جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الرياضيات

الإختبارات الفصلية الأولى

د. المنجي بلال

الإختبار الفصلي الأول، الفصل الأول 1437 – 1436 هـ 244 ريض

السؤال الأول

أوجد المصفوفة A المربعة من الدرجة 2 بحيث

$$2A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

السؤال الثاني

أوجد معكوس المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

السؤال الثالث

احسب محدد المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

السؤال الرابع

لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(١). احسب A^2 و A^3

(٢). أوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $A^3 - 4A + \alpha I = 0$

(٣). أوجد A^{-1}.

السؤال الخامس

أوجد قيمة m بحيث يكون لهذا النظام الخطي عدد غير منته من الحلول

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = & 7 \\ 2x - y - 2z & = & 14 \\ -x + 2y + mz & = & 2m - 1 \end{cases}$$

السؤال السادس

استخدم قاعدة كرامر لحساب z التي تحقق النظام التالي

$$\begin{cases} x-2y+2z=-1 \\ 2x-y+3z=1 \\ 3x+y+2z=-1 \end{cases}$$

إصلاح الإختبار الفصلي الأول، الفصل الأول 1437 − 1436 هـ 244 ريض

السؤال الأول

$$2A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \iff A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A=-2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

السؤال الثاني

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

السؤال الثالث

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-7.$$

السؤال الرابع

(١). $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$، $A^3=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 8 & 4 & -10 \end{pmatrix}$

(٢). $A^3-4A+6I=0$

(٣). $A^3-4A = A(A^2-4I) = -6I \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2-4I) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

السؤال الخامس

يكون للنظام الخطي عدد غير منته من الحلول إذا كان المحدد التالي يساوي 0

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & m \end{vmatrix} = 3(m+3).$$

إذًا $m = -3$.

السؤال السادس

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{-5} = 3$$

الاختبار الفصلي الأول، الفصل الثاني 1437 − 1436 هـ 244 ريض

السؤال الأول

لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(١). أوجد المصفوفة $B = \mathrm{adj}A$ و محدد المصفوفة A.

(٢). أوجد معكوس المصفوفة A إن أمكن ذلك.

السؤال الثاني

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

أوجد محدد المصفوفة AB.

السؤال الثالث

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

أوجد قيمة العدد a بحيث $A^2 - AB + aI_3 = 0$ واستنتج معكوس المصفوفة A.

السؤال الرابع

استخدم طريقة جاوس جوردان لإيجاد مجموعة الحلول للنظام الخطي التالي

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 11 \\ x + 2y + z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = 6 \\ 2x + y + z + t = 14 \end{cases}$$

السؤال الخامس

بين فيما إذا كانت المجموعة $W = \{A \in M_n /\ A = A^T\}$ تشكل فضاء جزئيا من M_n، حيث إن M_n هو فضاء المصفوفات المربعة من الدرجة n.

إصلاح الاختبار الفصلي الأول الفصل الثاني 1437 – 1436 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). $B = \mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ و $|A| = 2$.

(٢). $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

السؤال الثاني

$AB = \begin{pmatrix} -8 & 5 & -2 & -8 \\ 7 & -7 & 1 & 10 \\ 5 & -4 & 1 & 6 \\ 12 & -11 & 2 & 16 \end{pmatrix}$.

$|AB| = 0$.

السؤال الثالث

$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$A(A-B) = 2I_3$.

$A^{-1} = \frac{1}{2}(A-B)$.

السؤال الرابع

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

إذا $x = 6,\ y = 1,\ z = 3,\ t = -2$.

السؤال الخامس

إذا كانت $A, B \in W$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$$

و

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A.$$

إذا W **هو فضاء جزئي.**

الإختبار الفصلي الأول، الفصل الصيفي 1436 – 1435 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). أوجد جميع المصفوفات $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **التي تحقق** $AB = BA$ **حيث** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). أوجد قيم الثابت a **الذي يحقق**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3a & 0 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

السؤال الثاني

أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام العمليات الصفية $[A, I]$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

السؤال الثالث

أوجد القيود التي يجب وضعها على a, b **حتى يكون النظام الخطي متسقا**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 5t = -2 \\ 2x - y + z - 3t = a \\ 4x - 7y - 3z + t = b \end{cases}$$

السؤال الرابع

(١). أوجد قيم الثابت α **التي تجعل النظام المتجانس**

$$\begin{cases} \alpha x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

له حلول غير الحل الصفري.

(٢). إستخدم طريقة جاوس جوردن لإيجاد حلول النظام عندما تكون $\alpha = 1$.

السؤال الخامس

أوجد جميع قيم الثابت a التي تجعل النظام الخطي

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \end{cases}$$

(١). له حل وحيد

(٢). عدد ما لا نهائي من الحلول

(٣). ليس له حل.

إصلاح الإختبار الفصلي الأول، الفصل الصيفي 1436 − 1435 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). $AB = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$، $BA = \begin{pmatrix} a+ & lA+y \\ c & d \end{pmatrix}$.
إذاً $c = 0, a = d \iff AB = BA$. **و بالتالي جميع المصفوفات A التي تحقق $AB = BA$ هي:** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$، **حيث** $a, b \in \mathbb{R}$.

(٢).

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3a & 0 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = 3a - 6 = 6 \iff a = 4$$

السؤال الثاني

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

و بالتالي

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

السؤال الثالث

المصفوفة $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & a \\ 4 & -7 & -3 & 1 & b \end{array}\right]$ **متكافئة صفيا مع المصفوفة** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 7 & a+4 \\ 0 & -5 & -5 & 7 & b-2a \end{array}\right]$ **و بالتالي يكون النظام الخطي متسقا إذا و إذا فقط إذا** $a+4 = b-2a \iff 3a - b + 4 = 0$.

السؤال الرابع

(١). النظام المتجانس له حلول غير الحل الصفري إذا كان محدد النظام يساوي صفر.

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+1)^2 - 4$$

إذًا $\alpha = 1$ **أو** $\alpha = -3$.

(٢). المصفوفة $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **متكافئة صفيا مع المصفوفة** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ **و بالتالي حلول النظام هي** $\{(x, -x, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$.

السؤال الخامس

(١). يكون للنظام الخطي حل وحيد إذا كان محدد النظام لا يساوي صفر.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha^5 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 4$$

إذًا $\alpha \neq \pm 2$.

(٢). **إذا كان** $\alpha = 2$ **النظام له عدد لا نهائي من الحلول**

(٣). **إذا كان** $\alpha = -2$ **النظام ليس له حل.**

الإختبار الفصلي الأول، الفصل الأول 1437 − 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

أوجد حلول النظام الخطي التالي

$$\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ 2x-y+z+3t=0 \\ z-t=0 \\ -2x+y-t=0 \end{cases}$$

السؤال الثاني

(١). أوجد معكوس المصفوفة التالية $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). أوجد مصفوفة B مربعة من الدرجة 3 بحيث

$$2(B+I)^{-1}=A.$$

السؤال الثالث

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a+b & b & a+b \\ 0 & a & a+b \\ a+b & b & a \end{pmatrix}$.

أوجد قيم a, b بحيث تكون المصفوفة A لها معكوس.

السؤال الرابع

ليكن النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} -x+y+az &= -2 \\ 2x-ay-z &= -1 \\ ax-2y+z &= 1 \end{cases}$$

(١). أوجد قيم العدد a حتى يكون للنظام الخطي عدد ما لا نهائي من الحلول.

(٢). أوجد حلول النظام الخطي في حالة $a=2$ إن وجدت.

(٣). أوجد حلول النظام الخطي في حالة $a = 0$ إن وجدت.

السؤال الخامس

استخدم قاعدة كرامر لحساب y التي تحقق النظام التالي

$$\begin{cases} 3x - 2z = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 3 \\ -5x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

إصلاح الإختبار الفصلي الأولالفصل الأول $1437 - 1438$ هـ 244 ريض

السؤال الأول

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(2)R_{1,4}]{(-1)R_{1,2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$=\xrightarrow{(1)R_{3,2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$=\xrightarrow{(1)R_{2,4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$=\xrightarrow[\frac{1}{3}R_4]{(-2)R_{3,4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$=\xrightarrow[(-1)R_{3,1},(1)R_{2,1}]{(1)R_{4,3},(-1)R_{4,1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

و الحل الوحيد هو الحل الصفري.

السؤال الثاني

(١). $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(٢). $2(B+I)^{-1} = A \iff (B+I)^{-1} = \frac{1}{2}A \iff B+I = 2A^{-1}$.

$$B = 2A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 6 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

السؤال الثالث

يكون للمصفوفة A معكوس إذا كان محدد المصفوفة لا يساوي صفر.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a+b & b & a+b \\ 0 & a & a+b \\ a+b & b & a \end{vmatrix} \\ &= (a+b)\begin{vmatrix} 1b & b & a+b \\ 0 & a & a+b \\ 1 & b & a \end{vmatrix} \\ &= (a+b)\begin{vmatrix} 1b & b & a+b \\ 0 & a & a+b \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = -ab(a+b). \end{aligned}$$

و بالتالي يكون للمصفوفة A معكوس إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $a+b \neq 0$.

السؤال الرابع

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & -2 \\ 2 & -a & -1 & -1 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(a)R_{1,3}]{(2)R_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & -2 \\ 0 & 2-a & 2a-1 & -5 \\ 0 & a-2 & 1+a^2 & 1-2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(1)R_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & -2 \\ 0 & 2-a & 2a-1 & -5 \\ 0 & 0 & a(2+a) & -2(2+a) \end{array}\right]$$

(١). **يكون للنظام الخطي عدد لا نهائي من الحلول إذا كانت** $a=-2$.

(٢). إذا كانت $a = 2$ النظام متكافئ مع النظام التالي:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right]$$ و بالتالي النظام غير متسق.

(٣). إذا كانت $a = 0$ النظام ليس له حلول

السؤال الخامس

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix}} = -13.$$

الإختبار الفصلي الأول الفصل الثاني 1437 – 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

استعمل طريقة جاوس جوردن لإيجاد حلول النظام الخطي $AX = B$،

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ،X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

السؤال الثاني

(١). أوجد محدد المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ b & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(٢). أوجد قيم a, b **بحيث تكون للمصفوفة** A **معكوس.**

السؤال الثالث

(١). أوجد معكوس المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(٢). أوجد محدد المصفوفة B **المربعة من الدرجة** 3 **و التي تحقق**

$$2AB = I + A.$$

السؤال الرابع

للنظام الخطي

$$\begin{cases} x + ay + 2z & = & 1 \\ 2x - y + z & = & 3 \\ ax + 4y + 2az & = & 2 \end{cases}$$

(١). أوجد قيم a حتى يكون للنظام الخطي عدد لا نهائي من الحلول. و أوجد حلول النظام في هذه الحالة.

(٢). أوجد قيم a حتى يكون النظام الخطي غير متسق.

السؤال الخامس

لتكن A مربعة من الدرجة n و

$$W = \{B \in M_n : \ AB = BA\}.$$

أثبت أن W فضاء جزئي من M_n
(M_n هو فضاء المصفوفات المربعة من الدرجة n).

إصلاح الإختبار الفصلي الأول، الفصل الثاني $1437 - 1438$ هـ 244 ريض

السؤال الأول
المصفوفة الموسعة للنظام الخطي

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

متكافئة مع المصفوفة التالية:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

و مجموع الحلول هو

$$\{-4 - 9t, -9 - 13t, 3 - 5t, -6t); \ t \in \mathbb{R}\}$$

السؤال الثاني

(١). $|A| = -5(a+2)(b+2)$.

(٢). يكون للمصفوفة A معكوس إذا كانت
$a \neq -2$ و $b \neq -2$.

السؤال الثالث

(١). معكوس المصفوفة A هو $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 17 & -1 & 7 \\ 31 & -2 & 13 \end{pmatrix}$.

(٢). $|I+A| = 2$ و $|2AB| = 8|A||B| = -8|B|$. و بالتالي $|B| = -\dfrac{1}{4}$.

السؤال الرابع

المصفوفة الموسعة للنظام الخطي $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a & 4 & 2a & 2 \end{array}\right]$

متكافئة مع المصفوفة

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & -1-2a & -3 & 1 \\ 0 & 4-a^2 & 0 & 2-a \end{array}\right]$.

النظام ليس له حل.

إذا كانت $a = 2$، النظام له عدد لا نهائي من الحلول.

إذا كانت $a \neq \pm 2$ النظام له حل وحيد.

(١). إذا كانت $a = 2$، النظام الخطي له عدد لا نهائي من الحلول.

مجموع الحلول هو $S = \{(\frac{7}{5} - \frac{4}{5}t, -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}t, t) : \ t \in \mathbb{R}\}$.

(٢). إذا كانت $a = -2$، يكون النظام الخطي غير متسق.

السؤال الخامس

إذا كانت $B, C \in W$ و $a, b \in \mathbb{R}$ فإن

$(aB + bC)A = aBA + bCA = aAB + bAc = A(aB + bC)$.

إذاً W فضاء جزئي من M_n.

الإختبار الفصلي الأول، الفصل الصيفي 1437 − 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

أوجد الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

السؤال الثاني

أوجد قيم a, b بحيث تكون للمصفوفة A معكوس.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & a & 3 & 3 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

السؤال الثالث

(١). أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). أوجد قيم العدد a حتى يكون محدد المصفوفة $A + aI_3$ يساوي 0.

السؤال الرابع

(١). أوجد الشروط على قيم الأعداد a, b, c حتى يكون للنظام الخطي عدد لا نهائي من الحلول

$$\begin{cases} x + 2y + 2z &= a \\ 4x + 5y + 6z &= b \\ 7x + 8y + 10z &= c \end{cases}$$

(٢). ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x+y+z & = & 2 \\ 2x+3y+2z & = & 5 \\ 2x+3y+(m^2-14)z & = & (m+1) \end{cases}$$

أ) أوجد قيم m حتى لا يكون للنظام الخطي حل.

ب) أوجد قيم m حتى يكون للنظام الخطي حل وحيد.

السؤال الخامس

ليكن

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; xy = 0\}.$$

هل المجموعة W تمثل فضاء جزئيا من $\mathbb{R}^2$؟

إصلاح الإختبار الفصلي الأول الفصل الصيفي 1437 − 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-3)R_{1,3},(-2)R_{1,4}]{R_{3,1},(-1)R_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)R_{3,4}]{(-2)R_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2,(-1)R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-2)R_{3,2},(-1)R_{3,1}]{(1)R_{4,3},(4)R_{4,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

السؤال الثاني

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & a & 3 & 3 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & a+4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & b-1 & -1 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -5 \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 \\ 2 & b-1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -5 \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -5(a+2)(b-1). \end{aligned}$$

يكون للمصفوفة A معكوس إذا كانت $a \neq -2$ و $b \neq 1$

السؤال الثالث

(١). معكوس المصفوفة A هو $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 10 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

(٢).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2+a & 1 & 1 \\ 0 & 2+a & 1 \\ 5 & 0 & 1+a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2+a & 1 & 1 \\ -(2+a) & 1+a & 0 \\ 5-(1+a)(2+a) & -(1+a) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -(2+a) & 1+a \\ 5-(1+a)(2+a) & -(1+a) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+a)\begin{vmatrix} -(2+a) & 1 \\ 5-(1+a)(2+a) & -1 \end{vmatrix} \\
&= (1+a)(5-(2+a)^2)
\end{aligned}
$$

.$|A+aI_3| = (1+a)(5-(2+a)^2)$

يكون محدد المصفوفة $A+aI_3$ **يساوي** 0 **إذا كانت** $a=-1$ **أو** $a=-2+\sqrt{5}$ **أو** $a=-2-\sqrt{5}$.

السؤال الرابع

(١). المصفوفة الموسعة للنظام هي $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 10 & c \end{array}\right]$.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 10 & c \end{array}\right]
\xrightarrow[(-7)R_{1,3}]{(-4)R_{1,2}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & a \\ 0 & -3 & -2 & b-4a \\ 0 & -6 & -4 & c-7a \end{array}\right]
$$
$$
\xrightarrow{(-2)R_{2,3}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & a \\ 0 & -3 & -2 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & c-2b+a \end{array}\right]
$$

يكون للنظام الخطي عدد لا نهائي من الحلول إذا كانت $c-2b+a=0$.

(٢). المصفوفة الموسعة للنظام هي $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & (m^2-14) & (m+1) \end{array}\right]$.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & (m^2-14) & (m+1) \end{array}\right]
\xrightarrow[(-1)R_{2,3}]{(-2)R_{1,2}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (m^2-16) & (m-4) \end{array}\right]
$$

أ) إذا كانت $m=-4$ **لا يكون للنظام الخطي حل.**

ب) يكون للنظام الخطي حل وحيد إذا كانت $m \neq \pm 4$.

السؤال الخامس

المجموعة W **لا تمثل فضاء جزئيا من** $\mathbb{R}^2$ **لأن**
$(1,0)\in W$ **و** $(0,1)\in W$ **ولكن** $(1,1)=(1,0)+(0,1)\neq W$.

الإختبار الفصلي الأول، الفصل الأول 1438 – 1439 هـ 244 ريض

السؤال الأول

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **و مصفوفتين** B **و** C **من الدرجة** $(3,3)$ **بحيث** $|B| = 2$ **و** $|C| = 3$.
أوجد المحدد التالي:

$$|\left(A^{-2}B\right)^{-1} A^{-1}C - 2B^{-1}C|$$

السؤال الثاني

ليكن النظام الخطي

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_5 & = & -3 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 & = & 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 3 \end{cases}$$

(١). أكتب النظام على الشكل $AX = B$

(٢). أوجد الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة $[A|B]$.

(٣). أوجد حلول النظام الخطي $(*)$.

السؤال الثالث

(١). أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(٢). أوجد $\text{adj}(A)$.

(٣). أوجد قيم العدد a حتى لا يكون للمصفوفة $A + aI_4$ معكوس

السؤال الرابع)

لتكن المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **و المصفوفة**
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
أوجد المصفوفة A بحيث $BA^{-1} = C$.

السؤال الخامس

ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x + 2y - mz &= 2 - m^2 \\ x + my + 3z &= m^2 - 3 \\ 2x + (m+2)y + 2z &= 0 \end{cases}$$

(١). أوجد قيم m حتى لا يكون للنظام الخطي حل.

(٢). أوجد قيم m حتى يكون للنظام الخطي حل وحيد.

إصلاح الإختبار الفصلي الأول الفصل الأول 1438 – 1439 هـ 244 ريض

السؤال الأول

$$\begin{aligned} |\left(A^{-2}B\right)^{-1} A^{-1}C - 2B^{-1}C| &= |B^{-1}AC - 2B^{-1}C| \\ &= |B^{-1}(A-2I)C| \\ &= \frac{|C|}{|B|}|A - 2I|. \end{aligned}$$

$|A - 2I| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14$.

إذاً $|\left(A^{-2}B\right)^{-1} A^{-1}C - 2B^{-1}C| = 21$.

السؤال الثاني

(١). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(٢).

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{(-2)R_{1,3}}{\xrightarrow{(-3)R_{1,2}}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$=\xrightarrow{(-1)R_{2,4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$=\xrightarrow{(-1)R_{3,4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

$$=\underset{(-3)R_{4,2},(1)R_{4,3}}{\xrightarrow{(-1)R_4,(1)R_{4,1}}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 11 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

$$=\underset{(-3)R_{3,2}}{\xrightarrow{(-1)R_{3,1}}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

(٣). مجموع الحلول للنظام الخطي هي:

$$S = \{(1-3x, -6+7x, -9+6x, -9+3x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$$

السؤال الثالث

(١).

$$
\begin{aligned}
[A|I] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[(-1)R_3]{(-1)R_4,(1)R_{1,2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[(-1)R_{4,1}]{(3)R_{4,3},(-4)R_{4,2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[(-1)R_{2,1}]{(-1)R_{3,2},(1)R_{3,1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{(-1)R_{2,1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

إذًا معكوس المصفوفة A **هي المصفوفة** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(٢). $|A| = 1$، **إذًا** $\operatorname{adj}(A) = A^{-1}$.

(٣). $|A + aI_4| = (a-1)^2(1 + a + a^2)$.

إذًا قيم العدد a **حتى لا يكون للمصفوفة** $A + aI_4$ **معكوس هي** $a = 1$.

السؤال الرابع

$BA^{-1} = C \iff A = C^{-1}B$.

$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = C^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

السؤال الخامس

مصفوفة النظام الخطي هي $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -m \\ 1 & m & 3 \\ 2 & (m+2) & 2 \end{pmatrix}$.

المصفوفة الموسعة للنظام الخطي متكافئة مع المصفوفة التالية

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -m & 2-m^2 \\ 0 & m-2 & 4 & 2m^2-6 \\ 0 & 0 & m-1 & 1 \end{array}\right].$$

(١). **إذا كانت** $m = 1$ **النظام الخطي ليس له حل.**
كذلك إذا كانت $m = 2$ **فإن** $z = 1$ **و لكن حسب المعادلة الثانية فإن** $2z = 1$.
إذاً النظام الخطي ليس له حل إذا كانت $m = 1$ **أو** $m = 2$.

(٢). **إذا كانت** $m \neq 1$ **و** $m \neq 2$ **فإن النظام الخطي له حل وحيد.**

جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الرياضيات

الإختبارات الفصلية الثانية

د. المنجي بلال

الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الأول 1437 − 1436 هـ 244 ريض

السؤال الأول

ليكن $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ 2x + y + z = 0,\ x - y + z = 0\}$

(١). أثبت أن W **هو فضاء جزئي من** $\mathbb{R}^4$

(٢). أوجد أساسا للفضاء W.

السؤال الثاني

لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(١). أوجد أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

(٢). أوجد صفرية المصفوفة A.

السؤال الثالث

ليكن $B = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, -2), v_3 = (1, 1, 0)\}$ **أساسا في** $\mathbb{R}^3$ **وليكن** $C = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$ **الأساس المعتاد (أو الطبيعي) للفضاء** $\mathbb{R}^3$.

(١). أوجد كلا من ${}_CP_B$ **و** ${}_BP_C$.

(٢). أوجد $[v]_B$ **إذا كان** $v = (2, -1, 1)$.

السؤال الرابع

ليكن V **الفضاء الجزئي من** $\mathbb{R}^5$ **المولد بالمتجهات**
$v_1 = (1, -1, 2, 0, 3)$، $v_2 = (2, -2, 4, 0, 6)$، $v_3 = (1, 2, -3, -2, 1)$، $v_4 = (0, -3, 4, 2, 2)$.
أوجد أساسا للفضاء V **محتوى في** $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

السؤال الخامس

(١). أثبت أن $\langle (a, b), (x, y) \rangle = ax + ay + bx + 2by$ **تمثل ضربا داخليا في** $\mathbb{R}^2$.

(٢). إستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس
$\{u_1 = (1, -1), u_2 = (1, 2)\}$ **إلى أساس عياري و متعامد.**

إصلاح الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الأول 1436 – 1437 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). W **هو مجموعة الحلول للنظام الخطي المتجانس** $AX=0$ **بحيث** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
و بالتالي فهي فضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$

(٢).

$$\begin{aligned} X\in W &\iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=-2y \\ z=3y \end{cases} \\ &\iff X=y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

و بالتالي $\{(-2,1,3,0),(0,0,0,1)\}$ **تمثل أساسا للفضاء** W.

السؤال الثاني

(١). **الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة** A **هي** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
و بالتالي $\{(1,-2,1),(0,1,1)\}$ **تكون أساسا للفضاء العمودي للمصفوقة** A.

(٢). **بما أن رتبة المصفوفة** A **هي** 2 **فإن صفرية المصفوفة** A **هي** 2.

السؤال الثالث

(١). ${}_CP_B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **و** ${}_BP_C=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). $[v]_C=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$، $[v]_B={}_BP_C[v]_C=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

السؤال الرابع

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **هي صيغة درجية صفية للمصفوفة** A
و بالتالي $\{v_1,v_3,v_4\}$ **يمثل أساسا للفضاء** V **محتوى في** $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

السؤال الخامس

(١).ض‌ا. **ليكن** $u_1 = (x_1, y_1)$، $u_2 = (x_2, y_2)$ **و** $u_3 = (x_3, y_3)$

$\langle u_1, u_2\rangle = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2y_1y_2 = x_2x_1 + y_2x_1 + x_2y_1 + 2y_2y_1 = \langle u_2, u_1\rangle$

.ب.

$$\begin{aligned}
\langle u_1 + u_2, u_3\rangle &= (x_1 + x_2)x_3 + (x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3 + 2(y_1 + y_2)y_3 \\
&= x_1x_3 + x_2x_3 + x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 \\
&= \langle u_1, u_3\rangle + \langle u_2, u_3\rangle
\end{aligned}$$

.هـ. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha ax + \alpha ay + \alpha bx + 2\alpha by = \alpha\langle u, v\rangle$

.د $\langle u, u\rangle = x^2 + 2xy + +2y^2 = (x + y)^2 + y^2 \geq 0$

.ه $\langle u, u\rangle = 0 \iff (x + y)^2 + y^2 = 0 \iff y = 0, x = -y = 0 \iff u = 0$

(٢). $\|u_1\| = 1$ **و بالتالي** $v_1 = u_1$.

$\langle u_2, v_1\rangle = -2$ **و بالتالي** $v_2 = (1, 0)$.

إذاً $\{v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 0)\}$ **هو أساس عياري و متعامد**.

الاختبار الفصلي الثاني، الفصل الثاني 1437 − 1436 هـ 244 ريض

السؤال الأول

ليكن $B = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,-2), v_3 = (1,1,0)\}$
أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ **وليكن** $C = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$
الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$.

(١). أوجد كلا من ${}_CP_B$ **و** ${}_BP_C$.

(٢). أوجد $[v]_B$ **إذا كان** $[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

السؤال الثاني

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(١). أوجد أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة .

(٢). عين أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة .

(٣). أوجد رتبة المصفوفة A.

السؤال الثالث

ليكن الفضاء الجزئي F **من** $\mathbb{R}^4$ **المولد بالمتجهات**
$S = \{u = (1,1,0,0),\ v = (1,0,-1,0),\ w = (0,0,1,1)\}$.

(١). أثبت أن S **هو أساس للفضاء الجزئي** F.

(٢). أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء الجزئي F **باستعمال خوارزمية جرام شميد.**
(حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي).

السؤال الرابع

ليكن W **الفضاء الجزئي من** $\mathbb{R}^5$ **المولد بالمتجهات**
$v_1 = (1,0,2,-1,2)$، $v_2 = (2,0,4,-2,4)$، $v_3 = (1,2,-1,2,0)$،
$v_4 = (1,4,-4,5,-2)$.

(١). أوجد أساسا للفضاء W **محتوى في** $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

(٢). أوجد أساسا للفضاء $\mathbb{R}^5$ **يحتوي على** $\{v_1, v_3\}$.

إصلاح الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الثاني 1437 − 1436 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). $_CP_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ و $_BP_C$ هي معكوس المصفوفة $_CP_B$. إذًا $_BP_C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). $[v]_B = {}_BP_C[v]_C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

السؤال الثاني

(١). الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و بالتالي حلول النظام الخطي المتجانس $AX = 0$ هي:

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = -3z - 5t, y = 2z + 3t\}$$

و بالتالي $\{(-3, 2, 1, 0), (-5, 3, 0, 1)\}$ هو أساس للفضاء الصفري للمصفوقة A.

(٢). نستنتج من السؤال الأول أن $\{(1, 0, 2, 0), (2, -1, 3, 1)\}$ هو أساس للفضاء العمودي للمصفوقة A.

(٣). رتبة المصفوفة A هي 2

السؤال الثالث

$$S = \{u = (1, 1, 0, 0),\ v = (1, 0, -1, 0),\ w = (0, 0, 1, 1)\}.$$

(١). لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ المصفوفة التي أعمدتها إحداثيات المتجهات $u, v,\ w$ على التوالي.

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و بالتالي الحل الوحيد للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ هو الحل الصفري و بالتالي S هو أساس للفضاء الجزئي F.

(٢). $\|u\| = \sqrt{2}$، $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$،
$\langle v, v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$،
$v - \langle v, v_1\rangle v_1 = \frac{1}{2}(1,-1,-2,0)$.
$v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2,0)$.

$\langle w, v_1\rangle = 0$، $\langle w, v_2\rangle = \frac{-2}{\sqrt{6}}$،
$w - \langle w, v_1\rangle v_1 - \langle w, v_2\rangle v_2 = \frac{1}{3}(1,-1,1,3)$.
$v_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1,-1,1,3)$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ هو أساسا عياري متعامد للفضاء الجزئي F..

السؤال الرابع

(١). **لتكن** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **المصفوفة التي أعمدتها إحداثيات المتجهات** $v_1, v_2, v_3 w v_4$ **على التوالي**.

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A **هي** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **و بالتالي** $\{v_1, v_3\}$ **هو أساس للفضاء** W **محتوى في** $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

(٢). **نظيف للمتجهات** $\{v_1, v_3\}$ **الأساس المعتاد للفضاء** $\mathbb{R}^4$ **لنتحصل على مجموعة مولدة.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **هي صيغة درجية صفية للمصفوفة، و بالتالي** $\{v_1, v_3, (1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0)\}$ **هو أساس للفضاء** $\mathbb{R}^5$ **يحتوي على** $\{v_1, v_3\}$.

الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الصيفي $1436 - 1435$ هـ 244 ريض

السؤال الأول

ليكن $B = \{v_1 = (2,1,1), v_2 = (1,0,2), v_3 = (2,1,2)\}$ أساسا في $\mathbb{R}^3$
وليكن $C = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ الأساس المعتاد (أو الطبيعي) للفضاء $\mathbb{R}^3$.

(١). أوجد كلا من ${}_CP_B$ و ${}_BP_C$.

(٢). أوجد $[v]_B$ إذا كان $v = (1,-1,1)$.

السؤال الثاني

لتكن
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(١). أوجد أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

(٢). أوجد أساسا لنواة A.

السؤال الثالث

ليكن $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x - 2z = 0\}$
بين أن W هو فضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$ وأوجد أساسا له.

السؤال الرابع

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

(١). عين أساسا للفضاء العمودي $W = col(A)$

(٢). ليكن $u = (x,y,z)$. أوجد القيود التي يجب وضعها على x, y, z بحيث يكون $u \in W$.

السؤال الخامس

أوجد أساسا للفضاء $\mathbb{R}^4$ يحتوي على $v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (1,-1,0,1)$.

السؤال السادس

ليكن V **الفضاء الجزئي من** $\mathbb{R}^4$ **المولد بالمتجهات** $v_1 = (1,-1,1,0)$، $v_2 = (2,1,-2,1)$، $v_3 = (1,2,-3,1)$، $v_4 = (3,3,-5,2)$.
أوجد أساسا للفضاء V **محتوى في** $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

إصلاح الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الصيفي 1436 – 1435 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). $_CP_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$، $_BP_C = {_CP_B^{-1}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). $[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$، $[v]_B = {_BP_C}[v]_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

السؤال الثاني

(١). الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A **هي** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$\{(1,0,3,-2), (0,1,-1,2)\}$ **يمثل أساسا للفضاء الصفي للمصفوقة** A.

(٢). مجموع الحلول للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ **هو**
$\{z(-3,1,1,0) + t(2,-2,0,1) :\ z,t \in \mathbb{R}\}$. **و بالتالي**
$\{(-3,1,1,0), (2,-2,0,1)\}$ **هو أساس لنواة المصفوفة** A.

السؤال الثالث

$v = (x,y,z,t) \in W \iff x = 2z \iff v = z(2,0,1,0) + y(0,1,0,0) + t(0,0,0,1)$.
إذاً W **هو مجموع التركيبات الخطية للمتجهات**
$v_1 = (2,0,1,0)$، $v_2 = (0,1,0,0)$، $v_3 = (0,0,0,1)$.
و بالتالي W **هو فضاء جزئي من** $\mathbb{R}^4$ **و** $\{v_1, v_2, v_3\}$ **هو أساس له**
لأن المجموعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ **مستقلة خطيا و مولدة.**

السؤال الرابع

(١). المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **متكافئة صفيا مع المصفوفة** A.
و بالتالي $\{(1,3,2), (-,1,1)\}$ **هو أساس للفضاء العمودي** $W = col(A)$

(٢). $u=(x,y,z)\in W$ إذا و إذا فقط إذا كان النظام الخطي التالي متسقا

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & x \\ 3 & 4 & 6 & -1 & y \\ 2 & 4 & 7 & -3 & z \end{array}\right].$$

هذا النظام متكافئ خطيا مع النظام التالي $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & x \\ 0 & 4 & 9 & -7 & y-3 \\ 0 & 4 & 9 & -7 & z-2 \end{array}\right]$.

و هذا النظام متسق إذا و إذا فقط إذا $x-3x=z-2x \iff x-y+z=0$.

السؤال الخامس

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متكافئة صفيا مع المصفوفة

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و بالتالي

$\{(1,0,0,1),(1,-1,0,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$ هو أساس للفضاء $\mathbb{R}^4$

يحتوي على $v_1=(1,0,0,1), v_2=(1,-1,0,1)$.

السؤال السادس

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ متكافئة صفيا مع المصفوفة

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و بالتالي $\{v_1,v_2\}$ هو أساس للفضاء V محتوى في $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الأول 1437 – 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

ليكن W **الفضاء الجزئي من** $\mathbb{R}^3$ **المولد بالمتجهات التالية:** $u_1 = (1, 2, -1)$، $u_2 = (-1, 1, 2)$

(١). **أثبت أن المجموعة** $\{u_1, u_2\}$ **مستقلة خطيا.**

(٢). **أثبت أن المتجه** $u = (1, 5, 0)$ **ينتمي للفضاء** W.

(٣). **أثبت أن المتجه** $v = (1, 2, -2)$ **لا ينتمي للفضاء** W.

السؤال الثاني

(١). **أثبت أن** $B = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (-2, 1, 0), v_3 = (1, 1, 2)\}$ **أساسا للفضاء** $\mathbb{R}^3$.

(٢). **إذا كان** $C = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$ **الأساس المعتاد للفضاء** $\mathbb{R}^3$
أوجد المصفوفة ${}_BP_C$ **(مصفوفة الإنتقال من الأساس** C **إلى الأساس** B.**)**

(٣). **أوجد** $[v]_B$ **إذا كان** $[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

السؤال الثالث

ليكن W **الفضاء الجزئي من** $\mathbb{R}^4$ **المولد بالمتجهات التالية**
$u_1 = (1, -1, 2, 0)$, $u_2 = (2, -2, 4, 0)$, $u_3 = (2, -1, 3, 1)$,
$u_4 = (1, 0, 1, 1)$, $u_5 = (0, 1, -1, 1)$.

(١). **استخرج أساسا للفضاء** W **من المجموعة** $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.

(٢). **أوجد بعد الفضاء** W.

السؤال الرابع

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(١). **أوجد أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة** (Null space).

(٢). **عين أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة.**

(٣). **أوجد رتبة المصفوفة** A.

السؤال الخامس ليكن $V = \mathbb{R}^3$، $X = (x_1, x_2, x_3)$ **و** $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

(١). أثبت أن الدالة
$$\langle X,Y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1$$
لا تمثل ضربا داخليا على الفضاء V.

(٢). نعرف الضرب الداخلي على الفضاء V كما يلي
$$\langle X,Y\rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

[i] أوجد المسافة بين المتجهين $u=(-2,1,1)$ و $v=(3,2,1)$.

[ii] إذا كان $X=(2,0,1)$ و $Y=(-3,1,2)$، فأثبت أن
$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

إصلاح الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الأول 1437 – 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١).
$$xu_1 + yu_2 = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$
و بالتالي المجموعة $\{u_1, u_2\}$ مستقلة خطيا.

(٢). المتجه $u=(1,5,0)$ ينتمي للفضاء W إذا و إذا فقط إا وجد $x,y\in\mathbb{R}$ بحيث $u = xu_1 + yu_2$، و هذا متكافئ مع أن النظام الخطي $AX=B$ متسق، حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = 2, y = 1$$
و بالتالي المتجه u ينتمي للفضاء W.

(٣).
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ -x + 2y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$
و هذا مستحيل. و بالتالي المتجه v لا ينتمي للفضاء W.

السؤال الثاني

(١). بما أن المحدد $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1$ فإن المجموعة B تكون أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

(٢). $_{C}P_{B}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ و $_{B}P_{C}={}_{C}P_{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-4&3\\-1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$

(٣). $[v]_B={}_{B}P_{C}[v]_C=\begin{pmatrix}-8\\-2\\5\end{pmatrix}$

السؤال الثالث

(١). المصفوفة $\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

هي صيغة درجية صفية للمصفوفة $\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\-1&-2&-1&0&1\\2&4&3&1&-1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$

و بالتلي u_1,u_3 هو أساسا للفضاء الجزئي W.

(٢). بعد الفضاء W هو 2.

السؤال الرابع

المصفوفة $\begin{pmatrix}1&2&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A و بالتالي مجموع الحلول للنظام الخطي المتجانس هو
$S=\{y(-2,1,0,0,0)+t(-1,1,0,0,0):\ y,t\in\mathbb{R}\}$.

(١). المجموعة $\{u_1=(-2,1,0,0,0),u_2=(-1,1,0,0,0)\}$ تكون أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة.

(٢). المجموعة $\{v_1=(1,-1,2,1),v_2=(-1,2,0,1),v_3=(-1,2,0,3)\}$ تكون أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة.

(٣). رتبة المصفوفة A هي 3.

السؤال الخامس

(١). بما أن $\langle X,Y\rangle\neq\langle Y,X\rangle$ فإن الدالة لا تمثل ضربا داخليا على الفضاء V.

(٢). [i] المسافة بين المتجهين هي $\|u-v\|=\sqrt{30}$.

[ii] $\langle X,Y\rangle=0$ و بالتالي المتجهين متعامدين و باستعمال مبرهنة بيتاغورس

$$\|X+Y\|^2=\|X\|^2+\|Y\|^2.$$

الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الثاني 1437 – 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول
أوجد أساسا للفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات:

$$u_1 = (1,0,2,-1),\ u_2 = (-1,1,-1,0)\ u_3 = (0,1,1,-1),\ u_4 = (2,-1,3,-1)$$

السؤال الثاني

(١). **أوجد قيم a حتى تكون المتجهات**
$u_1 = (1,-1,3,1),\quad u_2 = (3,1,5,3),\quad u_3 = (1,1,1,a)$ **مرتبطة خطيا.**

(٢). **أوجد أساسا للفضاء $\mathbb{R}^4$ يحتوي على** $\{u_1, u_2, u_3\}$ **في حالة** $a = 0$.

السؤال الثالث
لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & m \end{pmatrix}$
أوجد قيم m حتى تكون صفرية المصفوفة A **(**$\text{nullity}\ (A)$**) تساوي** 1.

السؤال الرابع
ليكن V فضاء متجهات و $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ **أساسا لهذا الفضاء.**

(١). **إذا كانت**
$$u_1 = v_1 - v_2 + v_3$$
$$u_2 = v_2 + 2v_3$$
$$u_3 = v_1 - 2v_3$$
فأثبت أن المجموعة $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ **تكون أساسا للفضاء** V.

(٢). **أوجد المصفوفة** ${}_BP_C$ **(مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B).**

(٣). **إذا كان** $v = u_1 - 2v_2 + u_3$
فأوجد $[v]_C$ **و** $[v]_B$.

السؤال الخامس
ليكن $V = \mathbb{R}^2$، $X_1 = (x_1, y_1)$ **و** $X_2 = (x_2, y_2)$.
نعرف الضرب الداخلي على الفضاء V كما يلي:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

(١). **أوجد المسافة بين المتجهين** $u = (-1,2)$ **و** $v = (1,-1)$ **و أوجد الزاوية التي بينهما.**

(٢). **أوجد قيمة c بحيث يكون المتجه** $v = (1,c)$ **متعامدا على المتجه** $u = (-2,3)$.

إصلاح الإختبار الفصلي الثاني الفصل الثاني $1437 - 1438$ هـ 244 ريض

السؤال الأول

لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **المصفوفة التي أعمدتها** u_1, u_2, u_3, u_4.

المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **هي صيغة درجية صفية للمصفوفة** A.

إذاً $\{u_1, u_2\}$ **هو أساس للفضاء المولد بالمتجهات** u_1, u_2, u_3, u_4.

السؤال الثاني

(١). لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ **المصفوفة التي أعمدتها** u_1, u_2, u_3.

المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **هي صيغة درجية صفية للمصفوفة** A.

إذاً تكون المتجهات u_1, u_2, u_3 **مرتبطة خطيا إذا و إذا فقط كانت** $a = 1$.

(٢). في حالة $a = 0$ **تكون المتجهات** $\{u_1, u_2, u_3\}$ **مستقلة خطيا.**

لتكن المصفوفة $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

المصفوفة $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
هي صيغة درجية صفية للمصفوفة C.

إذاً المتجهات $u_1, u_2, u_3, (1,0,0,0)$ **تمثل أساسا للفضاء** $\mathbb{R}^4$.

السؤال الثالث

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-5 \end{pmatrix}$ **هي صيغة درجية صفية للمصفوفة** A.

حتى تكون صفرية المصفوفة A **تساوي** 1 **لا بد أن تكون رتبة المصفوفة** 3.

إذاً لا بد أن تكون $m \neq 5$.

السؤال الرابع

(١). بما أن المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -5$ فإن المجموعة C تكون أساسا للفضاء V.

(٢). $_BP_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ و $_CP_B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(٣). $v = u_1 - 2v_2 + u_3 = 2v_1 - 3v_2 - v_3$.
إذًا $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $[v]_C = {}_CP_B[v]_B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

السؤال الخامس

(١). المسافة بين المتجهين u و v هي $\sqrt{11}$ = $d(u,v) = \|u-v\|$ لأن $u - v = (-2, 3)$.
$\langle u, v\rangle = -2$، $\|u\| = 1$، $\|v\| = 6$.
$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{6}}$.

(٢). $\langle u, v\rangle = 5c + 2$.
يكون المتجه $v = (1, c)$ متعامداً على المتجه $u = (-2, 3)$ يجب أن تكون $c = -\dfrac{2}{5}$.

الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الصيفي 1437 − 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

ليكن F الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمجموعة
$S = \{(1,1,2),(1,4,5),(1,2,7),(-1,8,3)\}$

(١). هل $(0,3,3) \in F$؟

(٢). هل المجموعة S مستقلة خطيا؟

(٣). هل المجموعة S مولدة للفضاء $\mathbb{R}^3$؟

السؤال الثاني

أوجد المصفوفتين $_CP_B$ و $_BP_C$ و $[v]_B$ و $[v]_C$
حيث $B = \{(1,1),(-1,1)\}$، $C = \{(1,2),(2,1)\}$
كل منهما أساس في $\mathbb{R}^2$ و $v = (3,-5)$

السؤال الثالث

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(١). أوجد أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

(٢). عين أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

(٣). أوجد صفرية المصفوفة A.

السؤال الرابع

لتكن المجموعة $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (-1,1)\}$ من $\mathbb{R}^2$.

(١). أثبت أن $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$. تعرف ضربا داخليا في $\mathbb{R}^2$.

(٢). أوجد المسافة بين المتجهين $v_1 = (1,1)$ و $v_2 = (-1,1)$.

(٣). أوجد الزاوية التي بين المتجهين v_1, v_2.

(٤). إستخدم قاعدة جرام شميدت لتحويل الأساس B إلى أساس عياري و متعامد بالنسبة للضرب الداخلي المعرف سابقا.

السؤال الخامس

ليكن $T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ حيث $T_1(x,y,z) = (x+y,z)$
و $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ حيث $T_2(x,y) = (x^2, x+y)$

(١). أثبت فيما إذا كان T_1 و T_2 تحويلين خطيين أم لا؟ (علل إجابتك)

(٢). جد حلول المعادلة $T_1(x, y, z) = (0, 0)$.

إصلاح الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الصيفي 1437 − 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). يكون المتجه $(0, 3, 3) \in F$ **إذا كان النظام الخطي التالي متسقا:** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)R_{1,3}]{(-1)R_{1,2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_{2,3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

و هذا النظام متسقا.

(٢). المجموعة S **ليست مستقلة خطيا لأن بعد الفضاء** $\mathbb{R}^3$ **هو** 3 **و المجموعة تحتوي على** 4 **متجهات.**

(٣). المجموعة S **مولدة للفضاء** $\mathbb{R}^3$ **لأن المصفوفة** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ **هي صيغة درجية صفية للمصفوفة** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ **و المتجهات** $\{(1, 1, 2), (1, 4, 5), (1, 2, 7)\}$ **تمثل أساسا للفضاء** $\mathbb{R}^3$.

السؤال الثاني

ليكن النظام الخطي $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \end{array}\right]$.

الحل لهذا النظام الخطي هو $(\frac{-a+2b}{3}, \frac{2a-b}{3})$ **و بالتالي**

$$_CP_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ و } [v]_C = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

$$_BP_C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } [v]_B = {_BP_C}[v]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

السؤال الثالث

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة** A. **و بالتالي**

(١). $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ **هو أساس للفضاء الصفي للمصفوفة** A.

(٢). $\{(2,1,2,1),(1,0,-2,1),(1,1,1,1)\}$ **هو أساس للفضاء العمودي للمصفوفة** A.

(٣). **بما أن رتبة المصفوفة هي** 3 **فإن صفرية المصفوفة** A **هي** 0.

السؤال الرابع

لتكن المجموعة $B=\{v_1=(1,1),v_2=(-1,1)\}$ **من** $\mathbb{R}^2$.

(١). **إذا كان** $u=(x_1,y_1),\ v=(x_2,y_2),\ w=(x_3,y_3)$

$$\langle u,v\rangle = 2x_1x_2+3y_1y_2 = 2x_2x_1+3y_2y_1 = \langle v,u\rangle$$

ضيا.

$$\begin{aligned}\langle u+v,w\rangle &= 2(x_1+x_2)x_3+3(y_1+y_2)y_3\\ &= 2x_1x_3+2x_2x_3+3y_1y_3+2y_2y_3\\ &= \langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

هـ. $\langle \alpha u,v\rangle = 2\alpha x_1x_2+3\alpha y_1y_2 = \alpha(2x_1x_2+3y_1y_2)=\alpha\langle u,v\rangle$

د. $\langle u,u\rangle = 2x_1^2+3y_1^2\geq 0$

ه. $\langle u,u\rangle = 0 \iff 2x_1^2+3y_1^2=0 \iff u=0$

(٢). $u-v=(2,0)$،

المسافة بين المتجهين هي: $d(v_1,v_2)=\|u-v\|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

(٣). **إذا كانت الزاوية التي بين المتجهين** v_1، v_2 **هي** θ **فإن** $\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ **لأن** $\langle u,v\rangle=1$، $\|u\|=\|v\|=\sqrt{5}$.

(٤). $u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}v_1$.

$\langle v_2,u_1\rangle=\frac{1}{5}$.

المتجه $w_2=v_2-\frac{1}{5}v_1=\frac{1}{5}(-6,4)$ **متعامد على المتجه** u_1.

إذا كان $u_2=\frac{1}{2\sqrt{30}}(-6,4)$ **فإن الأساس** (u_1,u_2) **عياري و متعامد.**

السؤال الخامس

(١).

$$\begin{aligned}T_1\left[a(x,y,z)+b(x',y',z')\right] &= T_1\left(ax+bx',ay+by',az+bz'\right)\\ &= (ax+bx'+ay+by',az+bz')\\ &= a(x+y,z)+b(x'+y',z')\\ &= aT_1(x,y,z)+bT_1(x',y',z').\end{aligned}$$

إذاً T_1 **هو تحويل خطي.**

T_2 **ليس تحويلا خطيا لأن** $T_2(2,2)=(4,4)\neq 2T_2(1,1)=2(1,2)$.

(٢). $T_1(x,y,z)=(0,0) \iff z=0,y=-x$.

إذاً حلول المعادلة هي: $\{(x,-x,0):\ x\in\mathbb{R}\}$.

الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الأول 1438 – 1439 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). بين أن المجموعة $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا حيث $v_1(1, 2, -1, 0)$، $v_2 = (2, 1, 0, 2)$، $v_3 = (1, -1, 2, 1)$.

(٢). أثبت أن المجموعة $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ مولدة للفضاء $\mathbb{R}^4$ حيث v_1, v_2, v_3 هي المتجهات الواردة في الفقرة (١) و $v_4 = (1, 0, 2, 0)$، $v_5 = (0, 1, 1, 2)$.

السؤال الثاني

(١). أوجد أساسا للفضاء الجزئي المولد بالمجموعة
$S = \{u_1 = (1, 1, -2, 3), u_2 = (-2, -2, 4, -6), u_3 = (0, 1, -1, 2), u_4 = (1, 2, -3, 5)\}$

(٢). أوجد أساسا للفضاء الجزئي

$$E = \{(a - 2b, 3a + b, a) \in \mathbb{R}^3;\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

السؤال الثالث

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & -1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

(١). أوجد أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

(٢). أوجد رتبة (Rank) و صفرية (nullity) المصفوفة A.

السؤال الرابع

ليكن $B = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 2), v_3 = (-1, -1, 0)\}$
أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ و ليكن $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ أساسا آخر للفضاء $\mathbb{R}^3$ حيث
$${}_BP_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
هي مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B.

احسب ما يلي:

(١). u_1, u_2, u_3.

(٢). $[v]_C$ و $[v]_B$ للمتجه $v = (-1, 3, 3)$

السؤال الخامس

ليكن $\langle\ ,\ \rangle$ الضرب الداخلي المعرف على $\mathbb{R}^3$ كما يلي:

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3.$$

حيث $u = (x_1, x_2, x_3)$ و $v = (y_1, y_2, y_3)$.

(١). أوجد $\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين المتجهين
$u = (1, -2, 1)$ و $v = (0, 1, 2)$.

(٢). أوجد أساسا عياريا ومتعامدا للفضاء الجزئي المولد بالمجموعة
$\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 1, -3)\}$.

إصلاح الإختبار الفصلي الثاني، الفصل الأول 1438 − 1439 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ بحيث تكون أعمدتها إحداثيات المتجهات v_1, v_2, v_3
المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي صيغة درجية صفية للمصفوفة A.
و بالتالي بعد الفضاء العمودي للمصفوفة هو بعد الفضاء المولد بالمجموعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ و هو 3.
إذاً المجموعة $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا

(٢). لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ بحيث تكون أعمدتها إحداثيات المتجهات v_1, v_2, v_3, v_4, v_5
المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$ هي صيغة درجية صفية للمصفوفة A.
و بالتالي بعد الفضاء العمودي للمصفوفة و هو الفضاء المولد بالمجموعة $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ هو 4.
إذاً المجموعة $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ مولدة للفضاء $\mathbb{R}^4$

السؤال الثاني

(١). لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ بحيث تكون أعمدتها إحداثيات المتجهات u_1, u_2, u_3, u_4

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي صيغة درجية صفية للمصفوفة A.
و بالتالي $\{(1,1,-2,3),(0,1,-1,2)\}$ هو أساس للفضاء.

(٢). $u=(a-2b,3a+b,a)=a(1,3,1)+b(-2,1,0)$ و بالتالي المجموعة $\{(1,3,1),(-2,1,0)\}$ هي مولدة للفضاء الجزئي E
إذا كان $x(1,3,1)+y(-2,1,0)=(0,0,0)$
فإن $x=y=0$ و بالتالي المجموعة $\{(1,3,1),(-2,1,0)\}$ هي أساس للفضاء الجزئي E

السؤال الثالث

(١). المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A.
و بالتالي $\{(1,5,1,5),(1,-1,1,0),(2,4,1,5)\}$ هو أساس للفضاء العمودي للمصفوفة A

(٢). رتبة المصفوفة A هي 3 و صفرية المصفوفة A هي 3

السؤال الرابع

(١). $u_1=(-1,-1,1), u_2=(1,-1,-1), u_3=(-3,1,4)$.
إذا كان S هو الأساس المعتاد في $\mathbb{R}^3$ فإن
$${}_SP_C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$ وبالتالي $[v]_C={}_CP_S[v]_S$
بما أن $${}_CP_S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ فإن $$[v]_C=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
$$[v]_B={}_BP_C[v]_C=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

السؤال الخامس

(١). $\langle u,v\rangle=4$ ،$\|u\|^2=13$ ،$\|v\|^2=18$
و بالتالي $\cos\theta=\dfrac{4}{3\sqrt{26}}$

(٢). $\|v_1\|^2=3$ ،$u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0)$ ،$\langle v_2,u_1\rangle=\sqrt{3}$،
$v_2-\sqrt{3}u_1=(0,0,-3)$، و بالتالي $u_2=\frac{1}{2}(0,0,-1)$
و $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0),\frac{1}{2}(0,0,-1)\}$ هو أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي المولد بالمجموعة $\{v_1=(1,1,0),v_2=(1,1,-3)\}$.

جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الرياضيات

الإختبارات النهائية

د. المنجي بلال

الإختبار النهائي، الفصل الأول 1437 – 1436 هـ 244 ريض

السؤال الأول

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 3 \end{pmatrix}$.

(١). أوجد قيم m **بحيث يكون الحل الوحيدللنظام الخطي المتجانس** $AX = 0$ **هو الحل التافه.**

(٢). إذا كان $m = 1$، **أوجد باستعمال قاعدة كرامر حلول النظام الخطي** $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(٣). أوجد قيمة m **بحيث يكون** 1 **هي قيمة مميزة للمصفوفة** A.

السؤال الثاني

ليكن E **الفضاء الجزئي من** $\mathbb{R}^4$ **المولد بالمتجهات التالية**
$v_1 = (2,-1,1,3), v_2 = (1,2,-1,-2), v_3 = (0,-5,3,7), v_4 = (1,2,-1,1)$

(١). أوجد بعد الفضاء الجزئي E.

(٢). هل المتجه $v_5 = (1,-1,2,3)$ **ينتمي للفضاء الجزئي** E.

(٣). برهن أن مجموعة المتجهات v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 **مولدة للفضاء** $\mathbb{R}^4$.

السؤال الثالث

إذا كان $T_A\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **تحويلا خطيا معرفا بالقاعدة** $T_A(X) = AX$ **حيث أن**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(١). أوجد أساسا لنواة T $(\ker T)$.

(٢). أوجد أساسا لصورة T $(\mathrm{Im} T)$.

السؤال الرابع

ليكن الضرب الداخلي المعرف على $\mathbb{R}^3$ **بما يلي:**
$\langle (a,b,c),(x,y,z) \rangle = 2ax + 3by + cz$

إستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس
$\{u_1 = (\sqrt{2}, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 1, 1)\}$ **إلى أساس عياري و متعامد.**

السؤال الخامس

(١). **أوجد مصفوفة التحويل الخطي** $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **المعرف بما يلي:**

$$T(1, 0) = (1, -3), \quad T(0, 1) = (1, -2).$$

(٢). **أوجد مصفوفة التحويل** T **بالنسبة للأساس** $B = \{u = (1, 1), v(1, -1)\}$.

السؤال السادس

لتكن A **المصفوفة** $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -24 \\ -9 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(١). **أوجد القيم المميزة للمصفوفة** A **واستنتج أن** A **قابلة للاستقطار.**

(٢). **أوجد مصفوفة** P **لها معكوس بحيث** $P^{-1}AP$ **هي مصفوفة قطرية مع إعطاء المصفوفة القطرية.**

إصلاح الإختبار النهائي، الفصل الأول $1437 - 1436$ **هـ** 244 **ريض**

السؤال الأول

(١). $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 3 \end{vmatrix} = 2(m+1)$. **و بالتالي يكون الحل الوحيد للنظام الخطي المتجانس** $AX = 0$ **هو الحل التافه إذا كان** $m \neq -1$.

(٢). **إذا كان** $m = 1$،
$|A| = 4$، $|A_x| = -4$، $|A_y| = -8$، $|A_z| = 8$ **و بالتالي** $(-1, -2, 2)$ **هو الحل الوحيد للنظام الخطي** $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(٣). $|A - I| = 2m$. **إذا يكون** 1 **هي قيمة مميزة للمصفوفة** A **إذا كانت** $m = 0$.

السؤال الثاني

(١). المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **هي صيغة درجية صفية للمصفوفة** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ **و بالتالي بعد الفضاء الجزئي** E **هو** 3 **و** $\{(2,-1,1,3),(1,2,-1,-2),(1,2,-1,1)\}$ **هو أساس لهذا الفضاء.**

(٢). بما أن المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -18 \neq$ **، فإن المتجه** $v_5 = (1,-1,2,3)$ **لا ينتمي للفضاء الجزئي** E.

(٣). بما أن المتجهات v_1, v_2, v_4, v_5 **مستقلة خطيا، فهي أساس للفضاء** $\mathbb{R}^4$. **و بالتالي مجموعة المتجهات** v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 **مولدة للفضاء** $\mathbb{R}^4$.

السؤال الثالث

(١). المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة** A **و مجموع الحلول للنظام الخطي المتجانس** $AX = 0$ **هو** $\{s(-2,1,0,0,0)+t(-3,0,1,1,0);\ s,t \in \mathbb{R}\}$.
و بالتالي $\{(-2,1,0,0,0),(-3,0,1,1,0)\}$ **هو أساس لنواة** T.

(٢). من الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A **نستنتج أن** $\{(1,1,2,0),(1,2,3,1),(1,2,3,-1)\}$ **هو أساس لصورة** T.

السؤال الرابع

$\|u_1\| = 2$، $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0)$.
$\langle u_2, v_1\rangle = \sqrt{2}$، **و بالتالي** $v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,0)$.
$\langle u_3, v_1\rangle = \sqrt{2}$، $\langle u_3, v_2\rangle = \sqrt{3}$ **و بالتالي** $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1)$.
الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ **هو أساس عياري و متعامد للفضاء** $\mathbb{R}^3$.

السؤال الخامس

(١). $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

(٢). $_C P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$، $_B P_C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$[T]_B = {}_B P_C [T]_C {}_C P_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

السؤال السادس

(١). $q_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (1+\lambda)^2(2-\lambda)$.
القيم المميزة للمصفوفة A **هي** $-1, 2$.

$3x + 2y - 8z = 0 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

و بما أن بعد الفضاء المميز E_{-1} **هو** 2 **فإن المصفوفة** A **قابلة للاستقطار.**

(٢). $\{(0,4,1), (2,-3,0)\}$ **هو أساس للفضاء المميز** E_{-1}.
المتجه $(1,-1,0)$ **هو متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة** $\lambda = -2$.
المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **و المصفوفة القطرية** $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

الإختبار النهائي، الفصل الثاني 1437 − 1436 هـ 244 ريض

السؤال الاول

لتكن كل من A, B, C مصفوفة مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$\mathbf{2AC - AB^2 + 9I = 0}$$

حيث $\mathbf{B = 6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{C = 9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(١). أوجد المصفوفة $\mathbf{A^{-1}}$.

(٢). أوجد محدد المصفوفة $\mathbf{A}$.

(٣). أوجد $\mathrm{adj}\mathbf{A}$.

السؤال الثاني

(١). عين كل من a, b, c التي من أجلها يكون $(1, -1, 2)$ حلا للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}.$$

(٢). أثبت أن $(\mathbf{1, -1, 2})$ هو حلا وحيدا للنظام الخطي في الفقرة (١).

السؤال الثالث

عين أساس لصورة ونواة التحويل الخطي $\mathrm{T}\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$$\mathbf{T(x, y, z, t) = (x - y, 2z + 3t, y + 4z + 3t, x + 6z + 6t)}.$$

السؤال الرابع

ليكن $\mathrm{T}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد S لـــ $\mathbb{R}^3$ هي

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[\mathrm{T}]_{\mathrm{B}}$ بالنسبة للأساس B التالي

$$\mathbf{B = \{u = (1, 1, 1),\ v = (1, 1, 0),\ w = (0, 1, -1)\}}.$$

السؤال الخامس

(١). أثبت أن 1 و -1 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(٢). أوجد التعدد الجبري لكل من القيم مميزة
1 و -1.

(٣). أوجد أساسا للفضاء المميز $\mathbf{E_1} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX} = \mathbf{X}\}$ و استنتج قيم m بحيث تكون المصفوفة $\mathbf{A}$ قابلة للاستقطار.

(٤). أ) إذا كانت $\mathbf{m = 0}$ أوجد مصفوفة $\mathbf{P}$ لها معكوس ومصفوفة $\mathbf{D}$ قطرية حيث $\mathbf{D = P^{-1}AP}$.
ب) إذا كانت $\mathbf{m = 0}$ احسب $\mathbf{A^{1437}}$.

إصلاح الإختبار النهائي، الفصل الثاني $1437 - 1436$ هـ 244 ريض

السؤال الاول

(١). $A(2C - B^2) = -9I$، **و بالتالي** $A^{-1} = -\frac{1}{9}(2C - B^2) = 2\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(٢). $|A^{-1}| = -52^6$، **إذًا** $|A| = -\frac{1}{5}2^{-6}$.

(٣). $\mathrm{adj}A = |A|A^{-1}$.

السؤال الثاني

(١). إذا كان $(1, -1, 2)$ حلا للنظام الخطي، فإن

$$\begin{cases} a - b - 6 = -3 \\ -2 + b + 2 = -1 \\ a - 3 - 2c = -1 \end{cases} \iff b = -1, a = 2, c = 0.$$

(٢). بما أن محدد النظام الخطي $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$، **فإن** $(1, -1, 2)$ **هو حلا وحيدا للنظام الخطي.**

السؤال الثالث

مصفوفة التحويل الخطي $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&2&3\\0&1&4&3\\1&0&6&6\end{pmatrix}$ متكافئةصفيا مع المصفوفة $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&4&3\\0&0&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ و بالتالي $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(0,2,4,6)\}$ تكون أساسا لصورة التحويل الخطي.

$\ker T=\{(3t,3t,-\frac{3}{2}t,t)\in\mathbb{R}^4,\ t\in\mathbb{R}\}$ و بالتالي $\{(6,6,-3,2)\}$ تكون أساسا لنواة التحويل الخطي.

السؤال الرابع

${}_SP_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$، ${}_BP_S=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

$[T]_B={}_BP_S[T]_{SS}P_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

السؤال الخامس

(١). $q_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$.

(٢). التعدد الجبري للقيمة المميزة 1 هي 2 و التعدد الجبري للقيمة المميزة -1 هي 1.

(٣). المصفوفة $A-I$ متكافئة صفيا مع المصفوفة $\begin{pmatrix}m&0&-m\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
إذا كانت $m=0$، $\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$ أساسا للفضاء المميز E_1 و بالتالي A قابلة للاستقطار.

(٤). أ) إذا كانت $m=0$، $\{(1,-1,-1)\}$ أساسا للفضاء المميز E_{-1}.
$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$، $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

ب) إذا كانت $m=0$،
$A^{1437}=PD^{1437}P^{-1}=PDP^{-1}=A$.

الإختبار النهائي، الفصل الصيفي 1436 − 1435 هـ 244 ريض

السؤال الأول

إستخدم طريقة جاوس جوردن لإيجاد حلول النظام التالي حسب قيمة m

$$\begin{cases} x+y-z & = & 1 \\ 3x+2y-2z & = & 3 \\ x+2my-(m+1)z & = & 2m-1 \end{cases}$$

السؤال الثاني

لتكن A مصفوفة مربعة تحقق المعادلة $(A-I)^2=0$.
أثبت أن A قابلة للعكس و أبحث عن A^{-1} بدلالة A.

السؤال الثالث

(١). أوجد أساسا لكل من الفضاء الصفي والفضاء العمودي للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(٢). أوجد أساسا للفضاء $\mathbb{R}^4$ يحتوي على $v_1=(1,2,-1,-2), v_2=(2,3,3,-1)$.

السؤال الرابع

أوجد أساسا لفضاء الحل للنظام المتجانس

$$\begin{cases} x - y + z & & = 0 \\ x - y & + 2t & = 0 \\ 2x - 2y + z & + 2t & = 0 \end{cases}$$

السؤال الخامس

لتكن $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ مجموعة متعامدة وعيارية في فضاء ضرب داخلي V. أوجد قيمة $\|u_1-u_4\|^2+\|u_1+u_2+u_3\|^2$.

السؤال السادس

(١). أثبت أن $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx'+xy'+yx'+4yy'$ تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^2$.

(٢). إستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس
$\{u_1=(1,0), u_2=(0,1)\}$ إلى أساس عياري و متعامد.

السؤال السابع

ليكن $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ **المؤثر الخطي المعرف بالمصفوفة**
$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ **بالنسبة للاساس المعتاد** C **للفضاء** $\mathbb{R}^3$.

(١). أوجد أساسا لكل من الفضائين $\mathrm{Ker}T$ **و** $\mathrm{Im}T$.

(٢). أوجد مصفوفة T **بالنسبة للأساس** B **التالي**
$B=\{v_1=(1,-1,0),v_2=(0,1,-1),v_3=(1,1,1)\}$.

(٣). إذا كان v **متجها في** $\mathbb{R}^3$ **بحيث** $[v]_C=(1,1,0)$ **فأوجد** $[T(v)]_B$.

السؤال الثامن

لتكن A **المصفوفة** $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&1\\2&8&1\end{pmatrix}$

(١). أوجد القيم المميزة للمصفوفة A **واستنتج أن** A **قابلة للاستقطار.**

(٢). عين مصفوفة P **لها معكوس بحيث** $P^{-1}AP$ **هي مصفوفة قطرية مع إعطاء المصفوفة القطرية.**

إصلاح الإختبار النهائي، الفصل الصيفي 1436 − 1435 هـ 244 ريض

السؤال الأول

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\3&2&-2&3\\1&2m&-(m+1)&2m-1\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)R_{1,3}]{(-3)R_{1,2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&2m-1&-m&2m-2\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{(-(2m-1))R_{2,3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&m-1&2(m-1)\end{array}\right].$$

إذا كانت $m\neq 1$ **يوجد حل وحيد للنظام وهو** $(1,2,2)$.
إذا كانت $m=1$ **مجموع الحلول للنظام هو** $\{(1,y,y);\ y\in\mathbb{R}\}$.

السؤال الثاني

$(A-I)^2=A^2-2A+I=0 \iff A(2I-A)=I$.
إذا A **قابلة للعكس و** $A^{-1}=2I-A$.

السؤال الثالث

(١). الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و بالتالي $\{(1,2,-1,-2),(2,3,3,-1),(0,1,3,1)\}$ **هو أساس للفضاء العمودي للمصفوفة و** $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,-1)\}$ **هو أساس للفضاء الصفي للمصفوفة.**

(٢). حسب نتيجة السؤال الأول فإن المتجهات
$v_1=(1,2,-1,-2), v_2=(2,3,3,-1), v_3=(0,1,3,1)$ **مستقلة خطيا و بما أن المحدد**
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **لا يساوي صفر فإن المتجهات**
$v_1=(1,2,-1,-2), v_2=(2,3,3,-1), v_3=(0,1,3,1), v_4=(0,0,0,1)$ **تكون أساسا للفضاء** $\mathbb{R}^4$ **و يحتوي على** $v_1=(1,2,-1,-2), v_2=(2,3,3,-1)$.

السؤال الرابع

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوف $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$ **هي**
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

مجموع الحلول للنظام الخطي المتجانس هو $\{(y-2t,y;2t,t)=y(1,1,0,0)+t(-2,0,2,1);\ y,t\in\mathbb{R}\}$
و $\{(1,1,0,0),(-2,0,2,1)\}$ **هو أساس لفضاء الحل للنظام المتجانس.**

السؤال الخامس

$5=\|u_1\|^2+\|u_4\|^2+\|u_1\|^2+\|u_2\|^2+\|u_3\|^2=\|u_1-u_4\|^2+\|u_1+u_2+u_3\|^2$.

السؤال السادس

(١).

$$\begin{aligned}\langle (a,b)+(c,d),(x,y)\rangle &= (a+c)x+(a+c)y+(b+d)x+4(b+d)y \\ &= \langle (a,b),(x,y)\rangle+\langle (c,d),(x,y)\rangle\end{aligned}$$

- $\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax+ay+bx+4by=\langle (x,y),(a,b)\rangle$
- $\langle \lambda(a,b),(x,y)\rangle=\lambda ax+\lambda ay+\lambda bx+4\lambda by=\lambda\langle (a,b),(x,y)\rangle$
- $\langle (a,b),(a,b)\rangle=a^2+2ab+4b^2=(a+b)^2+3b^2\geq 0$
- $\langle (a,b),(a,b)\rangle=0 \iff a+b=0=b \iff a=b=0$

(٢). $\|u_1\|=1$،
$\langle u_1,u_2\rangle=1$،
$u_2-u_1=(-1,1)$.
و بالتالي $\{v_1=(1,0), v_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1)\}$ **تمثل أساسا عياريا متعامدا.**

السؤال السابع

(١). $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة $[T]_C$ **هي** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x = z - y \iff T(x, y, z) = 0$ **و بالتالي** $\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$ **تمثل أساسا للفضاء** $\mathrm{Ker}T$.
كذلك نستنتج من الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة أن $\{(1, -3, -2)\}$ **هو أساس للفضاء** $\mathrm{Im}T$.

(٢). ${}_CP_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **و** ${}_BP_C = {}_CP_B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(٣). $[v]_C = (1, 1, 0)$، $[v]_B = {}_BP_C[v]_C = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$.
$[T(v)]_B = {}_BP_C[T]_C[v]_C = \frac{1}{3}(14, 4, -8)$.

السؤال الثامن

(١). $q_A(\lambda) = (2 - \lambda)(1 + \lambda)(\lambda - 5)$.
القيم المميزة للمصفوفة A **هي** 2، -1 **و** 5.
و بما أن القيم المميزة مختلفة فإن المصفوفة قابلة للإستقطار.

(٢). المتجه $(0, -1, 4)$ **هو متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة** $\lambda = -1$.
المتجه $(3, -1, 2)$ **هو متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة** $\lambda = 2$.
المتجه $(0, 1, 2)$ **هو متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة** $\lambda = 5$.
يمكن أن نأخذ المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **و المصفوفة** $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

الإختبار النهائي، الفصل الأول 1437 − 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). لتكن كل من $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ مصفوفة مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$|A| = 2, \qquad |B| = -3, \qquad |C| = 5$$

احسب المحدد التالي $|2A^{-5}B^{-3}C^{-1}(B^T)^5|$

(٢). لتكن مصفوفتين مربعتين من الدرجة n غير صفريتين E و P حيث $\mathbf{E^2} = \mathbf{0}$ و $PE = EP$.
احسب $(\mathbf{I} - \mathbf{PE})(\mathbf{I} + \mathbf{PE})$
ماذا تستنتج؟

(٣). اعط مصفوفة غير صفرية E من الدرجة 2 حيث $E^2 = 0$.

السؤال الثاني

ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ -x + 3y + az = 2 \\ 2x + y + z = b \end{cases}$$

عين قيم كل من a, b التي من أجلها يكون للنظام

(١). ليس له حل

(٢). حل وحيد

السؤال الثالث

(١). أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). لتكن $B = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} A^{-1}$ حيث A هي المصفوفة في الفقرة (١)
أوجد مصفوفة C حيث $C^3 = B$.

السؤال الرابع

عين أساسا لصورة و أساسا لنواة التحويل الخطي $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة

$$\mathbf{T(x, y, z, t) = (x - y + z, 2x - z - t, y + z + 2t)}.$$

السؤال الخامس

ليكن $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد S للفضاء $\mathbb{R}^3$ هي

$$[\mathbf{T}]_\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[\mathrm{T}]_\mathrm{B}$ بالنسبة للأساس B التالي

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{u_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}),\ \mathbf{u_2} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}),\ \mathbf{u_3} = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4})\}.$$

السؤال السادس

(١). أثبت أن $(1-)$ و 2 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -15 & 9 \\ 9 & -16 & 9 \\ 9 & -15 & 8 \end{pmatrix}.$$

(٢). أوجد أساسا للفضاءات المميزة $\{\mathbf{X}- = \mathbf{E_{-1}} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX}$ و $\mathbf{E_2} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX} = \mathbf{2X}\}$

(٣). أ) أوجد مصفوفة P لها معكوس ومصفوفة D قطرية حيث $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

ب) أوجد المصفوفة $\mathbf{A^9}$.

السؤال السابع

إذا كان الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^2$ معرفا بالقاعدة

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = 2xx' + yy'$$

استخدم قاعدة جرام شميت لتحويل الأساس

$$\{u_1 = (1, -1),\ u_2 = (2, 1)\}$$

إلى أساس عياري و متعامد.

إصلاح الإختبار النهائي ، الفصل الأول 1437 – 1438 هـ ، 244 ريض

السؤال الأول

(١). $|2A^{-5}B^{-3}C^{-1}(B^T)^5| = 2^4|B|^2|A|^{-5}|C|^{-1} = \frac{9}{10}$

(٢). $(\mathbf{I} - \mathbf{PE})(\mathbf{I} + \mathbf{PE}) = \mathbf{I} + \mathbf{PE} - \mathbf{PE} - \mathbf{P^2E^2} = \mathbf{I}$

و بالتالي المصفوفة $(I - PE)$ هي معكوس المصفوفة $(I + PE)$.

(٣). $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

السؤال الثاني المصفوفة الموسعة للنظام الخطي $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & a & 2 \\ 2 & 1 & 1 & b \end{array}\right]$ متكافئة صفيا مع المصفوفة التالية

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & -5(a+4) & b-3 \end{array}\right].$$

(١). إذا كانت $a = -4$ و $b \neq 3$ فالنظام ليس له حل.

(٢). إذا كانت $a \neq -4$ فالنظام له حل وحيد.

ملاحظة: يمكن أن نجيب على الأسئلة بطريقة أخرى باستعمال محدد مصفوفة النظام.
محدد مصفوفة النظام $-5(a+4)$.
فإذا كانت $a \neq -4$ فالنظام له حل وحيد. و إذا كانت $a = -4$ فالمصفوفة الموسعة للنظام متكافئة مع المصفوفة $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array}\right]$.
إذاً، إذا كانت $a = -4$ و $b \neq 3$ فالنظام ليس له حل.

السؤال الثالث

(١). معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ هي $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). $C = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

السؤال الرابع

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لمصفوفة التحويل الخطي $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ هي $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و بالتالي مجموع حلول النظام الخطي المتجانس $AX = 0$ هو $\{(0, -t, -t, t)\ t \in \mathbb{R}\}$.
إذاً $(0, 1, 1, -1)$ هو أساس لنواة التحويل الخطي و $\{(1, 2, 0), (-1, 0, 1), (1, -1, 1)\}$ هو أساس لصورة التحويل الخطي.

السؤال الخامس

$${}_SP_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } {}_BP_S = {}_SP_B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{B}} = {}_{\mathbf{B}}\mathbf{P}_{\mathbf{S}}[\mathbf{T}]_{\mathbf{S}\mathbf{S}}\mathbf{P}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

السؤال السادس

(١).

$$\begin{aligned} q_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -15 & 9 \\ 9 & -16-\lambda & 9 \\ 9 & -15 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -15 & 9 \\ 2-\lambda & -16-\lambda & 9 \\ 2-\lambda & -15 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -15 & 9 \\ 1 & -16-\lambda & 9 \\ 1 & -15 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -15 & 9 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 05 & -1-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

و بالتالي $q_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (2-\lambda)(1+\lambda)^2$ **و** (-1) **و** 2 **هي القيم المميزة للمصفوفة** A

(٢). $\mathbf{E_{-1}} = \{\mathbf{X} = (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^\mathbf{3};\ \mathbf{3x - 5y + 3z = 0}\}$.
إذاً $\{(1,0,-1),(5,3,0)\}$ **يمثل أساسا للفضاء المميز** $\mathbf{E_{-1}}$.
$\mathbf{E_2} = \{\mathbf{X} = (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^\mathbf{3};\ \mathbf{3x - 2z = 0},\ \mathbf{11y + 2z = 0}\}$.
إذاً $\{(1,1,1)\}$ **يمثل أساسا للفضاء المميز** $\mathbf{E_2}$.

(٣). أ) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{P^{-1}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ب) $\mathbf{A^9} = \mathbf{PD^9P^{-1}} = \begin{pmatrix} 3.2^9+2 & -5.2^9-5 & 3.2^9+3 \\ 3.2^9+3 & -5.2^9-6 & 3.2^9+3 \\ 3.2^9+3 & -5.2^9-5 & 3.2^9+2 \end{pmatrix}$.

السؤال السابع

$\|u_1\| = \sqrt{3}$، $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
$\langle u_2, v_1\rangle = \sqrt{3}$.
و بالتالي $\frac{1}{3}(1,2) = v_2$. **و الأساس** $\{v_1 = (1,-1),\ v_2 = (2,1)\}$ **عياري و متعامد.**

الإختبار النهائي الفصل الثاني 1437 – 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة 3 بحيث

$|AB^T| = -14$ و $\frac{1}{2}A^4 + A = 0$،

فاحسب $|A|$ و $|B|$.

السؤال الثاني

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 10 & 11 & 1 \end{pmatrix}$

(١). أوجد A^{-1}.

(٢). أوجد حل النظام الخطي $AX = B$، بحيث $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

السؤال الثالث

ليكن $m \in \mathbb{R}$ و ليكن النظام الخطي التالي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & m-2 & m+3 & m^2+5 \\ 3 & 5 & -5 & m+3 & m^2+2 \end{array}\right]$$

(١). أوجد قيم m حتى يكون النظام غير متسق.

(٢). أوجد قيم m حتى يكون النظام له حل وحيد.

(٣). أوجد قيم m حتى يكون النظام له عدد لا نهائي من الحلول.

السؤال الرابع

لتكن $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(١). أوجد رتبة و صفرية المصفوفة A.

(٢). أوجد أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

السؤال الخامس

ليكن الفضاء $V = \mathbb{R}^3$ و الأساسين

$B = \{v_1 = (1,1,-1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,1)\}$

و

$C = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (4,2,-1), u_3 = (1,2,0)\}$.

(١). أوجد $[u_1]_B$، $[u_2]_B$، $[u_3]_B$. ($[u_1]_B$ هي إحداثيات المتجه u_1 بالنسبة للأساس B)

(٢). إحسب ${}_BP_C$ مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B.

(٣). إذا كان $[v]_C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ فأوجد كلا من $[v]_B$ و v.

السؤال السادس

ليكن $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ التحويل الخطي الذي يحقق:

$$T(1,0,0) = 1 + X^2, \qquad T(0,1,0) = 2 + 3X^2, \qquad T(0,0,1) = -X^2.$$

(١). أوجد $T(a,b,c)$، لكل $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(٢). أوجد أساسا لكل من الفضائين $\ker T$ و $\mathrm{Im}T$.

السؤال السابع

ليكن الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^2$ معرفا بالقاعدة

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = 2x_1x_2 + 5y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

(١). استخدم قاعدة جرام شميت لتحويل الأساس

$$\{u_1 = (1,-1),\ u_2 = (-2,1)\}$$

إلى أساس $\{v_1, v_2\}$. عياري و متعامد.

(٢). ليكن $v = av_1 + bv_2$ و $w = cv_1 + dv_2$.
أوجد $\langle v, w\rangle$ بدلالة a,b,c,d.

إصلاح الإختبار النهائيالفصل الثاني $1437 - 1438$ هـ (244 ريض)

السؤال الأول

$|A| \neq 0$، $A^3 = -2I$، $|A| = -2$. $|B| = 7$.

السؤال الثاني

(١). $A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -1 \\ -20 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(٢). $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}$

السؤال الثالث

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 & m^2-1 \end{array}\right]$$

(١). **يكون النظام غير متسق إذا كانت** $m = 0$.

(٢). **يكون النظام له حل وحيد إذا كانت** $m \neq 0$ **و** $m \neq -1$.

(٣). **يكون النظام له عدد لا نهائي من الحلول إذا كانت** $m = -1$.

السؤال الرابع

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(١). **رتبة المصفوفة** A **هي** 3
صفرية المصفوفة A **هي** 2

(٢). $\{(1,-2,0,1),(0,1,2,-3),(1,2,-1,1)\}$ **هو أساس للفضاء العمودي للمصفوفة** A.

السؤال الخامس

(١). **أوجد** $[u_1]_B = (0,0,1)$، $[u_2]_B = (3,-1,2)$، $[u_3]_B = (-1,3,-1)$.

(٢). $${}_BP_C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(٣). $[v]_B = (-7,5,0)$
$v = -7v_1 + 5v_2 = (-2,-2,7)$.

السؤال السادس

(١). $T(a,b,c) = (a+2b) + (a+3b-c)X^2$.

(٢). $T(a,b,c) = 0 \iff a = -2b, b = c$.
$\ker T = \{(-2,1,1)t;\ t \in \mathbb{R}\}$.
$\dim \mathrm{Im}T = 2$، **إذا أي متجهين من** $-X^2, \quad 2+3X^2, \quad 1+X^2$ **يمثل أساسا للفضاء** $\mathrm{Im}T$.

السؤال السابع

(۱). $\|u_1\|^2 = 3$ ، $v_1 = \dfrac{u_1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1)$.
$\langle u_2, u_1\rangle = -\sqrt{3}$ ،
$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0)$.

(۲). $\langle v, w\rangle = ac + bd.$

الإختبار النهائي، الفصل الصيفي 1437 – 1438 هـ 244 ريض

السؤال الأول

لتكن $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

أوجد مصفوفة A مربعة من الدرجة 2 تحقق $(B^{-1}A)^{-1} = C$

السؤال الثاني

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

(١). أوجد $\text{adj}(A)$ و $A.\text{adj}(A)$.

(٢). أوجد حل النظام الخطي $AX = B$، بحيث $B = (1, 2, 2)^T$ و $X = (x, y, z)^T$

السؤال الثالث

إستخدم طريقة جاوس لإيجاد حلول النظام التالي حسب قيمة m

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & -1 \\ -2x + (m-4)y - 3z & = & m+1 \\ -x + (m-2)y + (m-3)z & = & 2m \end{cases}$$

السؤال الرابع

لتكن المصفوفة $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(١). أوجد رتبة و صفرية المصفوفة A.

(٢). أوجد أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة A.

السؤال الخامس

ليكن $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ التحويل الخطي المعرف بالمصفوفة

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

(١). أوجد $T(x, y, z, t)$

(٢). أوجد أساسا لنواة التحويل الخطي T

(٣). أوجد أساسا لصورة التحويل الخطي T

السؤال السادس
استخدم قاعدة جرام شميت لتحويل الأساس

$$\{u_1 = (1,-1),\ u_2 = (1,1)\}$$

إلى أساس عياري و متعامد للفضاء $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للضرب الداخلي التالي
$\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + xy' + yx' + 2yy'$.

السؤال السابع

لتكن بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(١). أثبت أن 2 هي قيمة مميزة للمصفوفة A.

(٢). أوجد كل القيم المميزة للمصفوفة A.

(٣). أوجد مصفوفة قطرية D و مصفوفة لها معكوس P بحيث $D = P^{-1}AP$.

إصلاح الإختبار النهائي، الفصل الصيفي $1437 - 1438$ هـ 244 ريض

السؤال الأول
$(B^{-1}A)^{-1} = C \iff A^{-1}B = C \iff A = BC^{-1}$.
$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ و $A = BC^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -26 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

السؤال الثاني

(١). $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -18 & 10 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ و $A\mathrm{adj}(A) = -I$

(٢). $AX = B \iff X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

السؤال الثالث
المصفوفة الموسعة للنظام متكافئة صفيا مع المصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & m & -1 & m-1 \\ 0 & 0 & m-1 & 2m-1 \end{array}\right].$$

النظام غير متسق إذا كانت $m = 0$ و $m = 1$ و له حل وحيد إذا كانت $m \neq 0$ أو $m \neq 1$ و الحل هو $\left(-\dfrac{m^2+4m-2}{m(m-1)}, \dfrac{m^2-m+1}{m(m-1)}, \dfrac{m}{m-1}\right)$.

السؤال الرابع

(١). الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

إذاً رتبة المصفوفة A هي 3 و و صفريتها 2 .

(٢). حلول النظام المتجانس $AX = 0$ هي $S = \{x(-1,1,1,0,0) + y(2,-1,0,1,0);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ و بالتالي $\{u_1 = (-1,1,1,0,0), u_2 = (2,-1,0,1,0)\}$ يمثل أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة A.

السؤال الخامس

(١). $T(x,y,z,t) = (x - y + 2z - t, -x + y - 2z + t, y + z + 4t, x + 3z + 3t)$.

(٢). $AX = 0 \iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}T$.

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

و بالتالي $\{u_1 = (-3,0,1,0), u_2 = (-3,-4,0,1)\}$ يمثل أساسا لنواة التحويل الخطي T.

(٣). حسب الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة فإن $\{v_1 = (1,-1,0,1), v_2 = (-1,1,1,0)\}$ يمثل أساسا لصورة التحويل الخطي T.

السؤال السادس

$\|u_1\| = 1$ و بالتالي $v_1 = u_1$.

$\langle u_2, v_1 \rangle = -1$.

إذاً $v_2 = (1,0)$.

السؤال السابع

(١). $q_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$.

(٢). القيم المميزة للمصفوفة A هي 1 و 2.

(٣). $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$، $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

الإختبار النهائي، الفصل الأول 1438 – 1439 هـ 244 ريض

السؤال الأول

(١). إذا كانت A و B مصفوفتين بحيث $|AB^T| = -2$ و $(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
أوجد قيمة المحدد $|B|$

(٢). أوجد قيم كل من a و b التي تجعل المتجهات $v_1 = (1, 2, -1, 3)$، $v_2 = (-2, -3, 1, -1)$، $v_3 = (-1, a-2, a-1, b)$ مرتبطة خطيا في $\mathbb{R}^4$.

السؤال الثاني

ليكن النظام الخطي
$$\begin{cases} x - y - 2z & = & 2 \\ x + my - z & = & 1 \\ mx + y + z & = & -1 \end{cases}$$

(١). أوجد قيم m حتى يكون للنظام الخطي حل وحيد.

(٢). أوجد قيم m حتى لا يكون للنظام الخطي حل.

(٣). أوجد قيم m حتى يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

السؤال الثالث

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(١). أوجد أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

(٢). أوجد أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

(٣). أوجد رتبة (Rank) و صفرية (nullity) لكل من A و A^T.

السؤال الرابع

ليكن $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,2)\}$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^2$ و C الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^2$. و ليكن التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف بما يلي:

$$T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$$

(١). أوجد المصفوفات $_CP_B$ و $_BP_C$.

(٢). أوجد $[T]_C$ مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس C
و أوجد $[T]_B$ مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس B.

(٣). إذا كان $v = (2, 1)$ أوجد $[T(v)]_B$.

السؤال الخامس

ليكن التحويل الخطي $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **حيث** $T(1,1,0)=(2,1,3,-1)$، $T(1,0,1)=(-1,0,-1,1)$، $T(1,0,0)=(1,1,2,0)$.

(١). **أوجد قاعدة التحويل الخطي** T

(٢). **أوجد أساسا لنواة التحويل الخطي** T

(٣). **أوجد أساسا لصورة التحويل الخطي** T

السؤال السادس

(١). **أثبت أن المجموعة** S **تمثل أساسا عياريا للفضاء الإقليدي** $\mathbb{R}^3$ **حيث أن** $S=\{v_1=(0,1,0), v_2=(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}), v_3=(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5})\}$

(٢). **إذا كان** $u=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$، **إحسب** $[u]_S$.

السؤال السابع

لتكن $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(١). **أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة** A **و أثبت أن** $\lambda_1=1$ **و** $\lambda_2=-1$ **هي قيم مميزة للمصفوفة** A

(٢). **أوجد المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة** λ_1 **و** λ_2

(٣). **أوجد مصفوفة** P **و مصفوفة قطرية** D **بحيث** $A=PDP^{-1}$

(٤). **أوجد** A^{13} **و** A^{14}

إصلاح الإختبار النهائي، الفصل الأول $1438-1439$ **هـ** 244 **ريض**

السؤال الأول **(**$3+3$ **درجات)**

(١). $(3A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \iff \frac{1}{3}A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{9|A|}=5 \Rightarrow |A|=\frac{1}{45}$ **و** $|B|=-90$.

(٢). **لتكن المصفوفة** $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & a-2 \\ -1 & 1 & a-1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$ **و التي أعمدتها هي إحداثيات المتجهات** v_1, v_2, v_3.

تكون المتجهات v_1, v_2, v_3 **مرتبطة خطيا في** $\mathbb{R}^4$ **إذا و إذا فقط إذا كانت رتبة المصفوفة أقل أو يساوي** 2.

المصفوفة A **متكافئة صفيا مع المصفوفة** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2a-2 \\ 0 & 0 & b+3-5a \end{pmatrix}$.

و بالتالي تكون المتجهات v_1, v_2, v_3 **مرتبطة خطيا في** $\mathbb{R}^4$ **إذا كانت** $a = 1$ **و** $b = 2$

السؤال الثاني (5 درجات)

المصفوفة الموسعة للنظام الخطي متكافئة صفيا مع المصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & m+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2m & -2m \end{array}\right].$$

(١). يكون للنظام الخطي حل وحيد إذا كانت $m \neq 0$ **و** $m \neq -1$.

(٢). النظام متسق لكل قيمة للعدد m.

(٣). إذا كانت $m = 0$ **حلول النظام الخطي هي:** $\{(z+1, -1-z, z);\ z \in \mathbb{R}\}$. **و بالتالي النظام له عدد لا نهائي من الحلول.**
إذا كانت $m = -1$ **حلول النظام الخطي هي:** $\{(x, x, -1);\ x \in \mathbb{R}\}$. **و بالتالي النظام له عدد لا نهائي من الحلول.**

السؤال الثالث (5 درجات)

(١). الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A **هي** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(٢). المجموعة $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ **تمثل أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة** A.
المجموعة $\{(1,0,3,1), (2,-1,5,4), (1,-1,2,1)\}$ **تمثل أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة** A.

(٣). رتبة المصفوفة A^T **هي** 3 **و صفرية المصفوفة** A^T **هي** 1.

السؤال الرابع (7 درجات)

(١). ${}_C P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$، ${}_B P_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
$[T]_B = {}_B P_C [T]_C {}_C P_B = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

(٣). إذا كان $v=(2,1)$، فإن $[v]_C=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$، $[v]_B={}_BP_C[v]_C=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
$[T(v)]_B=[T]_B[v]_B=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$.

السؤال الخامس (7 درجات)

(١). إذا كان $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ فإن حل النظام الخطي $v=a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(1,0,0)$ هي $a=y, b=z, c=x-y-z$.
و بالتالي

$$T(x,y,z)=aT(1,1,0)+bT(1,0,1)+cT(1,0,0)=(2y-z,x+2z,2x+y).$$

(٢). مصفوفة التحويل الخطي بالنسبة للأساس المعتاد في $\mathbb{R}^3$ و الأساس المعتاد في $\mathbb{R}^4$ هي: $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\3&5&2\\1&4&3\end{pmatrix}$ و الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و بالتالي

(أ) $\{(1,0,3,1),(2,-1,5,4)\}$ تمثل أساسا لصورة التحويل الخطي T

(ب) $\{(1,-1,1)\}$ يمثل أساسا لنواة التحويل الخطي T

السؤال السادس (4 درجات)

(١). $\|v_1\|=\|v_2\|=\|v_3\|=1$
و $\langle v_1,v_2\rangle=\langle v_1,v_3\rangle=\langle v_2,v_3\rangle=0$ و بالتالي المجموعة S تمثل أساسا عياريا للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$.

(٢). $\langle u,v_1\rangle=1$، $\langle u,v_1\rangle=-\frac{1}{5}$، $\langle u,v_1\rangle=\frac{7}{5}$ و بالتالي $[u]_S=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{5}\\\frac{7}{5}\end{pmatrix}$.

السؤال السابع (6 درجات)

(١). كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي $q_A(\lambda)=-(1-\lambda)^2(1+\lambda)$ و بالتالي $\lambda_1=1$ و $\lambda_2=-1$ هي قيم مميزة للمصفوفة A

(٢). الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة $A-I$ هي $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و بالتالي
$\{(1,1,0),(0,1,-1)\}$ يمثل أساسا للفضاء المميز E_1.

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة $A+I$ هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و بالتالي $\{(1,1,1)\}$ يمثل أساسا للفضاء المميز E_{-1}.

(٣). $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(٤). $A^{13} = A$ و $A^{14} = I$