الفصل الاول
١٠-٩-١٤٠٩

الاختبار النهائي
لمقرر ٤٤٣ ريض

الزمن
٣ ساعات

١- (أ) اذا كان $n$ يساوي مربعاً لعدد صحيح ومكعباً لعدد صحيح آخر فبرهن أن $n \equiv 1 \mod 7$ أو $n \equiv 0 \mod 7$.

(ب) اذا كان $\tau(n)$ هو عدد القواسم الموجبة للعدد $n$ فأثبت أن

$$n^{\tau(n)/2} = \prod_{d|n} d$$

٢- (أ) اذا كان $\gcd(a,b)=1$ و $c \mid (a+b)$ فبرهن أن

$$\gcd(a,c) = \gcd(b,c) = 1$$

(ب) جد جميع الحلول للمعادلة الدايافانتينية

$$15x + 12y + 30z = 24.$$

٣- أكتب نص المبرهنة الاساسية للحساب ثم اثبت صحتها.

٤- (أ) لأي عدد صحيح موجب $n \geq 3$ برهن أنه يوجد عدد أولي $p$ بحيث $n < p < n!$. هل يمكن ان نستنتج من ذلك أن هناك مالانهاية من الاعداد الاولية؟ برهن اجابتك.

(ب) جد حل التطابقات الآنية التالية:

$$x \equiv 5 \mod 6\ ,\ x \equiv 4 \mod 11\ ,\ x \equiv 3 \mod 17$$

٥- (أ) بين فيما اذا كان العدد 2021 اولياً أم لا مضمنا تفاصيل الحل.

(ب) اذا كانت $F$ و $f$ دالتان عدديتان بحيث

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

فأثبت أن $F$ دالة ضربية اذا وفقط اذا كانت $f$ دالة ضربية.

٦- (أ) اذا كان $\gcd(m,n)=1$ فبرهن أن

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod (mn)$$

حيث φ هي دالة اويلر.

(ب) اذا كان $(x, y, z)$ ثلاثياً فيثاغورسياً ابتدائياً فاثبت ان $60 \mid xyz$.

تمنياتي لكم بالتوفيق -

مقرر ٢٤٣ ريض — الاختبار الفصلي الاول

نظرية الاعداد — ١٤٠٩

الزمن = ٧٥ دقيقة

١- (أ) اذا كان $n$ عدداً في جميع مراتبه العشرية الرقم 5 فأثبت أن $n$ لا يمكن ان يكون مربعاً لعدد صحيح آخر.

(ب) لاي عدد صحيح $n \geq 1$ برهن أن $7 \mid (2^{3n} - 1)$

٢- (أ) اذا كان $\gcd(a,b) = 1$ فبرهن أن $\gcd(ac,b) = \gcd(c,b)$ لاي عدد صحيح $c$.

(ب) اذا كان $p$ عدداً اولياً وكان العدد $3p+1$ مربعاً كاملاً فبرهن أن $p$ لابد أن يساوي العدد 5 .

٣- جد الحلول الموجبة - إن وجدت - للمعادلة الدايافنتينية الخطية

$$119x - 84y = 21$$

٤- (أ) أعط مثالاً على مجموعة اعداد لا تتحقق فيها خاصة التحليل الوحيد الى العوامل الاولية موثقاً اجابتك.

(ب) اذا كان $n$ عدداً صحيحاً موجباً، فبرهن على وجود عدد اولي $p$ بحيث $p > n$ .

| | | |
|---|---|---|
| اختبار الفصلي الثاني | مقرر ٢٤٣ ريض<br>نظرية الاعداد | الفصل الاول<br>١٤٠٩ |

- (أ) اذا كان $a$ و $b$ عددين موجبين فأثبت : $lcm(a,b)=gcd(a,b) \iff a=b$

(ب) برهن أن $7$ هو العدد الاولي الوحيد الذي على الصيغة $n^3-1$ .

- (أ) اذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود معاملاتها اعداد صحيحة بحيث $f(n)$ هو عدد اولي لكل $n$ في $\mathbb{Z}$ فبرهن أن درجة $f(x)$ (اعلى اس لـ $x$) لابد ان تساوي صفراً .

(ب) جد باقي قسمة العدد $2^{359}$ عند قسمته على العدد $89$ .

- اذا كان $p$ عدداً اولياً على الصيغة $4k+3$ فأثبت أن

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \pm 1 \mod p$$

- برهن ما يلي : توجد للمعادلة التطابقية $ax \equiv b \mod n$ حل اذا وفقط اذا $d \mid b$ حيث $d=gcd(a,n)$ . اذا كان $d \mid b$ فإن عدد الحلول المختلفة للمعادلة يساوي $d$ .

243

مقرر ٤٤٢ رياض
نظرية الاعداد
الزمن : ٧٥ دقيقة

الاختبار الفصلي الثاني
١٤٠٩

١- (أ) جد مرتبتي الآحاد والعشرات من العدد $9^{9^{9}}$ .

(ب) اذا كان $N$ عدداً صحيحاً و $M$ العدد الناتج من $N$ بكتابة الأرقام في مراتبه العشرية بالاتجاه المعاكس (مثال: اذا كان $N = 4523$ فإن $M = 3254$) برهن عموماً ان العدد $N - M$ يقبل القسمة على 9 .

٢- اذا كان $m$ و $n$ عددين صحيحين فبرهن أن للتطابقين

$$x \equiv a \pmod{n} \quad , \quad x \equiv b \pmod{m}$$

حلاً آنياً اذا وفقط اذا كان $\gcd(m,n) \mid (a-b)$ . واذا كان $x_1$ و $x_2$ حلين للتطابقين اعلاه فاثبت أن $x_1 \equiv x_2 \bmod (\mathrm{lcm}(m,n))$

٣- (أ) ليكن $a$ و $b$ عددين لا يقبلان القسمة على العدد الاولي $p$ برهن :

$$a^p \equiv b^p \pmod{p^2} \Longleftarrow a^p \equiv b^p \pmod{p}$$

(ب) جد حلاً للتطابق التربيعي $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{29}$

٤- (أ) بين أن $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$ .

(ب) اذا كانت $\mu$ دالة موبيس فاثبت أن

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & , \; n = 1 \\ 0 & , \; n > 1 \end{cases}$$

ر ٤٤٣ ريض ........ الفصل الدراسي الثاني

اختبار النهائي ........ ١٤٠٩

زمن : ٣ ساعات

١ـ (أ) برهن أن $n$ عدد أولي إذا وفقط إذا كان

$$(n-1)! \equiv -1 \mod n$$

(ب) قرر فيما إذا كانت العبارة التالية صحيحة :

$$a^3 \mid b^3 \Rightarrow a \mid b \;.$$

علل اجابتك !

٢ـ (أ) إذا كانت $\varphi$ دالة أويلر ، بين أن $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$ .

ثم برهن على أن $\varphi$ دالة ضربية .

(ب) إذا كان $a$ و $b$ عددين صحيحين موجبين فأثبت أن

$$\gcd(a,b) \cdot \operatorname{lcm}(a,b) = ab \;.$$

٣ـ (أ) جد جميع حلول المعادلة

$$36x \equiv 60 \mod 102 \;.$$

(ب) إذا كان $p$ و $q$ عددين أوليين بحيث $p \geq q \geq 5$ برهن أن $24 \mid (p^2 - q^2)$

٤ـ (أ) اثبت وجود مالانهاية من الأعداد الأولية التي على هيئة $4k+1$ .

(ب) لأي عدد صحيح $a$ برهن أن $a^7 \equiv a \mod 42$ .

٥ـ (أ) إذا كان $(x, y, z)$ ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً فأثبت أن $60 \mid xyz$ .

(ب) جد جميع المثلثات الفيثاغورسية التي فيها القيمة العددية للمساحة تساوي القيمة العددية للمحيط .

الامتحان الفصلي الاول .١٤١٠ نظرية الاعداد

الزمن المسموح به: ساعة واحدة

١- (أ) اذا كان $b=qa+r$ فبرهن ان $(a,b)=(a,r)$

(ب) اثبت أو خطئ العبارة التالية: اذا كان $(a,b)=1$ و $(c,d)=1$ فإن $(ac,bd)=1$

٢- (أ) اذا كان $F=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ فأثبت أن $F^n=\begin{pmatrix}f_{n+1} & f_n\\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix}$ لكل $n\geq 2$، حيث أن $f_n$ يرمز الى عدد فابوناچي.

(ب) اذا كان $a|c$ و $b|c$ فأثبت أن $[a,b]\,|\,c$ حيث $[a,b]$ هو المضاعف المشترك الاصغر للعددين $a$ و $b$.

٣- (أ) اذا كان $p$ اصغر عدد اولي يقسم $n$ وكان $p>\sqrt[3]{n}$ برهن أن $\frac{n}{p}$ إما عدد اولي او يساوي $1$.

(ب) اثبت ان العدد $(22)^n-1$ يقبل القسمة على $7$ لكل $n\geq 1$.

٤- (أ) برهن انه لكل $n\geq 2$ يوجد $n$ من الاعداد المتتالية المؤلفة.

(ب) حلل $1577$ الى عوامله الاولية.

٢٤٣ ريض    الاختبار النهائي    الفصل الأول ١٤١٠

الزمن : ٣ ساعات

١- (أ) جد مرتبتي الآحاد والعشرات للعدد $7^{124}$ .

(ب) اذا كان $ab \equiv ac \mod n$ و $d = (a, n)$ ، فبرهن أن $b \equiv c \mod \frac{n}{d}$ .

٢- (أ) اذا كان $(n-1)! \equiv -1 \mod n$ حيث $n > 1$ فأثبت إن $n$ لابد ان يكون اولياً .

(ب) برهن ان هناك مالانهاية من الاعداد الاولية التي على الصورة $4K+1$ .

٣- (أ) اذا كانت $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ فأثبت إن $f$ ضربية إذا وفقط اذا كانت $F$ ضربية .

(ب) جد جميع الاعداد الصحيحة الموجبة $n$ التي تحقق $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ ، حيث $\varphi$ هي دالة اويلر .

٤- (أ) برهن أن العددين $1184$ و $1210$ متحابان .

(ب) جد جميع الاعداد الصحيحة الموجبة التي لها ثلاثة قواسم فقط . برهن اجابتك .

٥- (أ) اذا كان $(x, y, z)$ ثلاثياً فيثاغورسياً فأثبت ان $60 \mid xyz$ .

(ب) اذا كان $a$ و $b$ عددين اوليين نسبياً وكان $ab = c^3$ لعدد صحيح $c$ فبرهن أنه يوجد عددان صحيحان $a_1$ و $b_1$ بحيث $a = a_1^3$ ، $b = b_1^3$ .

٦- (أ) اذا كان $F_k = 2^{2^k} + 1$ ، $k \geq 0$ فبرهن أن $F_0 F_1 \cdots F_{n-1} = F_n - 2$ لكل $n \geq 1$ .

(ب) استعن بالفقرة (أ) لبرهان أن $(F_n, F_m) = 1$ لكل $m \neq n$ .

الاختبار الفصلي الثاني — الفصل الدراسي الثاني

نظرية الأعداد ٤٢٣ ريض — ١٤٢١.

١- برهن أنه يوجد حل للمعادلة $x^2+1 \equiv 0 \mod p$ إذا وفقط إذا كان $p \equiv 1 \mod 4$.

٢- (أ) جد أصغر عدد موجب $x$ يحقق التطابقات:

$$x \equiv 3 \mod 4$$
$$2x \equiv 1 \mod 5$$
$$x \equiv 3 \mod 7$$

(ب) بين فيما إذا كان العدد $3^{100}-1$ يقبل القسمة على 5 أم لا.

٣- (أ) إذا كان $a^p \equiv b^p \mod p$ حيث $p$ عدد أولي، فبرهن أن $a^p \equiv b^p \mod p^2$

(ب) جد الأرقام للمراتب العشرية الثلاثة الأولى للعدد $7^{1203}$.

٤- (أ) إذا كان $n>1$ فأثبت أن $\sum_{d|n} \mu(d)=0$ حيث $\mu$ هي دالة موبيس (Möbius Function)

(ب) جد جميع الأعداد $n \geq 1$ التي تحقق $\phi(n)=16$ معللاً إجابتك.

جبر ٣٤٢ ريض | الاختبار الأول | الفصل الثاني ١٤٢١

الزمن: ساعة ونصف فقط

١- (أ) لكل عدد $n \geq 1$ برهن أن العدد $n(n+1)(n+2)$ يقبل القسمة على 6.

(ب) جد جميع الأعداد الأولية التي على الصورة $m^3 - 1$

٢- (أ) لكل $n \geq 1$ برهن أن $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

حيث $f_n$ هي أعداد فيبوناتشي

(ب) مثل العدد $(352)_{10}$ للأساس 7 $= (1012)_7$

٣- (أ) برهن أن كل عدد صحيح أكبر من واحد يقبل القسمة على عدد أولي

(ب) حل المعادلة الديوفانتية

$$391x - 437y = 161$$

٤- (أ) برهن أن $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ عدد غير نسبي

(ب) برهن وجود عدد لانهائي من الأوليات التي على الصيغة $6k+5$،

حيث $k$ عدد صحيح موجب.

الفصل الثاني

١٤٢١.

الاختبار النهائي

نظرية الاعداد، ٣٤٣ ريض

١- (أ) اذا كانت $f_n$ ترمز الى اعداد فيبوناتشي، فبرهن أن $f_n$ زوجي إذا وفقط إذا كان $n$ يقبل القسمة على 3.

(ب) اذا كان $a$ و $b$ عددين بحيث $(a,b)=1$ فبرهن أن $(a+b, a-b) = 1$ أو 2

٢- (أ) جد جميع حلول التطابق ذي المجهولين $x+3y \equiv 1 \mod 7$

(ب) اختبر قابلية القسمة على 7، 11، 13 للعدد

$$10776123102016153$$

٣- (أ) أثبت أن $[a_1,a_2,\dots,a_n] = [[a_1,a_2,\dots,a_{n-1}],a_n]$

(ب) جد جميع الاعداد الأولية التي على الصيغة $2^{2^n}+5$ حيث $n \geq 0$.

٤- (أ) إذا كان $p$ و $q$ عددين أوليين مختلفين فبرهن أن $p^{q-1}+q^{p-1} \equiv 1 \mod pq$

(ب) إذا كان $p$ عدد أولي فردي فأثبت أن $2(p-3)! \equiv -1 \mod p$.

٥- (أ) برهن أن $\sum_{d|n} \phi(d)=n$ حيث $\phi$ دالة أويلر

(ب) اذا كانت $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$ وكانت $f$ ضربية فأثبت أن $F$ ضربية.

٦- (أ) ليكن $(x,y,z)$ ثلاثياً فيثاغورسياً ابتدائياً. برهن أن $(x,y)=(y,z)=(x,z)=1$

(ب) برهن أن $60 \mid xyz$ حيث $(x,y,z)$ ثلاثي فيثاغورسي.