad \int_\Omega |f - \psi| \, dm < \varepsilon$$

ii) دالة متصلة g على Ω و فترة متراصة I بحيث

$$g(x) = 0, \ \forall x \notin I \quad \text{و} \quad \int_\Omega |f - g| \, dm < \varepsilon.$$

برهان :-

i) نفرض أن $f = \chi_E$ حيث E قابلة للقياس من Ω. $f \in \mathcal{L}^1 \Leftarrow m(E) < \infty$
$\Leftarrow$ يوجد $F \in \mathcal{E}$ بحيث $m(E \Delta F) < \varepsilon$. نأخذ $\psi = \chi_F$
(درجية) و تحقق $\int_\Omega |f - \psi| \, dm \leq m(E \Delta F) < \varepsilon$.

ثم نأخذ $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}$ ونطبق ما سبق على كل حالة k.

ثم نأخذ $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ فنجد $\varphi \in S_+(\Omega)$ بحيث $\varphi \leq f$
فتوجد ψ درجية من (الحالة الثانية) تحقق $\int_\Omega |\varphi - \psi| \, dm < \varepsilon/2$

$$\Rightarrow \int_\Omega |f - \psi| \, dm \leq \int_\Omega |f - \varphi| \, dm + \int_\Omega |\varphi - \psi| \, dm < \varepsilon.$$

أخيرا نأخذ $f \in \mathcal{L}^1$ ونقسمها $f = f^+ - f^-$ فتوجد ψ_1, ψ_2
فتضع $\psi = \psi_1 - \psi_2$ لنجد $\int_\Omega |f - \psi| \, dm \leq \int_\Omega |f^+ - \psi_1| \, dm + \int_\Omega |f^- - \psi_2| \, dm < \varepsilon$.

ii) نأخذ ψ درجية تنعدم خارج فترة I و $\int_\Omega |f - \psi| \, dm < \varepsilon/2$
$\psi = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{[a_i, b_i)}$ حيث $[a_i, b_i)$ متقاطعة. نعرف $g_i : [a_i, b_i) \longrightarrow \mathbb{R}$

بـ

$$g_i = \begin{cases} \dfrac{2(x - a_i)}{\varepsilon'}, & x \in [a_i, a_i + \varepsilon'/2) \\ 1, & x \in [a_i + \varepsilon'/2, b_i - \varepsilon'/2) \\ -\dfrac{2(x - b_i)}{\varepsilon'}, & x \in [b_i - \varepsilon'/2, b_i) \\ 0 & x \notin [a_i, b_i) \end{cases}$$

ثم نضع $g = \sum_{i=1}^{k} c_i g_i$ متصلة

و $\int_\Omega |f - g| \, dm < \varepsilon$.

١١ / ١٤٣٢هـ

٣٨٤ ريض - تمارين

I- تكامل ريمان

1) ليكن $0 < a < b$ ولتكن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} , & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} , x = \frac{p}{q} , (p,q) = 1 \\ 0 , & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

بين أن f قابلة للتكامل بمفهوم ريمان ثم احسب $\int_a^b f(x)dx$.

الحل :

ليكن P تجزئ لـ $[a,b]$. إذا كان $P = \{x_1 = a < x_2 < \dots < x_n = b\}$

فإن $\inf\{f(x) , x_i < x < x_{i+1}\} = 0$

وذلك لأن $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow L(P,f) = 0$

ومنه $L(f) = \sup_P L(P,f) = 0$.

لنبين أن أيضا لدينا $U(f) = \inf_P U(P,f) = 0$.

ليكن $\varepsilon > 0$ مثبت. لاحظ أن المجموعة

$$B_\varepsilon = \left\{ \frac{p}{q} \in [a,b] \cap \mathbb{Q} , (p,q) = 1 \text{ و } \frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right\}$$

منتهية.

دون المساس بعمومية المسألة، لنفرض أن $B_\varepsilon \neq \phi$ وأنها تحوي $n \geq 1$ عنصر. لنضع $B_\varepsilon = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$.

$x_n < b$ و $a < x_1$.

ليكن $m \geq 1$ كبير بقدر كاف ليحقق

$$\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2n} , \quad x_i + \frac{1}{2m} < x_{i+1} - \frac{1}{2m} , \quad a < x_1 - \frac{1}{2m} , \quad x_n + \frac{1}{2m} < b$$

لنعتبر التجزئ $P_0 = \{a , x_i - \frac{1}{2m} , x_i + \frac{1}{2m} , b\}$

بما أن $0 \leq f(x) \leq 1$ لكل $x \in [a,b]$ فإن

$$0 \leq \sup\{f(x) , x_i - \frac{1}{2m} \leq x \leq x_i + \frac{1}{2m}\} \leq 1.$$

على أي فترة أخرى I مرفقة بالتجزئ لدينا

$$0 \leq \sup\{f(x) , x \in I\} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

وذلك لأن $I \cap B_\varepsilon = \phi$.

ومنه $0 \le \mathcal{U}(P_0, f) \le M\frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

إذا كان $x_1 = a$ فإننا نأخذ فقط الفترة $[a, a+\frac{1}{m}]$ و

أما إذا كان $x_m = b$ فإننا نأخذ الفترة $[b-\frac{1}{m}, b]$ فقط.

بنفس الطريقة نبين أن $\mathcal{U}(P_0, f) \le \varepsilon$. ومنه $\inf \mathcal{U}(P, f) = 0$

حيث $\inf$ يؤخذ على كل التجزيئات لـ $[a, b]$.

ومنه f قابلة للتكامل على $[a, b]$ مع

$$\mathcal{U}(f) = L(f) = 0.$$

2) لنفرض أن $0 < a < b$ وأن $f(x) = \begin{cases} 0 , & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ x , & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$.

أوجد تكامل ريمان العلوي $\mathcal{U}$ وتكامل ريمان السفلي L على $[a,b]$ وتحقق فيما إذا كانت $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

الحل:-

ليكن P تجزيئ للفترة $[a,b]$. إذا كان $P = \{x_1 = a < x_2 < \dots < x_m = b\}$

فإن $\sup\{f(x), x_i < x < x_{i+1}\} = x_{i+1}$ و $\inf\{f(x), x_i < x < x_{i+1}\} = 0$

وذلك لأن $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ كثيفتان في $\mathbb{R}$. ومنه نجد

$L(P, f) = 0$ و

$$\mathcal{U}(P, f) = x_2(x_2 - x_1) + \dots + x_i(x_i - x_{i-1}) + \dots + x_m(x_m - x_{m-1})$$
$$= \mathcal{U}(P, h)$$

حيث h هي الدالة $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ والمعرفة بـ $h(x) = x$.

بما أن $h(x)$ متصلة فإنها قابلة للتكامل ولدينا

$$\mathcal{U}(h) = \inf(P, h) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

حيث الحد الأدنى مأخوذ على كل التجزيئات لـ $[a,b]$.

ومنه نجد: $L(f) = \sup L(P, f) = 0$

و $\mathcal{U}(f) = \inf \mathcal{U}(P, f) = \frac{b^2 - a^2}{2}$

بما أن $L(f) = 0 < \mathcal{U}(f) = \frac{b^2-a^2}{2}$ فإن $f \notin \mathcal{R}(a,b)$.

3) إستعمل مجاميع ريمان لإيجاد النهايات التالية :-

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2+k^2}$$

- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)$ ، إستعمل $x-\frac{x^3}{3}<\tan^{-1}x$ لكل $x>0$.

- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)$ ، إستعمل الدالة $f(x)=\frac{\tan x}{x}$.

الحل :-

1) $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$ ، $[0,1]$ والقيمة $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) ~~$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$~~ لدينا :

$$\frac{n}{n^2+k^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3\leq\tan^{-1}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)\leq\frac{n}{n^2+k^2}$$

لدينا :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

كذلك :-

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2}\right)^3=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

$$\Leftarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3=0$$

ومنه $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

3) بإستعمال الدالة $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ فإن

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)=\sum_{n=1}^{n}\frac{\pi}{4n+4}f\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)$$

ولدينا $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4n+4}f\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx$

ومنه $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\,dx$

لاحظ أن الدالة $\frac{\tan x}{x}$ يمكن تمديدها بالإتصال عند $x=0$ على $[0,\frac{\pi}{4}]$ بوضع $f(0)=1$ ومنه $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\,dx$ موجود.

4) أحسب النهايات :-

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 n x (1-x^2)^n\,dx$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{\sin(nx)}{x}\,dx$

الحل :-

1) $$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^\delta \frac{x^n}{1+x}\,dx + \int_\delta^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

لدينا $0 \leq \int_0^\delta \frac{x^n}{1+x}\,dx \leq \int_0^\delta x^n\,dx \leq \delta^n \int_0^\delta dx = \delta^{n+1}$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0.$$

لنثبت $\varepsilon \in (0,1)$ ولنضع $\delta = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ ومنه $\delta \in (0,1)$.

إذا يوجد $N \geq 1$ يحقق

$$0 \leq \int_0^\delta \frac{x^n}{1+x}\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \forall\, n \geq N.$$

من جهة أخرى لدينا

$$0 \leq \int_\delta^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leq \int_\delta^1 dx = 1-\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\Leftarrow$ $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx < \varepsilon$ لكل $n \geq N$.

2) النهاية بحساب التكامل مباشرة تساوي $\frac{1}{2}$.

3) بالتجزئ نجد

$$\int_1^2 \frac{\sin(nx)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{nx}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{\cos(nx)}{nx}\,dx$$

ومنه

$$= \frac{\cos n}{n} - \frac{\cos(2n)}{2n} + \frac{1}{n}\int_1^2 \frac{\cos(nx)}{x}\,dx.$$

بما أن $\left|\frac{\cos n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ ، $\left|\frac{\cos 2n}{2n}\right| \leq \frac{1}{2n}$ و

$$\left|\int_1^2 \frac{\cos nx}{x}\,dx\right| \leq \int_1^2 \left|\frac{\cos nx}{x}\right| dx \leq \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{\sin(nx)}{x}\,dx = 0.$$

5) تحقق فيما إذا كانت التكاملات التالية متقاربة أو متباعدة :-

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

2) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ ، وهل هو متقارب مطلقا ؟

3) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\, dx$.

الحل :-

1) $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ لكل $x \geq 1$.

بما أن التكامل $(3/2 > 1)$ و $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ متقارب

فإن $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ متقارب.

2)

بإستعمال التكامل بالتجزئ نجد

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\, dx \ , \ \forall A > 1.$$

بما أن $\lim_{A \to \infty} \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^A = \frac{\cos 1}{1} = \cos 1$

والتكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ متقارب مطلقا (لأن $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ و $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}\, dx$ متقارب) ، فإن

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ متقارب.

لنبين أنه غير متقارب مطلقا. فلنبرهن ذلك بنقض الفرض أن $\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ متقارب.

لدينا

$$\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

إذا المتسلسلة الأخيرة متقاربة. لكنه

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x+n\pi)|}{x+n\pi}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{|(-1)^n \sin x|}{x+n\pi}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi}\, dx .$$

بما أن $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi}\,dx \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi+n\pi} = \frac{2}{(n+1)\pi}$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}$ متقاربة، وهذا تناقض

3) $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$ متقارب $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$ متقارب.

بما أن $\frac{x}{1+x^2\sin^2 x} \geq \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{1}{2x}$ ، $\forall x \geq 1$

فإن $\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$ وبالتالي $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$ ~~متقارب~~ متباعد

لأن $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x}$ متباعد.

6) ليكن $a>0$. ناقش تقارب $I_a = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^a}$.

الحل:

$$I_a = \lim_{M\to\infty} \int_2^{M} \frac{dx}{x(\ln x)^a}$$

نضع $u = \ln x$ فإن

$$\int_2^{M} \frac{dx}{x(\ln x)^a} = \frac{(\ln M)^{1-a} - (\ln 2)^{1-a}}{1-a}, \quad a \neq 1$$

1) إذا كان $a<1$ فإنه يتباعد.

2) إذا كان $a=1$ فإن

$$\int_2^{M} \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln M) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

3) إذا كان $a>1$ فإن

$$\int_2^{M} \frac{dx}{x(\ln x)^a} \longmapsto \frac{(\ln 2)^{1-a}}{a-1}, \quad M\to\infty$$

وبالتالي:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln a)^a} = \frac{(\ln 2)^{1-a}}{a-1}.$$

II متتاليات الدوال :

1) لتكن $\{f_n\}$ متتالية دوال معرفة ب $f(x)=\frac{1}{1+x^n}$ لكل $x\in[0,1]$.

1) أوجد النهاية النقطية $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.

2) بين أن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام إلى f على $[0,a]$ لكل $0<a<1$.

3) بين أن $\{f_n\}$ لا تتقارب بانتظام على $[0,1]$.

2) لتكن $\{f_n\}$ متتالية دوال حيث $f_n(x)=\frac{nx}{e^{nx}}$ حيث $x\in[0,2]$

1) بين أن $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ حيث $x\in(0,2]$.

2) بين أن هذا التقارب غير منتظم على $[0,2]$.

3) أدرس تقارب المتتاليات على D :

1) $D=[0,1]$, $f_n(x)=\frac{1}{1+(nx-1)^2}$.

2) $D=[0,1]$, $f_n(x)=nx^n(1-x)$.

3) $D=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$.

الحل :

1) النهاية هي $f(x)=\begin{cases}0 & , x\in(0,1]\\ \frac{1}{2} & , x=0\end{cases}$.

f_n متصلة لكل n و f غير متصلة إذاً ليس هناك تقارب منتظم.

2) النهاية هي $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

لكل $n\geq 2$ لدينا : $f_n'(x)=nx^{n-1}(n-(n+1)x)$.

إذاً $f_n'(x)=0 \iff x=0$ أو $x=\frac{n}{n+1}$.

$\sup\{|f_n(x)-0| , x\in[0,1]\}=f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

لكن $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}\neq 0$

ومنه التقارب غير منتظم.

3) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right) = 0$$

لإيجاد max نحسب المشتقة :-

$$f_n'(x) = \frac{2n^3 - 2x^2}{(x^2+n^3)^2 + 4x^2}$$

إذا $f_n'(x) = 0 \iff x = \pm n\sqrt{n}$ ، ومنه

$$\sup\{|f_n(x) - 0| , x \in \mathbb{R}\} = f_n(n\sqrt{n}) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

بما أن $\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x)-0| , x\in\mathbb{R}\} = 0$ فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام إلى 0 على $\mathbb{R}$.

4) لتكن $\{f_n\}$ متتالية دوال معرفة بـ $f_n(x) = x - x^n$.

1) أحسب نهايتها النقطية.

2) هل هناك تقارب منتظم على $[0,1]$ ؟

3) ماذا عن الفترة $[0,a]$ و $0 < a < 1$ ؟

5) لتكن $\{f_n\}$ متتالية دوال $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ متقاربة بانتظام على $[-1,1]$ إلى $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0} f_n(x) = a_n$ موجودة لكل $n \in \mathbb{N}$ والنهاية $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ موجودة فأثبت أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة أيضا و $\lim_{x\to 0} f(x) = a$.

أعط مثالا مضادا لتوضيح أن هذه النتيجة ليست صحيحة لو كان هناك تقارب نقطي فقط.

الحل :-

$\forall \varepsilon > 0 , \exists N_1 \in \mathbb{N} , \forall n \geq N_1$:-

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ و $\forall x \in [-1,1]$.

$\exists N_2 \in \mathbb{N} , \forall n \geq N_2$:- $|a_n - a| < \varepsilon/3$.

نضع $N > \max\{N_1, N_2\}$. بما أن $\lim_{x \to 0} f_N(x)$ موجودة فإن

$\exists\, \delta > 0$ و $|f_N(x) - a_N| < \varepsilon/3$, $0 < |x| < \delta$.

إذاً، إذا كانت $0 < |x| < \delta$ فإن

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - a_N| + |a_N - a|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon .$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = a .$$

إذا كانت $f_n(x) = (1-x^2)^n$ على $[-1, 1]$ فإن

$f_n \to f$ لما $n \to \infty$ حيث $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

من الاتصال f_n فإن :-

$$a_n = \lim_{x \to 0} f_n(x) = 1 \quad , \forall n$$

و $a_n \to 1$ لما $n \to \infty$.

من جهة أخرى $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1$

هذه النتيجة تعني أن التقارب المنتظم يسمح لنا باستبدال النهايات :-

$$\lim_{x \to 0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 0} f_n(x) .$$

6) لتكن $\{f_n\}$ متتالية دوال $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث

$$f_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{1 + n^2 x^2}} .$$

أوجد النهاية النقطية لهذه المتتالية لما $n \to \infty$.

هل تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$ ؟ علل إجابتك .

الجواب :-

$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ والتقارب غير منتظم .

7) لتكن $f_n(x) = \dfrac{nx + \sin(nx^2)}{n}$.

بين أن النهاية التالية موجودة واحسبها :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx .$$

الجواب :- $f_n \xrightarrow{u} f(x) = x$ على $[0,1]$ ، وبالتالي :

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2} .$$

8) لتكن $f_n(x) = \dfrac{n + \sin nx}{3n + \sin^2 nx}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

1) بين أن $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

2) أحسب $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx$.

الجواب 1) باستعمال نظرية الحصر نجد $f_n \xrightarrow{u} f(x) = \frac{1}{3}$

2)
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

9) لتكن $f_n , g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{n x^2}{1 + n^2 x^2} \quad , \quad g_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$$

1) أوجد النهايات النقطية لـ $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$.

2) أدرس التقارب المنتظم لهما .

الجواب :-

$g_n(x) \longrightarrow g(x) = \begin{cases} 1/x , & 0 < x \leq 1 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$. بما أن g ليست متصلة بينما g_n دوال متصلة فتقاربها غير منتظم .

$f_n \longrightarrow f(x) = 0$. ولكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ بحيث لكل $n \geq N$ على أن $|f_n(x)| = \frac{1}{n}\left(\frac{n x^2}{1/n + n x^2}\right) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ لكل $x \in [0,1]$ ومنه $f_n \xrightarrow{u} f$.

تمارين على المتسلسلات

1) أدرس التقارب المنتظم للمتسلسلات :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{n^2}$ على $\mathbb{R}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ على $[0, 2\pi]$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ على $\mathbb{R}$.

الحل :

1) بأخذ $M_n = \frac{1}{n^2}$ لكل $n \geq 1$ فإن $\left|\frac{\cos^2(nx)}{n^2}\right| \leq M_n$

وذلك لأن $|\cos y| \leq 1$ لكل y من $\mathbb{R}$.

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ هي متسلسلة ـ p حيث $p = 2 > 1$

فهي متقاربة . باستعمال إختبار فيرشتراس فإن المتسلسلة

المعطاة متقاربة بإنتظام على $\mathbb{R}$.

2) هناك تقارب نقطي .

نلاحظ أنه لكل $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ لدينا $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x$.

لتكن $n \geq 10$ و $p \in \mathbb{N}$ بحيث $2n \leq n + p < n\sqrt{n}\frac{\pi}{4}$

إذا لكل $k \in \mathbb{N}$ بحيث $n \leq k \leq n + p$ لدينا

$$\frac{k}{n\sqrt{n}} < \frac{\pi}{4} .$$

ومنه

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{n\sqrt{n}} \leq \sin\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right)$$

وهذا يستلزم أن

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2}{\pi} \frac{k}{n\sqrt{n}} \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right).$$

لكن

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2}{\pi} \frac{k}{n\sqrt{n}} = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \geq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{\pi} \frac{p}{n} \geq \frac{2}{\pi}$$

$\Leftarrow$ $\sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx) \right| \geq \frac{2}{\pi}$ لكل $n \geq 10$

و $p \in \mathbb{N}$ حيث $2n \leq n + p < \frac{n\sqrt{n}\pi}{4}$ $\Leftarrow$ التقارب غير منتظم .

3) لكل $n \geq 1$ لدينا :-

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq |f_n(n)| = \frac{n^n}{n!} \geq 1.$$

معيار كوشي للتقارب المنتظم غير محقق و بالتالي التقارب غير منتظم

---

2) لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى، (وهي حالة خاصة من متسلسلات الدوال حيث $f_n(x) = a_n x^n$ ، أي دالة قوة وهي أبسط أنواع الدوال)، حيث نصف قطر تقاربها r يحقق $0 < r \leq \infty$.

بين أنه لكل $0 < t < r$ فإن متسلسلة القوى هذه متقاربة بإنتظام على $[-t, t]$.

الحل :-

لتكن $x \in [-t, t]$ فإن $|a_n x^n| \leq |a_n| t^n$.

بما أن $0 < t < r$ فإن المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n$ متقاربة. بأخذ $M_n = |a_n| t^n$ في معيار فيرشتراس فإننا نستنتج أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بإنتظام على $[-t, t]$.

---

3) بين أن الدالة المعرفة ب $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل :-

لنبين أنها متقاربة بإنتظام على $[-t, t]$ لكل $t \in \mathbb{R}$.

نضع $M_n = \left(\frac{t^n}{n!}\right)^2$ لكل $n \geq 1$. فنجد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^2 \left(\frac{n!}{t^n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{t}{n+1}\right)^2 = 0 < 1.$$

إختبار النسبة يؤكد تقارب $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ ومنه حسب إختبار فايرشتراس فإن $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ متقاربة بإنتظام على $[-t, t]$.

بما أن كل حد من حدود متتالية المجاميع الجزئية دالة متصلة، وذلك لأن $\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ دوال متصلة، فإن التقارب المنتظم يضمن إتصال النهاية الذي هو مجموع المتسلسلة الآن $t \in \mathbb{R}$ كيفي، إذاً $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$.

4) لتكن $f_n : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$.

1) بين أن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة لكل $x \in [1,2]$.

2) بين أن هذا التقارب منتظم.

3) تحقق من صحة المساواة: $\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx$.

الحل:

1) بما $|1+x| > 1$ (أي $\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1$) لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} = 1$$

إذاً بالخصوص فإن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة لكل $x \in [1,2]$.

2) بما أن $1 \leq x \leq 2$ فإن $1+x \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{2^n}$

ومنه $\frac{x}{(1+x)^n} \leq \frac{x}{2^n} \leq \frac{2}{2^n}$

نأخذ $M_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ فإن $\left|f_n(x)\right| = \left|\frac{x}{(1+x)^n}\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ متقاربة بإنتظام حسب معيار فايرشتراس.

3) التقارب المنتظم يضمن سلامة التكامل تحت إشارة المجموع الغير منتهي أي أن

$$\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx$$

5) 1) بين أن المتسلسلتين $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ و $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$

تتقاربان على $\mathbb{R}$ إلى دالتين متصلتين.

2) بين أن g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $g'=f$.

الحل :-

1) خذ $M_n=\frac{1}{n^2}$ لـ f و $M_n=\frac{1}{n^3}$ لـ g ثم استعمل تقارب المتسلسلة ـ p من أجل $p=2$ و $p=3$ على الترتيب مع معيار فايرشتراس لإثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة ثم لاحظ إتصال $\frac{\cos nx}{n^2}$ و $\frac{\sin nx}{n^3}$ لكل n. آنذاك التقارب المنتظم يحفظ الإتصال ومنه المطلوب.

2) بإعتبار أن هناك تقارب منتظم على $\mathbb{R}$ بالنسبة لـ f، فلنكامل على $[0,x]$ فنجد :

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos nt}{n^2}\,dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=g(x).$$

من النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل نجد :-

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow g'=f.$$

6) لتكن $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$. بين أن $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

الحل :-

1) على $[0,1]$ لدينا $\left|\frac{x}{n^2+x^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ وبالتالي هناك تقارب منتظم حسب إختبار فايرشتراس.

2) إستنادا إلى التقارب المنتظم على $[0,1]$، الخطوات التالية مبررة

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x}{n^2+x^2}\,dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\log(n^2+1)-\log n^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

7) بين أن المتسلسلة $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+x^4}{n^4+x^2}$ تتقارب إلى دالة متصلة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

الحل: ليكن $R>0$ و $x\in[-R,R]$، لدينا

$$\left|\frac{n^2+x^4}{n^4+x^2}\right| \leq \frac{n^2+x^4}{n^4} \leq \frac{1}{n^2}+\frac{R^4}{n^4}.$$

المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{R^4}{n^4}\right)$ متقاربة

وبالتالي هناك تقارب منتظم إلى دالة f على $[-R,R]$ حسب إختبار فايرشتراس.

إتصال $\frac{n^2+x^4}{n^4+x^2}$ على $[-R,R]$ والتقارب المنتظم يضمنان إتصال دالة المجموع $f(x)$ على $[-R,R]$ لكل $R>0$.

لكل $x\in\mathbb{R}$ يوجد $R>0$ كبير بقدر كاف لتحقق $x\in[-R,R]$ ومنه $f(x)$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$.

لاحظ:

هذه المتسلسلة ليست متقاربة بإنتظام على $\mathbb{R}$.

بالرغم من ذلك استطعنا اثبات إتصال دالة المجموع f على $\mathbb{R}$

---

8) 1) أوجد الدالة المعطاة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ لكل $|x|<1$.

2) أحسب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ و $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

الحل:

لكل $|x|<1$ لدينا $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ بالإشتقاق مرتين نجد:

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots \Leftarrow \frac{2}{(1-x)^3}=2+6x+12x^2+20x^3+\cdots$$

نضرب من جهة بـ x ومن جهة أخرى بـ x^2 فنجد على الترتيب:

$$\frac{x}{(1-x)^3}=x+3x^2+6x^3+10x^4+\cdots \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{1-x)^3}=x^2+3x^3+6x^4+10x^5+\cdots$$

بالجمع نجد:

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3}=x+4x^2+9x^3+16x^4+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n.$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ و $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

9) بمكاملة المتسلسلة $\frac{1}{1-t} = 1+t+\cdots\cdots$ على $[-x, x]$ حيث $x \in (-1,1)$

أوجد متسلسلة لـ $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

الحل :-

بما أن $[-x, x] \subset (-1,1)$ فإن $|t^n| \leq x^n < 1$.

ومنه $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ متقاربة بانتظام على $[-x, x]$ حسب إختبار فايرشتراس إذن :-

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \int_{-x}^{x} \frac{dt}{1-t} = \int_{-x}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-x}^{x} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1} - (-x)^{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n \text{ فرد}}^{\infty} \frac{2x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n-1}.$$

---

10) بين أن $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n(n+2)} dx = 0$.

الحل :-

$\forall x \in [0,\pi]$ ، $\left|\frac{\cos 2nx}{n(n+2)}\right| \leq \frac{1}{n(n+2)}$ و لكل $n \in \mathbb{N}$.

بما أن المتسلسلة المتداخلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

متقاربة فإن حسب إختبار فايرشتراس

فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n(n+2)}$ متقاربة بانتظام.

إذن :-

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n(n+2)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2nx}{n(n+2)} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \left[\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2(n+2)} (\sin 2n\pi - \sin 0)$$

$$= 0 \quad , \quad (\sin 2n\pi = \sin 0 = 0).$$

تمارين عن قياس ليبيغ

1) أحسب القياسات التالية :

أ) $m([2,7]\setminus\mathbb{Q})$ ب) $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+\frac{1}{n})\right)$ ج) $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+\frac{1}{2^n})\right)$ د) $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})\right)$

الحل :-

أ) بما أن $\mathbb{Q}$ قابلة للعد فإن قياسها معدوم وبالتالي :

$$m([2,7]\setminus\mathbb{Q}) = m([2,7])$$
$$= \ell([2,7]) = 7-2 = 5.$$

ب) بما أن الفترات $(n, n+\frac{1}{n})$ حيث $n\in\mathbb{N}$ منفصلة فإن

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+\frac{1}{n})\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ell(n, n+\frac{1}{n})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

ج) هذه الفترات أيضا منفصلة وبالتالي :

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+\frac{1}{2^n})\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ell(n, n+\frac{1}{2^n})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 \quad \text{(هندسية متقاربة)}$$

د) الفترات $(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ ليست منفصلة، لكن إتحادها القابل للعد يعطي الفترة التالية

$$(1,2)\cup(\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3})\cup\cdots = (0,2)$$

ومنه $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})\right) = m(0,2) = \ell(0,2) = 2$.

---

2) لتكن E_1 و E_2 مجموعتين قابلتين للقياس من $\mathbb{R}$ ولتكن E_3 مجموعة جزئية كيفية من $\mathbb{R}$. أثبت أن

$$m(E_3) = m(E_1\cap E_3) + m(E_2\cap E_3) + m(E_3-(E_1\cup E_2)) - m(E_1\cap E_2\cap E_3)$$

الحل :-

بما أن $E_1 \in \mathcal{M}$ فإنه حسب نظرية كاراتيودوري

من أجل E_3 نجد :

$$m(E_3) = m(E_3 \cap E_1) + m(E_3 - E_1). \quad (1)$$

(لاحظ هنا أننا استعملنا الصيغة المكافئة

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \quad E)$$

بدل $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$)

بما أن $E_2 \in \mathcal{M}$ نطبق كاراتيودوري من أجل $E_3 \setminus E_1$:

$$m(E_3 \setminus E_1) = m((E_3 \setminus E_1) \cap E_2) + m((E_3 \setminus E_1) \setminus E_2)$$

$$= m((E_3 \cap E_2) \setminus E_1) + m(E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)). \quad (2)$$

مرة أخرى $E_1 \in \mathcal{M}$ فنطبق كاراتيودوري من أجل $E_2 \cap E_3$ فنجد

$$m(E_2 \cap E_3) = m((E_2 \cap E_3) \cap E_1) + m((E_2 \cap E_3) \setminus E_1)$$

$$\Rightarrow m((E_2 \cap E_3) \setminus E_1) = m(E_2 \cap E_3) - m(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \quad (3)$$

الآن بتعويض (3) في (2) والناتج في (1) نجد المطلوب.

3) بين أن كل مجموعة قابلة للقياس $E \subset (0,1)$ يمكن كتابتها على الشكل $E = A \cup B$ حيث A مجموعة بوريلية و $m(B) = 0$.

الحل :

E قابلة للقياس، إذاً من نظرية التقريب الأولى

لكل $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مغلقة $F_\varepsilon \subset E$ بحيث :

$$m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$$

بأخذ $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ، $n \in \mathbb{N}$ و باستعمال الخاصية :

$$m(E \setminus F_\varepsilon) = m(E) - m(F_\varepsilon) \quad , \quad (F_\varepsilon \subset E)$$

فإنه لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد مجموعة مغلقة $F_n \subset E$ تحقق

$$m(F_n) > m(E) - \frac{1}{n}.$$

نضع $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ، فنلاحظ أن $A \subset E$ بما أن

كل $F_n \subset E$. كذلك A مجموعة بوريلية بما أنها إتحاد قابل للعد من مجموعات مغلقة (وبالتالي بوريلية).
من جهة أخرى :

$$m(A) \geq m(F_n) > m(E) - \frac{1}{n} \quad , \quad \forall n \geq 1 .$$

$$\Rightarrow m(A) \geq m(E).$$

لكن $A \subset E$ فبالتالي $m(A) \leq m(E)$ (بالإطراد).
ومنه $m(A) = m(E)$.
الآن A قابلة للقياس و~~وبالتالي~~ إذا عرفنا المجموعة B بالشكل $B = E \setminus A$ فإن المجموعة B أيضا قابلة للقياس. ومنه :

$$m(B) = m(E \setminus A) = m(E) - m(A) = 0$$

وهو المطلوب.

---

4) لتكن $\{a_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الغير سالبة.
إذا كانت μ دالة مجموعات ~~حقيقية~~ بحيث $\mu(\phi) = 0$ ولكل $\phi \neq A \subset \mathbb{N}$ لدينا :

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n .$$

بين أن $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, \infty]$
عبارة عن قياس.

الحل :
ليكن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ إتحادا منفصلا في $\mathbb{N}$. لدينا

$$\mu(A) = \sum_{k \in A} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in A_n} a_k \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

ومنه μ قياس.

5) ليكن $X \neq \phi$ و $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ دالة.

لنعرف $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ بـ:

$\mu(\phi) = 0$ ، $\mu(A) = \infty$ إذا كانت A غير قابلة للعد

و $\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$ إذا كانت $A \neq \phi$ وعلى الأكثر قابلة للعد.

بين أن μ عبارة عن قياس.

الحل:

ليكن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ إتحاد منفصل من $\mathcal{P}(X)$.

إذا كان أحد A_n غير قابل للعد فإن A تكون كذلك

وبالتالي: $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$.

أما إذا كان كل عنصر A_n على الأكثر قابل للعد فإن A أيضا على الأكثر قابلة للعد ولدينا:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{x \in A_n} f(x) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

وبالتالي μ عبارة عن قياس.

ملاحظة: (تمرين)

أعط وصف لوجه التشابه بين التمرينين (4) و (5).

6) لتكن $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$ دالة مجموعات على حلقة $\mathcal{S}$.

حيث $\mu(A) < \infty$ من أجل عنصر ما $A \in \mathcal{S}$.

إذا كان μ يحقق خاصية التجميع القابل للعد فبين أن μ قياس.

الحل: بوضع $A = A \cup \phi \cup \phi \cup \phi \ldots\ldots$

فلو كان $\mu(\phi) > 0$ لكان $\mu(A) = \infty$ مما يناقض الفرض.

لذا فلا بد وأن يكون $\mu(\phi) = 0$ وبالتالي μ قياس.

7) لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس على X.
بين أن المجموعة $\{x ,$ موجودة $\lim f_n(x)\}$ قابلة للقياس.

الحل :-

نعلم أن الدالتين $\liminf f_n$ و $\limsup f_n$ قابلتين للقياس ومنه الدالة

$$\varphi(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) - \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

أيضا قابلة للقياس.

لاحظ أن

$$\{x ,\ \text{موجودة } \lim f_n(x)\} = \varphi^{-1}(\{0\})$$

فهي إذاً قابلة للقياس.

---

8) بين أنه إذا كانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مطّردة فهي قابلة لقياس بوريل.

الحل :-

لنفرض أن f متزايدة (حالة التناقص تعالج بنفس الطريقة)

إذاً : $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$

بالخصوص إذا كانت $s < x < t$ وكانت

$a < f(s)$ ، $f(t) < b$ فإن

$a < f(x) < b$ لكل x حيث $s < x < t$.

وهذا يعني أن الصورة العكسية لكل فترة بواسطة f هي أيضا فترة. إذاً f قابلة لقياس بوريل.

---

9) ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس و $E, F \in \mathcal{M}$.
بين أن

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

الحل :- لدينا $E \in \mathcal{M}$ ، إذاً :

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \cap E^c) \quad \text{—— (1)}$$

و

$$\mu(E \cup F) = \mu((E \cup F) \cap E) + \mu((E \cup F) \cap E^c)$$

$$= \mu(E) + \mu(F \cap E^c) \quad \text{—— (2)}$$

$$(1) \Leftrightarrow \mu(F \cap E^c) = \mu(F) - \mu(F \cap E)$$

بالتعويض في (2) نجد :-

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) - \mu(F \cap E).$$

---

10) ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس و $E \in \mathcal{M}$.

لنعرف $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ لكل $A \in \mathcal{M}$.

بين أن μ_E عبارة عن قياس.

الحل :-

$$\mu_E(\phi) = \mu(\phi \cap E) = \mu(\phi) = 0. \quad (\mu \text{ قياس})$$

لتكن $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية منفصلة من عناصر $\mathcal{M}$.

وبالتالي $\{E \cap A_j\}_{j=1}^{\infty}$ أيضا منفصلة ولدينا :

$$E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j)$$

الآن لدينا :

$$\mu_E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j) \quad (\mu \text{ قياس}) \text{ و}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_E(A_j).$$

$\Leftarrow$ μ_E عبارة عن قياس.

11) لتكن A مجموعة مثبتة من X. أوجد جبر سيقما من مجموعات X الجزئية والمولدة بواسطة كل واحدة من :

1) $\{A\}$

2) $\{B , A \subseteq B \subseteq X\}$

الحل :-

1) جبر سيقما المولدة بواسطة $\{A\}$ هي :

$$\{\phi , A , A^c , X\}$$

2) جبر سيقما المولدة بواسطة $\{B , A \subseteq B \subseteq X\}$ هي :

$$\{B , \quad A \subseteq B \text{ أو } A \subseteq B^c\}$$

12) لتكن $f_1 , f_2 , \ldots , f_n$ دوال قابلة للقياس. بين أن $\max(f_1 , \ldots , f_n)$ و $\min(f_1 , \ldots , f_n)$ دوال قابلة للقياس.

الحل :

$$\{x , \max(f_1 , \ldots , f_n)(x) < a\} = \bigcap_{j=1}^{n} \{x , f_j(x) < a\}$$

عبارة عن تقاطع منتهٍ لمجموعات قابلة للقياس وبالتالي قابلة للقياس $\Leftarrow \max\{f_1 , \ldots , f_n\}$ قابلة للقياس.

$$\{x , \min(f_1 , \ldots , f_n)(x) < a\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{x , f_j(x) < a\}$$

عبارة عن إتحاد منتهٍ لمجموعات قابلة للقياس وبالتالي قابلة للقياس $\Leftarrow \min\{f_1 , \ldots , f_n\}$ قابلة للقياس.

13) لتكن $\mathcal{C}$ عائلة كل المجموعات الجزئية من $[0 , 1)$ والتي تكتب على شكل إتحادات منتهية لأجزاء من $[0 , 1)$ على الشكل $[a , b)$. بين أن $\mathcal{C}$ جبر وليست جبر سيقما.

الحل :

لتكن $A = \bigcup_{i=1}^{m} [a_i , b_i)$ و $B = \bigcup_{j=1}^{m} [c_j , d_j)$. فإنه لدينا :

1) $A \cup B \in \mathcal{C}$ (واضح).

2) $$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} [a_i, b_i) \cap [c_j, d_j) \in \mathcal{S}$$

3) $$[0,1) \setminus A = \bigcap_{i=1}^{n} \left([0,1) \setminus [a_i, b_i) \right)$$

وهي عنصر من $\mathcal{S}$ لأن $[0,1) \setminus [a_i, b_i)$ عبارة عن إتحاد منته لفترات من الشكل $[a, b)$.

إذاً $\mathcal{S}$ مغلقة بالنسبة للإتحاد والتتميم فهي جبر.

$\mathcal{S}$ ليست جبر سيغما لأن:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \tfrac{1}{n}) = \{0\} \notin \mathcal{S}.$$

---

14) لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس. بين أن الدالة $f(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x)$ قابلة للقياس. (قد تأخذ f قيما غير محدودة عند بعض النقط)

الحل:

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \sup_{n \geq k} f_n(x) = \lim_{k \to \infty} F_k(x), \quad F_k(x) = \sup_{n \geq k} f_n(x).$$

كذلك $F_k(x) \geq F_{k+1}(x)$ ومنه $f(x) = \inf_k F_k(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} f_n(x)$.

لدينا
$$\{F_k > c\} = \bigcup_{n \geq k} \{f_n > c\}$$
عبارة عن إتحاد قابل للعد لعناصر قابلة للقياس (لأن f_n قابلة للقياس وبالتالي المجموعات $\{f_n > c\}$ كذلك)، و بالتالي قابلة للقياس f أيضا.

الآن $\{F_k > c\} \in \mathcal{M}$ لكل $c \in \mathbb{R} \Leftarrow F_k$ قابلة للقياس.

نضع
$$\{f < a\} = \bigcup_k \{F_k < a\}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

وهي إتحاد قابل للعد لمجموعات قابلة للقياس (وذلك لأن F_k قابلة للقياس)، و بالتالي قابلة للقياس.

15) لتكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة غير متناقصة. بين أن f قابلة للقياس بوريل.

الحل :-

* نقول إن f قابلة للقياس في فضاء قياس $(X, \mathcal{S})$ إذا كانت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق لكل $B \subset \mathbb{R}$ (مجموعة بوريلية) لدينا $f^{-1}(B) = \{x \in X ,\ f(x) \in B\} \in \mathcal{S}$ (قابلة للقياس).

* الآن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ والفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

لإثبات أن f قابلة لقياس بوريل يكفي أن نتحقق من أنه لكل $c \in \mathbb{R}$ لدينا:

$f^{-1}(-\infty, c) = \{f < c\} \in \mathcal{B}$ (جبر سيغما لبوريل).

بوضع $S = \{x ,\ f(x) < c\}$

نعلم أنه إذا كانت $x \in S$ و $y < x$ فإن $f(y) \leq f(x) < c \Rightarrow y \in S$ أيضا.

إذاً نميز الحالات التالية فقط:

$S = \phi$ ، $S = \mathbb{R}$ ، $S = (-\infty, s)$ أو $S = (-\infty, s]$

حيث $s = \sup_{x \in S} \{x\}$.

في كلٍّ من هذه الحالات S بوريلية.

إذاً: $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$

$\Leftarrow$ f قابلة لقياس بوريل.

٠١/ ١٤٣٣هـ

٣٨٤ ريض :- تمارين عن تكامل لبيسق

1) لتكن $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1_+$ (قابلة للتكامل وموجبة ولتكن $f_n \to f$ و $\int_\Omega f\,dm = \int_\Omega f_n\,dm < \infty$. بين أن $\int_E f\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm$ لكل $E \in \mathcal{M}$.

لاحظ أن النتيجة غير صحيحة في حالة $\int_\Omega f\,dm = \lim \int_\Omega f_n\,dm = \infty$.

الحل :- (لو $f_n\chi_E = g_n > f \Rightarrow \int f \leq \int_E f_n \leq \int_\Omega f\,dm$)

نضع $g_n = f_n\chi_E$ ونلاحظ أن لكل n: $g_n(x) \leq f(x)$

بما أن $f \in \mathcal{L}^1$ فإن نظرية التقارب المسقوف فإن

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n\,dm = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n\,dm$$

$$= \int_\Omega f\chi_E\,dm.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm = \int_E f\,dm.$$

نستطيع أيضا تطبيق متهيدية فاتو على $\{f_n - f_n\chi_E\}$:

$$\int_\Omega (f - f\chi_E)\,dm \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n - f_n\chi_E)\,dm$$

بما أن $\liminf \int f_n \leq \lim \int f_n$ و $\liminf(-\int_E f_n\chi_E) = -\limsup \int_E f_n \leq \lim \int_E f_n$ فإن

$$-\int_E f\,dm \leq -\lim \int_E f_n\,dm \quad \text{——— (1)}$$

بالمثل نطبق فاتو على $\{f_n + f_n\chi_E\}$ فنجد :

$$\int_\Omega (f + f\chi_E)\,dm \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n + f_n\chi_E)\,dm$$

لنفس الأسباب نجد $\int_E f\,dm \leq \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm$ ..... (2)

من (1) و (2) نجد $\int_E f\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm$.

٤) بين أنه إذا كانت $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ و f_n تتناقص (نقطيا) إلى f و يوجد k حيث $\int_\Omega f_k \, dm < \infty$ فإن

$$\int_\Omega f \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n .$$

الحل :-

نعرف المتتالية $g_n = f_k - f_n$ فإن $0 \leq g_n$ لكل $k \leq n$ و $g_n \uparrow f_k - f$ لكل $k \leq n$. إذاً حسب نظرية التقارب المطرد لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_k - f_n) \, dm = \int_\Omega (f_k - f) \, dm$$

و بالتالي $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm = \int_\Omega f \, dm$.

3) لتكن $m(\Omega) < \infty$ ، $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $f_n \xrightarrow{u} f$ بانتظام . بين أن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $\int_\Omega f_n \, dm \longrightarrow \int_\Omega f \, dm$.

الحل :-

بما أن f هي نهاية $f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن f قابلة للقياس.

ليكن $\varepsilon > 0$ ، فإنه توجد رتبة N بحيث $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{m(\Omega)}$ لكل $n > N$ و $x \in \Omega$ ، (لأن $f_n \to f$ بانتظام).

ومنه :- لكل $n > N$ لدينا :-

$$\left| \int_\Omega f_n \, dm - \int_\Omega f \, dm \right| = \left| \int_\Omega (f_n - f) \, dm \right|$$

$$\leq \int_\Omega |f_n - f| \, dm < \int \frac{\varepsilon}{m(\Omega)} \, dm = \varepsilon$$

إذاً $\int_\Omega f_n \, dm \longrightarrow \int_\Omega f \, dm$.

4) [صياغة جديدة لنظرية التقارب المسقوف]

لتكن f_n ، g_n ، f ، $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ (لكل $n \in \mathbb{N}$) ولنفرض أن $f_n \longrightarrow f$ a.e. و $|f_n| \leq g_n$ و $\int_\Omega g_n \, dm \longrightarrow \int_\Omega g \, dm$.

بين أن $\int_\Omega f_n \, dm \longrightarrow \int_\Omega f \, dm$.

الحل :-

أعد خطوات برهان نظرية التقارب المسقوف مستعملا تمهيدية فاتو بالنسبة للمتتاليتين $\{g_n + f_n\}$ و $\{g_n - f_n\}$ ، (أنظر حل التمرين 1).

5) ليكن $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ولنفرض أن $f_n \longrightarrow f$ a.e. . بين أن :

$$\int_\Omega |f_n - f| \, dm \longrightarrow 0 \iff \int_\Omega |f_n| \, dm \longrightarrow \int_\Omega |f| \, dm .$$

الحل :-

لاحظ أن

$$① \ldots \quad |f_n - f| \leq g_n = |f| + |f_n|$$

و

$$② \ldots \quad |f_n| \leq h_n = |f| + |f_n - f|$$

إذا لبرهان الإتجاه $\Leftarrow$ إستعمل ① والمتتالية g_n.

ولبرهان الإتجاه $\Rightarrow$ إستعمل ② والمتتالية h_n

وطبق نتيجة التمرين (4) أعلاه.

6) لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ولنعرف الدالة F بـ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt$$

بين أن F متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل :- ليكن $x \in \mathbb{R}$ (مثبت)

ولنضع $g_n = |f| \, \chi_{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]}$

لدينا $g_n \longrightarrow 0$ a.e. وكذلك $|g_n| \leqslant |f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
فلنطبق نظرية التقارب المسقوف :

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \, dm \longrightarrow 0 .$$

إذاً يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geqslant N$ فإن

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \, dm = \int_{[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]} |f| \, dm < \varepsilon$$

بالخصوص لما $n = N$ فإن

$$\int_{[x-\frac{1}{N}, x+\frac{1}{N}]} |f| \, dm < \varepsilon .$$

الآن لكل $y \in \mathbb{R}$ حيث $|x-y| < \frac{1}{N}$ لدينا

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_{[x,y]} f \, dm \right| \leqslant \int_{[x,y]} |f| \, dm$$

$$\leqslant \int_{[x-\frac{1}{N}, x+\frac{1}{N}]} |f| \, dm < \varepsilon .$$

إذاً $\lim_{y \to x} F(y) = F(x) \Rightarrow F$ متصلة عند x.

بما أن x كيفي من $\mathbb{R}$ فإن F متصلة على $\mathbb{R}$.

---

7) أحسب النهاية التالية :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} \, dx .$$

الحل :

ضع $g_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$ ولاحظ أن $g_n \longrightarrow e^{-x}$ و أن
$f_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} \longrightarrow 0$ لكل $x \geqslant 0$. طبق طريقة التمرينين (4) و (5).

---

8) لتكن $f \in \mathcal{L}^1_+(\Omega)$ (قابلة للتكامل وموجبة). بين أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد مجموعة قابلة للقياس E تحقق $m(E) < \infty$ و $\int_E f\,dm > \int f\,dm - \varepsilon$.

الحل:

لتكن $f_n = f\,\chi_{[-n,n]}$ فإن المتتالية $\{f_n\}$ مطردة و $f_n \longrightarrow f$ نقطياً.

حسب نظرية التقارب المطرد لدينا

$$\int_\Omega f_n\,dm \longrightarrow \int_\Omega f\,dm.$$

إذاً لكل $\varepsilon > 0$، يوجد N بحيث

$$\int_{[-n,n]} f\,dm = \int_\Omega f_n\,dm > \int_\Omega f\,dm - \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

فقط نأخذ $E = [-N, N]$.

---

9) لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال من $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$. بين أنه

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dm.$$

الحل:

لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال الموجبة والقابلة للقياس.

لكل n نضع $h_n = \inf_{k \geq n} f_k$. فإن كل h_n عبارة عن دالة موجبة وقابلة للقياس ولدينا $h_n \leq f_n$.

نطبق تمهيدية فاتو على h_n فنجد:

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n\,dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h_n\,dm.$$

لكن $\lim_{n\to\infty} h_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$ (من تعريف h_n ذاتها).

وكذلك المتباينة $h_n \leq f_n$ تقتضي $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h_n\,dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dm$

ومنه $\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,dm$.

10) لتكن f_n ، g_n و f و g كما في التمرين (4).

بين أن: $\int_\Omega |f_n - f| \longrightarrow 0$.

الحل:

$$|f_n| \leq g_n \Rightarrow |f| \leq g.$$

ومنه $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g_n + g$

والمتتالية $\{g_n + g - |f_n - f|\}$ حدودها موجبة وقابلة للقياس.

بمبرهنة فاتو تستلزم

$$\int_\Omega \lim (g_n + g - |f_n - f|)\,dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (g_n + g - |f_n + f|)\,dm$$

أي أن:

$$\int_\Omega 2g\,dm \leq \int_\Omega 2g\,dm + \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_\Omega |f_n - f|\,dm\right)$$

$$= \int_\Omega 2g - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\,dm.$$

الآن $\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\,dm \leq 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\,dm$

ومنه $\int_\Omega |f_n - f|\,dm \longrightarrow 0$.

حل آخر للتمرين (5):

"$\Rightarrow$" لنفرض أن $\int_\Omega |f_n - f|\,dm \longrightarrow 0$ فإن:

$$\left|\int_\Omega |f_n|\,dm - \int_\Omega |f|\,dm\right| \leq \int_\Omega \big||f_n| - |f|\big|\,dm \leq \int_\Omega |f_n - f|\,dm \longrightarrow 0$$

أي أن $\int_\Omega |f_n|\,dm \longrightarrow \int_\Omega |f|\,dm$.

"$\Leftarrow$" لنفرض أن $\int_\Omega |f_n|\,dm \longrightarrow \int_\Omega |f|\,dm$ فإن:

من التمرين (10) (بعد أخذ $|f_n|$ مكان g_n و $|f|$ مكان g)

لدينا $\underset{\substack{\uparrow \\ g_n}}{\int_\Omega |f_n|\,dm} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\int_\Omega |f|\,dm} \Longrightarrow \int_\Omega |f_n - f|\,dm \longrightarrow 0.$