202 ريض - حساب المتجهات
الفصل الدراسي الأول 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن مُحمَّد الفاضل

(1) قوة ثابتة مقدارها 12 نيوتن ولها نفس اتجاه المتجه $\vec{a} = \langle 2,1,2 \rangle$ ، أحسب الشغل المبذول الناتج عن هذه القوة إذا كانت نقطة تطبيقها تتحرك من $(0,2,0)$ إلى $(0,7,0)$ (علماً بأن المسافة تقاس بالمتر).

الحل : ليكن $\vec{v}$ متجه القوة ، عندئذ $\vec{v} = c\,\vec{a}$ حيث $c > 0$.

$$\|\vec{v}\| = \|c\,\vec{a}\| = c\,\|\vec{a}\| \implies 12 = c\sqrt{(2)^2+(1)^2+(2)^2} \implies 12 = 3c \implies c = 4$$

أي أن متجه القوة هو $\vec{v} = 4\vec{a} = \langle 8,4,8 \rangle$

لتكن نقطة البداية هي $P(0,2,0)$ ونقطة النهاية هي $Q(0,7,0)$ ، عندئذ الشغل المبذول هو

$$\mathrm{W} = \vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ} = \langle 8,4,8 \rangle \cdot \langle 0,5,0 \rangle = 0+20+0 = 20\ \mathbf{N.m}$$

(2) إذا كانت $A(1,-1,1)$ و $B(2,2,3)$ أحسب مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه هما OA و OB .

الحل : مساحة متوازي الأضلاع هي $\mathrm{A} = \|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3-2)\,\vec{i} - (3-2)\,\vec{j} + (2+2)\,\vec{k} = -5\,\vec{i} - \vec{j} + 4\,\vec{k}$$

$$\mathrm{A} = \|\langle -5,-1,4 \rangle\| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2+(4)^2} = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42}$$

(3) أوجد معادلة الكرة التي مركزها $(-1,1,2)$ ، والنقطة $(3,4,2)$ تقع على سطحها .

الحل : نصف قطر الكرة هو المسافة بين النقطتين $(-1,1,2)$ و $(3,4,2)$.

$$r = \sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2+(2-2)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

أي أن معادلة الكرة هي $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 5^2$

(4) أثبت أن $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$

الحل :

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= \|\vec{a}\|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$$

(5) إذا كان $\overrightarrow{a}$ متجهاً غير صفري وكان $\overrightarrow{u}$ متجه الوحدة في عكس اتجاه $\overrightarrow{a}$ فأحسب $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}$

الحل : متجه الوحدة في عكس اتجاه $\overrightarrow{a}$ هو $\overrightarrow{u}=-\dfrac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$

الحل الأول : $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}\cdot\left(-\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}\right)=-\frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}\right)=-\frac{\|\overrightarrow{a}\|^2}{\|\overrightarrow{a}\|}=-\|\overrightarrow{a}\|$

الحل الثاني : بما أن متجه الوحدة $\overrightarrow{u}$ في عكس اتجاه $\overrightarrow{a}$ فإن الزاوية بينهما تساوي π .

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{a}\|\,\|\overrightarrow{u}\|\,\cos(\pi)=\|\overrightarrow{a}\|\,(1)\,(-1)=-\|\overrightarrow{a}\|$$

(6) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطة $(2,1,2)$ ويتعامد على المستوي المعطى بالمعادلة $x+y+z=5$.

الحل : لاحظ أن المتجه الناظمي للمستوي هو $\overrightarrow{a}=\langle 1,1,1\rangle$.

بما أن الخط المستقيم يتعامد على المستوي إذاً فهو يوازي متجهه الناظمي .

المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطة $(2,1,2)$ ويوازي المتجه $\langle 1,1,1\rangle$ هي :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2=t\\ y-1=t\\ z-2=t\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x=t+2\\ y=t+1\\ z=t+2\end{array}\right.$$

(7) أرسم المستوي المعطى بالمعادلة $2x+3y=6$.

الحل : لاحظ أن المستوي المطلوب يتعامد على المستوي xy .

نقطة تقاطع المستوي المعطى بالمعادلة $2x+3y=6$ مع محور x :

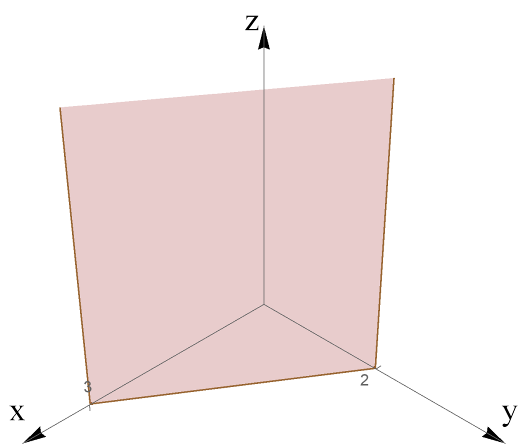
بوضع $y=0$ نحصل على $2x=6 \implies x=3$

أي أن المستوي المطلوب يتقاطع مع محور x في النقطة $(3,0,0)$.

نقطة تقاطع المستوي المعطى بالمعادلة $2x+3y=6$ مع محور y :

بوضع $x=0$ نحصل على $3y=6 \implies y=2$

أي أن المستوي المطلوب يتقاطع مع محور y في النقطة $(0,2,0)$.



(8) أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $(-2, 0, 3)$ ويوازي المستوي المعطى بالمعادلة $4x - 3y + z = 8$.

الحل : لاحظ أن المتجه الناظمي للمستوي الذي معادلته $4x - 3y + z = 8$ هو $\overrightarrow{a} = \langle 4, -3, 1 \rangle$.

بما أن المستوي المطلوب يوازي المستوي الذي معادلته $4x - 3y + z = 8$ فإن متجهه الناظمي هو

$$\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a} = \langle 4\lambda, -3\lambda, \lambda \rangle$$

أي أن المستوي المطلوب يمر بالنقطة $(-2, 0, 3)$ ومتجهه الناظمي هو $\overrightarrow{b} = \langle 4\lambda, -3\lambda, \lambda \rangle$ وبالتالي معادلته هي

$$4\lambda(x - (-2)) + (-3\lambda)(y - 0) + \lambda(z - 3) = 0$$

$$4(x + 2) - 3y + z - 3 = 0 \iff 4x + 8 - 3y + z - 3 = 0 \implies 4x - 3y + z + 5 = 0$$

(9) إذا كان Π_1 هو المستوي المعطى بالمعادلة $2x+6y-4z = 5$ و Π_2 هو المستوي المعطى بالمعادلة $3x+9y-6z = 8$ ، فبين أن Π_1 و Π_2 متوازيان وأحسب المسافة بينهما .

الحل :

المتجه الناظمي للمستوي الذي معادلته $2x + 6y - 4z = 5$ هو $\overrightarrow{a} = \langle 2, 6, -4 \rangle$.

المتجه الناظمي للمستوي الذي معادلته $3x + 9y - 6z = 8$ هو $\overrightarrow{b} = \langle 3, 9, -6 \rangle$.

لاحظ أن $\overrightarrow{b} = \frac{3}{2}\overrightarrow{a}$ ، أي أن المتجهين $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ متوازيان وبالتالي المستويان Π_1 و Π_2 متوازيان .

لحساب المسافة بين Π_1 و Π_2 يكفي أن نعرف المسافة بين المستوي Π_1 ونقطة تقع على المستوي Π_2 .

بوضع $y = z = 0$ في معادلة المستوي Π_2 نحصل على $x = \dfrac{8}{3}$ وبالتالي النقطة $\left(\dfrac{8}{3}, 0, 0\right)$ تقع في المستوي Π_2 .

من معادلة المستوي Π_1 نحصل على $a = 2\ ,\ b = 6\ ,\ c = -4\ ,\ d = -5$.

أي أن المسافة بين المستويين هي $d = \left|\dfrac{2\left(\frac{8}{3}\right) + 6(0) + (-4)(0) + (-5)}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (-4)^2}}\right|$

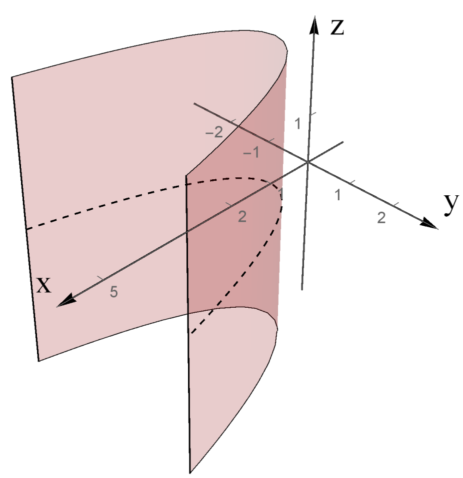
$$d = \left|\frac{\frac{16}{3} - 5}{\sqrt{4 + 36 + 16}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{56}}\right| = \left|\frac{1}{3\sqrt{56}}\right|$$

(10) أرسم الأسطوانة $x - y^2 - 1 = 0$ في الفضاء الثلاثي ، وحدد نوع قاعدتها .

الحل :

$$x - y^2 - 1 = 0 \implies x = y^2 + 1$$

قاعدة الأسطوانة تمثل قطع مكافئ رأسه النقطة $(1, 0, 0)$ وفتحته في اتجاه الجهة الموجبة لمحور x .



202 ريض - حساب المتجهات
الفصل الدراسي الأول 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

أجب عن الأسئلة السبعة التالية :

(1) احسب طول المنحنى المعطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = \frac{t^3}{3}\overrightarrow{i} - t^2\overrightarrow{j} - 2t\overrightarrow{k}$ من $t = 0$ إلى $t = 2$.

الحل : الصيغة الوسيطية للمنحنى هي $C \,:\, x = \frac{t^3}{3}\,,\, y = -t^2\,,\, z = -2t \;;\; t \in [0, 2]$

$$\frac{dx}{dt} = t^2 \;,\; \frac{dy}{dt} = -2t \;,\; \frac{dz}{dt} = -2$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{(t^2)^2 + (-2t)^2 + (-2)^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4}\, dt = \int_0^2 \sqrt{(t^2+2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^2 \left|t^2 + 2\right|\, dt = \int_0^2 \left(t^2 + 2\right)\, dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} + 4\right) - (0 + 0) = \frac{20}{3}$$

(2) أوجد المتجه المماس للمنحنى $C \,:\, x = 1 - t\,,\, y = \sin t\,,\, z = e^t \;;\; t \geq 0$ عندما $t = 0$.

الحل : C هو المنحنى الناتج عن الدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = (1-t)\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j} + e^t\,\overrightarrow{k}$ حيث $t \geq 0$.

$$\overrightarrow{r'}(t) = (0-1)\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j} + e^t\,\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j} + e^t\,\overrightarrow{k}$$

المتجه المماس للمنحنى C عندما $t = 0$ هو

$$\overrightarrow{r'}(0) = -\overrightarrow{i} + \cos(0)\overrightarrow{k} + e^0\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = \langle -1, 1, 1\rangle$$

(3) إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = e^{2t}\overrightarrow{i} + \frac{1}{3t+1}\overrightarrow{j} + \frac{1}{1+t^2}\overrightarrow{k}$ ، احسب $\int_0^1 \overrightarrow{r}(t)\, dt$

الحل :

$$\int_0^1 \overrightarrow{r}(t)\, dt = \left(\int_0^1 e^{2t}\, dt\right)\overrightarrow{i} + \left(\int_0^1 \frac{1}{3t+1}\, dt\right)\overrightarrow{j} + \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\right)\overrightarrow{k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}(2)\, dt\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{3}\int_0^3 \frac{3}{3t+1}\, dt\right)\overrightarrow{j} + \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\right)\overrightarrow{k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left[e^{2t}\right]_0^1\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{3}\left[\ln|3t+1|\right]_0^1\right)\overrightarrow{j} + \left(\left[\tan^{-1} t\right]_0^1\right)\overrightarrow{k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left[e^2 - e^0\right]\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{3}\left[\ln|3+1| - \ln|1|\right]\right)\overrightarrow{j} + \left(\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)\right]\right)\overrightarrow{k}$$

$$= \frac{e^2-1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{2\ln(2)}{3}\overrightarrow{j} + \frac{\pi}{4}\overrightarrow{k}$$

(4) إذا كانت $\overrightarrow{r}$ دالة متجهية قابلة للإشتقاق و g دالة حقيقية قابلة للاشتقاق ، فأثبت أن

$$D_t\left[g(t)\ \overrightarrow{r}(t)\right] = g'(t)\ \overrightarrow{r}(t) + g(t)\ \overrightarrow{r'}(t)$$

الحل : لتكن $\overrightarrow{r}(t) = f_1(t)\overrightarrow{i} + f_2(t)\overrightarrow{j} + f_3(t)\overrightarrow{k}$

$$D_t\left[g(t)\ \overrightarrow{r}(t)\right] = D_t\left[(g(t)f_1(t))\ \overrightarrow{i} + (g(t)f_2(t))\ \overrightarrow{j} + (g(t)f_3(t))\ \overrightarrow{k}\right]$$

$$= (g(t)f_1(t))'\ \overrightarrow{i} + (g(t)f_2(t))'\ \overrightarrow{j} + (g(t)f_3(t))'\ \overrightarrow{k}$$

$$= (g'(t)f_1(t) + g(t)f_1'(t))\ \overrightarrow{i} + (g'(t)f_2(t) + g(t)f_2'(t))\ \overrightarrow{j} + (g'(t)f_3(t) + g(t)f_3'(t))\ \overrightarrow{k}$$

$$= g'(t)f_1(t)\ \overrightarrow{i} + g'(t)f_2(t)\overrightarrow{j} + g'(t)f_3(t)\overrightarrow{k} + g(t)f_1'(t)\overrightarrow{i} + g(t)f_2'(t)\overrightarrow{j} + g(t)f_3'(t)\overrightarrow{k}$$

$$= g'(t)\left(f_1(t)\overrightarrow{i} + f_2(t)\overrightarrow{j} + f_3(t)\overrightarrow{k}\right) + g(t)\left(f_1'(t)\overrightarrow{i} + f_2'(t)\overrightarrow{j} + f_3'(t)\overrightarrow{k}\right)$$

$$= g'(t)\overrightarrow{r}(t) + g(t)\overrightarrow{r'}(t)$$

(5) إذا كان متجه الموضع لجسيم ما معطى بالدالة المتجهية

$\overrightarrow{r}(t) = 3\cos t\ \overrightarrow{i} - 3\sin t\ \overrightarrow{j} + 4t\ \overrightarrow{k}$ حيث $0 \le t \le 2\pi$

(i) احسب السرعة المتجهية والتسارع عند الزمن t .

الحل : السرعة المتجهية عند الزمن t هي $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r'}(t) = -3\sin t\ \overrightarrow{i} - 3\cos t\ \overrightarrow{j} + 4\ \overrightarrow{k}$

التسارع عند الزمن t هو $\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{r''}(t) = -3\cos t\ \overrightarrow{i} + 3\sin t\ \overrightarrow{j} + (0)\ \overrightarrow{k}$

(ii) بين أن السرعة ثابتة لكل $0 \le t \le 2\pi$.

الحل : لأي $t \in [0.2\pi]$

$$v(t) = \|\overrightarrow{v}(t)\| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (-3\cos t)^2 + 4^2} = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16}$$

$$= \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 16} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

(iii) بين أن متجه السرعة يتعامد على متجه التسارع لكل $0 \le t \le 2\pi$.

الحل : لأي $t \in [0, 2\pi]$

$$\overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{a}(t) = 9\sin t\cos t - 9\sin t\cos t + 0 = 0$$

أي أن متجه السرعة يتعامد مع متجه التسارع لكل $t \in [0, 2\pi]$

(6) إذا كان C هو منحنى الدالة $y = \cos 2x$ ، احسب الانحناء عند $x = 0$ وأوجد معادلة دائرة الانحناء .

الحل : $y(0) = \cos(0) = 1$

$$y = \cos 2x \implies y' = -2\sin 2x \implies y'' = -4\cos 2x$$

$$K = \frac{|-4\cos 2x|}{[1+(-2\sin 2x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{4|\cos 2x|}{\left[1+4\sin^2 2x\right]^{\frac{3}{2}}}$$

الانحناء عند النقطة $(0,1)$ هو $K|_{(0,1)} = \dfrac{4|\cos(0)|}{\left[1+4\sin^2(0)\right]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{4}{[1+0]^{\frac{3}{2}}} = 4$

نصف قطر الانحناء عند النقطة $(0,1)$ هو $\rho = \dfrac{1}{K|_{(0,1)}} = \dfrac{1}{4}$

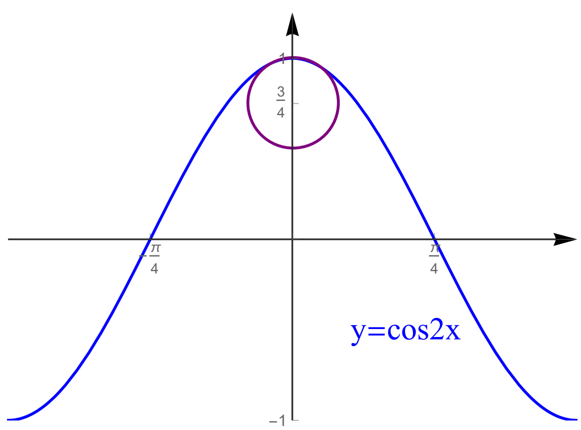
إيجاد مركز الانحناء :

$$a = 0 - \frac{-2\sin(0)\left[1+(-2\sin(0))^2\right]}{-4\cos(0)} = 0 - \frac{0\,[1+0]}{-4} = 0$$

$$b = 1 + \frac{\left[1+(-2\sin(0))^2\right]}{-4\cos(0)} = 1 + \frac{1}{-4} = \frac{3}{4}$$

أي أن مركز الانحناء هو $\left(0, \dfrac{3}{4}\right)$

معادلة دائرة الانحناء هي $(x-0)^2 + \left(y-\dfrac{3}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ أو $x^2 + \left(y-\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$



(7) إذا كان متجه الموضع لجسيم ما معطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = 3t\,\overrightarrow{i} - \sin t\,\overrightarrow{j} + \cos t\,\overrightarrow{k}$ حيث $t \geq 0$ ، احسب المركبة المماسية والمركبة الناظمية للتسارع عند أي زمن t .

الحل : $\overrightarrow{r'}(t) = 3\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j} - \sin t\,\overrightarrow{k}$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \sqrt{(3)^2 + (-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{9 + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{r''}(t) = 0\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j} - \cos t\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t) = 0 - \sin t\ \cos t + \sin t\ \cos t = 0$$

$$\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -\cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & -\cos t \end{vmatrix}$$

$$= (\cos^2 t + \sin^2 t)\,\overrightarrow{i} - (-3\cos t - 0)\,\overrightarrow{j} + (3\sin t - 0)\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + 3\cos t\,\overrightarrow{j} + 3\sin t\,\overrightarrow{k}$$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (3\cos t)^2 + (3\sin t)^2} = \sqrt{1 + 9(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

المركبة المماسية للتسارع عند أي زمن t هي $a_T = \dfrac{\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|} = \dfrac{0}{\sqrt{10}} = 0$

المركبة الناظمية للتسارع عند أي زمن t هي $a_N = \dfrac{\|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$

حل آخر : $\overrightarrow{r'}(t) = 3\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j} - \sin t\,\overrightarrow{k}$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \sqrt{(3)^2 + (-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{9 + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

بما أن $\|\overrightarrow{r'}(t)\|$ ثابتة لكل t فإن $\overrightarrow{r'}(t)$ و $\overrightarrow{r''}(t)$ متعامدان ، أي أن $\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t) = 0$

وبالتالي المركبة المماسية للتسارع عند أي زمن t هي $a_T = \dfrac{\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|} = \dfrac{0}{\sqrt{10}} = 0$

المركبة الناظمية للتسارع عند أي زمن t هي $a_N = \sqrt{\|\overrightarrow{a}(t)\|^2 - (a_T)^2} = \sqrt{\|\overrightarrow{a}(t)\|^2 - 0} = \|\overrightarrow{a}(t)\|$

$$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{r''}(t) = 0\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j} - \cos t\,\overrightarrow{k} = \sin t\,\overrightarrow{j} - \cos t\,\overrightarrow{k}$$

$$a_N = \|\overrightarrow{a}(t)\| = \sqrt{(0)^2 + (\sin t)^2 + (-\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

202 ريض - حساب المتجهات
الفصل الدراسي الأول 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

أجب عن الأسئلة الخمسة التالية :
السؤال الأول (سبع درجات) :

(1) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بمركز الكرة $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2 = 25$ ويوازي المتجه $\langle 2,-3,1\rangle$.

الحل : مركز الكرة $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2 = 25$ هو النقطة $(1,0,-2)$.

المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطة $(1,0,-2)$ ويوازي المتجه $\langle 2,-3,1\rangle$ هي

$$\begin{cases} x-1=2t \\ y-0=-3t \\ z-(-2)=t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-3t \\ z=t-2 \end{cases}$$

(2) أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $(2,-1,4)$ ويوازي المستوي الذي معادلته $5x-3y+z=3$.

الحل : المتجه الناظمي للمستوي الذي معادلته $5x-3y+z=3$ هو $\langle 5,-3,1\rangle$

وبالتالي المتجه الناظمي للمستوي المطلوب هو $\overrightarrow{a} = \langle 5\lambda,-3\lambda,\lambda\rangle$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$

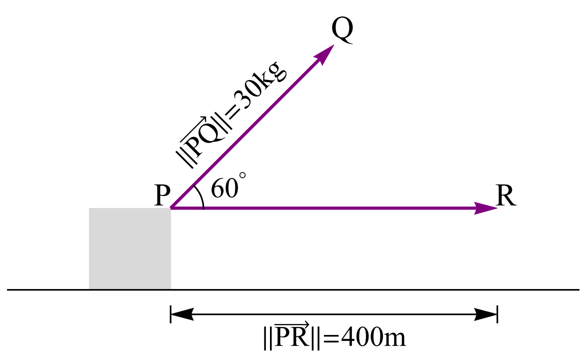
معادلة المستوي المار بالنقطة $(2,-1,4)$ ومتجهه الناظمي $\overrightarrow{a} = \langle 5\lambda,-3\lambda,\lambda\rangle$ هي

$$5\lambda(x-2)+(-3\lambda)(y-(-1))+\lambda(z-4)=0 \implies \lambda\left[5(x-2)-3(y+1)+(z-4)\right]=0$$

$$\implies 5x-10-3y-3+z-4=0 \implies 5x-3y+z-17=0$$

(3) يسحب شخص عربة على سطح مستوي وذلك بقوة تعادل $30\ kg$ على مقبض العربة، ومقبض العربة يصنع زاوية قدرها 60^o مع مستوى السطح ، أحسب الشغل المبذول لسحب العربة لمسافة $400\ m$.

الحل :



المتجه $\overrightarrow{PQ}$ يمثل القوة (مقداراً واتجاهاً) و $\|\overrightarrow{PQ}\| = 30$ تمثل مقدار القوة .

نقطة تطبيق القوة تتحرك على طول المتجه $\overrightarrow{PR}$ حيث $\|\overrightarrow{PR}\| = 400$

$\theta = 60^o = \dfrac{\pi}{3}$ تمثل الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$

الشغل المبذول هو

$$W = \|\overrightarrow{PQ}\| \, \|\overrightarrow{PR}\| \cos\theta = (30)(400)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = (30)(400)\left(\frac{1}{2}\right) = 6000\, kg.m$$

السؤال الثاني (ثمان درجات) :

(1) إذا كان جسيم ما يتحرك بسرعة ثابتة فأثبت أن متجه السرعة يتعامد مع متجه التسارع عند أي زمن t .

الحل : ليكن $\overrightarrow{v}(t)$ هو متجه السرعة للجسيم عند أي زمن t .

بما أن السرعة ثابتة فإن $v(t) = \|\overrightarrow{v}(t)\| = c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

أي أن $\overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{v}(t) = \|\overrightarrow{v}(t)\|^2 = c^2$ ، بإشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير t نحصل على

$$\overrightarrow{v'}(t)\cdot\overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{v'}(t) = 0 \implies 2\,\overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{v'}(t) = 0 \implies \overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{v'}(t) = 0$$

ولكن $\overrightarrow{v'}(t) = \overrightarrow{a}(t)$ هو متجه التسارع للجسيم ، وبالتالي $\overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{a}(t) = 0$ لكل t .

أي أن متجه السرعة يتعامد مع متجه التسارع عند أي زمن t .

(2) إذا كان $C \,:\, x = t^2 - 2t + 2 \,,\; y = t - 1 \,;\; t \geq 0$
احسب الانحناء عند النقطة $P(1,0)$.

الحل : لاحظ أن $(1,0) = (x(1), y(1))$ ، أي أن النقطة $P(1,0)$ تقع على المنحنى عندما $t = 1$.

$$x = f(t) = t^2 - 2t + 2 \implies f'(t) = 2t - 2 \implies f''(t) = 2$$

$$y = g(t) = t - 1 \impliedby g'(t) = 1 \implies g''(t) = 0$$

$$K = \frac{|f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)|}{\left[(f'(t))^2 + (g'(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|(2t-2)(0) - (2)(1)|}{\left[(2t-2)^2 + (1)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\left[(2t-2)^2 + (1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

الانحناء عند النقطة $P(1,0)$ هو $K|_{(1,0)} = K|_{t=1} = \dfrac{2}{\left[(2(1)-2)^2 + (1)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{[0+1]^{\frac{3}{2}}} = 2$

(3) إذا كان متجه الموضع لجسيم ما معطى بالدالة المتجهية
$\overrightarrow{r}(t) = \cos 3t\,\overrightarrow{i} + 4t\,\overrightarrow{j} + \sin 3t\,\overrightarrow{k}$ حيث $t \geq 0$ ، احسب المركبة الناظمية للتسارع عند أي زمن t .

الحل :

$$\overrightarrow{r'}(t) = -3\sin 3t\,\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 3\cos 3t\,\overrightarrow{k}$$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \sqrt{(-3\sin 3t)^2 + 4^2 + (3\cos 3t)^2} = \sqrt{9\left(\sin^2 3t + \cos^2 3t\right) + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

لاحظ أن السرعة ثابتة لكل t وبالتالي $\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t) = 0$ ومن ذلك نجد أن $a_T = 0$

المركبة الناظمية لمتجه التسارع $\|\overrightarrow{a}(t)\| = \sqrt{\|\overrightarrow{a}(t)\|^2 - 0} = \sqrt{\|\overrightarrow{a}(t)\|^2 - a_T^2} = a_N$

$$\overrightarrow{r''}(t) = -9\cos 3t\,\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} - 9\sin 3t\,\overrightarrow{k}$$

$$a_N = \|\overrightarrow{a}(t)\| = \|\overrightarrow{r''}(t)\| = \sqrt{(-9\cos 3t)^2 + (0)^2 + (-9\sin 3t)^2} = \sqrt{9^2\left(\cos^2 3t + \sin^2 3t\right)} = 9$$

السؤال الثالث (تسع درجات) :

(1) إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2x\sin y)\overrightarrow{i} + (x^2\cos y + z^3)\overrightarrow{j} + 3yz^2\overrightarrow{k}$

- بين أن حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ ليس دورانياً ، وأوجد دالة الجهد له .

الحل :

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x\sin y & x^2\cos y + z^3 & 3yz^2 \end{vmatrix}$$

$$= (3z^2 - 3z^2)\overrightarrow{i} - (0-0)\overrightarrow{j} + (2x\cos y - 2x\cos y)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

أي أن حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ ليس دورانياً .

إيجاد دالة الجهد f لحقل المتجهات F :

$$f_x(x,y,z) = 2x\sin y \implies f(x,y,z) = x^2\sin y + g(y,z)$$

$$f_y(x,y,z) = x^2\cos y + z^3 \implies x^2\cos y + g_y(y,z) = x^2\cos y + z^3 \implies g(y,z) = yz^3 + h(z)$$

$$f(x,y,z) = x^2\sin y + yz^3 + h(z)$$

$$f_z(x,y,z) = 3yz^2 \implies 3yz^2 = 3yz^2 + h'(z) \implies h(z) = c$$

أي أن دالة الجهد هي $f(x,y,z) = x^2\sin y + yz^3 + c$

- احسب الشغل المبذول بواسطة حقل متجهات القوة $\overrightarrow{F}$ على طول أي منحنى يبدأ من النقطة $(0,0,0)$ إلى $(1,\pi,2)$.

الحل: $W = \displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,\pi,2)} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = [f(x,y,z)]_{(0,0,0)}^{(1,\pi,2)}$

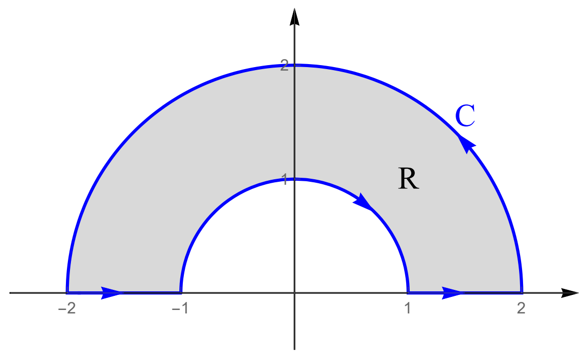
$$= \left[x^2\sin y + yz^3 + c\right]_{(0,0,0)}^{(1,\pi,2)} = \left((1)\sin(\pi) + \pi(2^3)\right) - (0+0) = 8\pi$$

(2) إذا كانت R هي المنطقة الواقعة في النصف العلوي للمستوي xy ومحدودة بالمنحنيين $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ ، وكان C هو المنحنى البسيط المغلق الذي يحد المنطقة R ، استخدم نظرية جرين لحساب التكامل

$$\oint_C (2x-y^3)\,dx+(x^3+4y)\,dy$$

الحل : $M(x,y)=2x-y^3 \implies \dfrac{\partial M}{\partial y}=-3y^2$

$$N(x,y)=x^3+4y \implies \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2$$



$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\ ,\ y\ge 0\right\}=\{(r,\theta): 1\le r\le 2\ ,\ 0\le\theta\le\pi\}$$

من نظرية جرين $\displaystyle\oint_C (2x-y^3)\,dx+(x^3+4y)\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\,dA=\iint_R\left(3x^2-(-3y^2)\right)\,dA$

$$=\iint_R (3x^2+3y^2)\,dx\,dy=\iint_R 3(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^\pi\int_1^2 3r^2\,r\,dr\,d\theta=\int_0^\pi\int_1^2 3r^3\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^\pi\left[3\frac{r^4}{4}\right]_1^2 d\theta=\int_0^\pi\left[\frac{3}{4}(16-1)\right]\,d\theta=\frac{45}{4}\int_0^\pi d\theta=\frac{45\pi}{4}$$

السؤال الرابع (سبع درجات) :

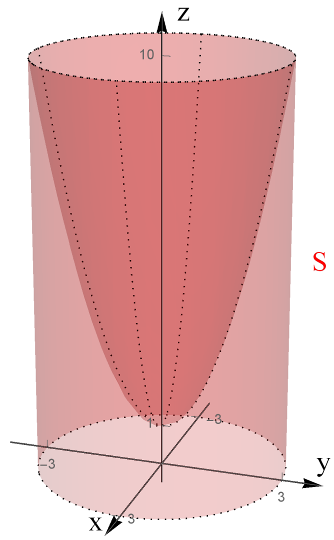
(1) احسب تدفق حقل المتجهات $\overrightarrow{F}(x,y,z)=xy^2\,\overrightarrow{i}+ze^x\,\overrightarrow{j}+x\sin y\,\overrightarrow{k}$ خلال السطح المغلق S المكون من السطوح $x^2+y^2=9$ و $z=0$ و $z=1+x^2+y^2$.

الحل : ليكن Q المجسم في الفضاء الثلاثي الذي حدوده السطح المغلق S .

$$\nabla\cdot\overrightarrow{F}=\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(ze^x)+\frac{\partial}{\partial z}(x\sin y)=y^2+0+0=y^2$$

باستخدام نظرية التباعد $\displaystyle Flux=\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iiint_Q \nabla\cdot\overrightarrow{F}\,dV=\iiint_Q y^2\,dV$

باستخدام الإحداثيات الأسطوانية : $0\le r\le 3\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\ ,\ 0\le z\le 1+x^2+y^2=1+r^2$



$$Flux = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dV = \iiint_Q y^2\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{1+r^2} (r \sin\theta)^2 r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{1+r^2} r^3 \sin^2\theta\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 [z]_0^{1+r^2} \left(r^3 \sin^2\theta\right)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (1+r^2)\left(r^3 \sin^2\theta\right)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r^3 + r^5) \sin^2\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^6}{6}\right]_0^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \left(\frac{3^4}{4} + \frac{3^6}{6}\right) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 3^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{3^2}{6}\right) \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 3^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) \frac{1}{2} [(2\pi - 0) - (0 - 0)] = 3^4 \pi \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{567\pi}{4}$$

(2) إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z) = f(y,z)\overrightarrow{i} + g(x,z)\overrightarrow{j} + h(x,y)\overrightarrow{k}$ حقل متجهات و f و g و h دوال حقيقية ، وكان S سطحاً موجهاً مغلقاً ، احسب $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$ حيث $\overrightarrow{n}$ هو متجه الوحدة الناظمي الخارجي للسطح S عند أي نقطة تقع عليه .

الحل : $\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x} f(y,z) + \frac{\partial}{\partial y} g(x,z) + \frac{\partial}{\partial z} h(x,y) = 0 + 0 + 0 = 0$

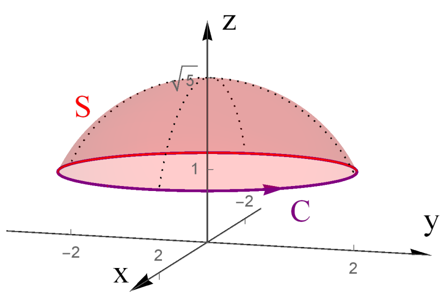
باستخدام نظرية التباعد $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dV = \iiint_Q 0\, dV = 0$

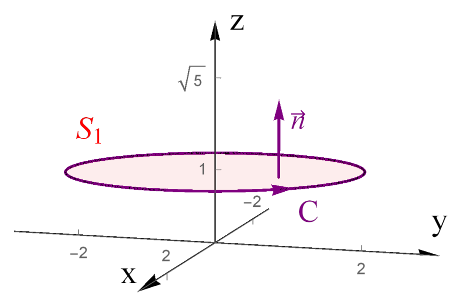
السؤال الخامس (تسع درجات) :

(1) إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+2z)\overrightarrow{i} + (3x-2y)\overrightarrow{j} + e^z\overrightarrow{k}$ حقل متجهات ، وكان S الجزء العلوي من السطح $x^2+y^2+z^2=5$ الواقع فوق $z=1$ ، استخدم نظرية ستوكس لحساب $\iint_S \left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS$

الحل الأول : لاحظ أن المنحنى C الناتج عن تقاطع الكرة $x^2+y^2+z^2=5$ والمستوى $z=1$ هو الدائرة $x^2+y^2=4$ التي مركزها $(0,0,1)$ ونصف قطرها 2

ليكن S_1 هو الجزء من المستوى $z=1$ الواقع داخل الأسطوانة $x^2+y^2=4$
عندئذ $S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4\,,\ z=1\right\}$





من نظرية ستوكس $\iint_S \left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint_{S_1} \left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS$

على السطح S_1 نلاحظ أن متجه الوحدة الناظمي هو $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+2z & 3x-2y & e^z \end{vmatrix} = (0-0)\overrightarrow{i} - (0-2)\overrightarrow{j} + (3-0)\overrightarrow{k} = 2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$$

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n} = \left[2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}\right]\cdot\overrightarrow{k} = 3$$

$$\iint_S \left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \iint_{S_1} \left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \iint_{S_1} 3\,dS = 3\iint_{S_1} dS = 3\left[\pi(2^2)\right] = 12\pi$$

لاحظ أن $\iint_{S_1} dS$ يمثل مساحة الدائرة التي نصف قطرها 2 وتساوي 4π

الحل الثاني : من نظرية ستوكس

$$\iint_S \left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \oint_C (x+2z)\,dx + (3x-2y)\,dy + e^z\,dz$$

المعادلات الوسيطية للمنحنى C هي $x=2\cos t\,,\ y=2\sin t\,,\ z=1$

وبالتالي $dx = -2\sin t\,dt\;,\; dy = 2\cos t\,dt\;,\; dz = 0$

$$\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} (2\cos t+2)(-2\sin t\,dt) + (6\cos t - 4\sin t)(2\cos t\,dt) + e^1(0)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-4\sin t\cos t - 4\sin t + 12\cos^2 t - 8\sin t\cos t\right]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-12\sin t\cos t - 4\sin t + 6(1+\cos 2t)\right]\,dt$$

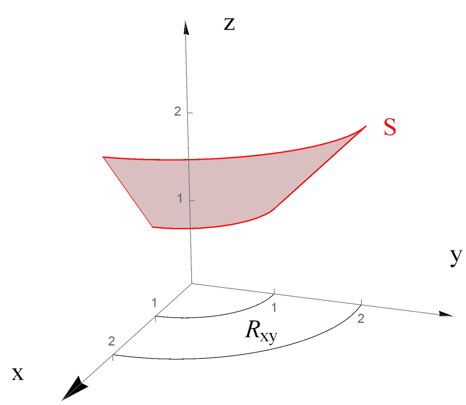
$$= \left[-12\,\frac{(\sin t)^2}{2} + 4\cos t + 6\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= (0+4+6(2\pi+0)) - (0+4+6(0+0)) = 12\pi$$

(2) إذا كان S هو الجزء من السطح $z=\sqrt{x^2+y^2}$ الواقع في الثمن الأول وبين المستويين $z=1$ و $z=2$ ، احسب التكامل السطحي $\iint_S xzy^2\,dS$

الحل : السطح S هو عبارة عن جزء من المخروط الدائري المحصور بين المستويين $z=1$ و $z=2$ ويقع في الثمن الأول .

أي أن $R_{x,y} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\;,\; x\ge 0\;,\; y\ge 0\right\}$ هي المنطقة المحصورة بين الدائرتين R_{xy} متحدتي المركز (نقطة الأصل) ونصفي قطريهما 2 و 1 وتقع في الربع الأول من المستوي xy .



لاحظ أن السطح S يعطى بالمعادلة $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ وبالتالي

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ و } f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\iint_S xzy^2\, dS = \iint_{R_{xy}} xy^2\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\, dA = \iint_{R_{xy}} xy^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\, dA$$

$R_{xy} = \left\{(r,\theta) : 1 \le r \le 2\ ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ باستخدام الإحداثيات القطبية

$$\iint_S xzy^2\, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 (r\ \cos\theta)\, r\, (r\ \sin\theta)^2\sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r^5(\sin\theta)^2\ \cos\theta\, dr\, d\theta$$

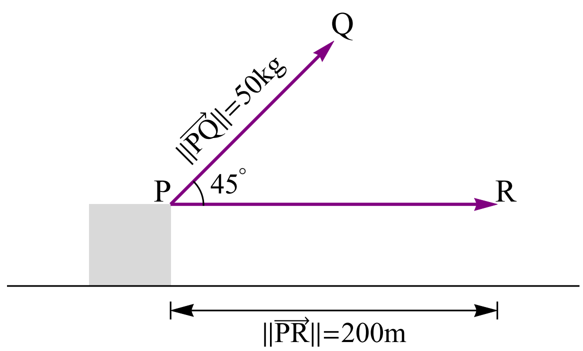
$$= \sqrt{2}\left(\int_1^2 r^5\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^2\cos\theta\, d\theta\right) = \sqrt{2}\left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2\ \left[\frac{(\sin\theta)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{2^6}{6}-\frac{1}{6}\right]\ \left[\frac{1}{3}-0\right] = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{63}{6} = \frac{63\sqrt{2}}{18} = \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

202 ريض - حساب المتجهات
الفصل الدراسي الثاني 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

(1) يسحب شخص عربة على سطح مستوي وذلك بقوة تعادل $50\ kg$ على مقبض العربة ، ومقبض العربة يصنع زاوية قدرها 45^o مع مستوى السطح ، أحسب الشغل المبذول لسحب العربة لمسافة $200\ m$.

الحل :



المتجه $\overrightarrow{PQ}$ يمثل القوة (مقداراً واتجاهاً) و $50 = \|\overrightarrow{PQ}\|$ تمثل مقدار القوة .

نقطة تطبيق القوة تتحرك على طول المتجه $\overrightarrow{PR}$ حيث $200 = \|\overrightarrow{PR}\|$

$\frac{\pi}{4} = 45^o = \theta$ تمثل الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$

الشغل المبذول هو

$$W = \|\overrightarrow{PQ}\|\ \|\overrightarrow{PR}\| \cos\theta = (50)(200)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = (50)(200)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{10000}{\sqrt{2}}\ kg.m$$

(2) احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(1,2,-1)$ و $B(3,-1,0)$ و $C(2,2,1)$.

الحل : مساحة المثلث هي $\text{A} = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$

$\overrightarrow{AB} = \langle 2,-3,1\rangle$ و $\overrightarrow{AC} = \langle 1,0,2\rangle$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-6-0)\overrightarrow{i} - (4-1)\overrightarrow{j} + (0-(-3))\overrightarrow{k} = -6\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$$

$$\text{A} = \frac{1}{2}\ \|\langle -6,-3,3\rangle\| = \frac{\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+(3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+9+9}}{2} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

(3) احسب نصف قطر ومركز الكرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-14=0$

الحل :

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-14=0$$

$$(x^2-2x)+(y^2+6y)+(z^2+10z)=14$$

$$(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)+(z^2+10z+25)=14+1+9+25$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+5)^2=49=(7)^2$$

مركز الكرة هو النقطة $(1,-3,-5)$ ونصف قطرها 7 .

(4) إذا كان $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in\mathbf{V}_3$ فأثبت أن $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=2\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)$

الحل :

$$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}\right)-\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)+\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)-\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{b}\right)$$

$$=\overrightarrow{0}-\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)+\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)-\overrightarrow{0}=\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)+\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)=2\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)$$

(5) إذا كان $\overrightarrow{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ متجهاً غير صفري يتعامد على كل من المتجهين $\overrightarrow{i}$ و $\overrightarrow{j}$ ، فأثبت أن $\overrightarrow{a}$ يوازي $\overrightarrow{k}$ واحسب $\|\overrightarrow{a}\|$.

الحل : بما أن المتجه $\overrightarrow{a}$ يتعامد على المتجه $\overrightarrow{i}$ فإن $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{i}=0$

أي أن $0=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{i}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot\langle 1,0,0\rangle=a_1 \implies a_1=0$

بما أن المتجه $\overrightarrow{a}$ يتعامد على المتجه $\overrightarrow{j}$ فإن $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{j}=0$

أي أن $0=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{j}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot\langle 0,1,0\rangle=a_2 \implies a_2=0$

وبالتالي $\overrightarrow{a}=\langle 0,0,a_3\rangle$ ، وبما أن المتجه $\overrightarrow{a}$ غير صفري فإن $a_3\neq 0$

$\overrightarrow{a}=\langle 0,0,a_3\rangle=a_3\langle 0,0,1\rangle=a_3\overrightarrow{k}$ ، أي أن المتجه $\overrightarrow{a}$ يوازي المتجه $\overrightarrow{k}$

$$\|\overrightarrow{a}\|=\sqrt{(0)^2+(0)^2+(a_3)^2}=\sqrt{a_3^2}=|a_3|$$

(6) أوجد الصيغة التناظرية للخط المستقيم المار بالنقطة $(2,1,2)$ ويوازي الخط المستقيم المار بالنقطتين $(3,3,3)$ و $(5,2,4)$

الحل : لتكن $P(2,1,2)$ و $Q(5,2,4)$ و $R(3,3,3)$

بما أن الخط المستقيم ℓ يوازي الخط المستقيم المار بالنقطتين Q و R ، فإن الخط المستقيم يوازي المتجه

$\overrightarrow{RQ} = \langle 2, -1, 1\rangle$ ، أي أن المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطة P ويوازي المتجه $\overrightarrow{RQ}$ هي

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = t \\ \dfrac{y-1}{-1} = t \\ z-2 = t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-2 = 2t \\ y-1 = -t \\ z-2 = t \end{cases}$$

الصيغة التناظرية للخط المستقيم ℓ هي $z-2 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{x-2}{2}$ أو $\dfrac{x-2}{2} = 1-y = z-2$

(7) أرسم المستوي المعطى بالمعادلة $3x + 2y + 2z = 6$.

الحل :

نقطة تقاطع المستوي المعطى بالمعادلة $3x + 2y + 2z = 6$ مع محور x :

بوضع $y = z = 0$ نحصل على $3x = 6 \implies x = 2$

أي أن المستوي المطلوب يتقاطع مع محور x في النقطة $(2, 0, 0)$.

نقطة تقاطع المستوي المعطى بالمعادلة $3x + 2y + 2z = 6$ مع محور y :

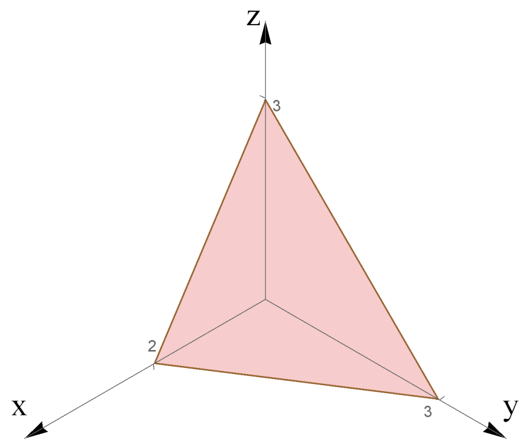
بوضع $x = z = 0$ نحصل على $2y = 6 \implies y = 3$

أي أن المستوي المطلوب يتقاطع مع محور y في النقطة $(0, 3, 0)$.

نقطة تقاطع المستوي المعطى بالمعادلة $3x + 2y + 2z = 6$ مع محور z :

بوضع $x = y = 0$ نحصل على $2z = 6 \implies z = 3$

أي أن المستوي المطلوب يتقاطع مع محور z في النقطة $(0, 0, 3)$.



(8) إذا كان الخط المستقيم ℓ المعطى بالمعادلات الوسيطية

$x = 2t+1\ ,\ y = -t-1\ ,\ z = t+3$ حيث $t \in \mathbb{R}^*$ ، يتعامد على المستوي Π عند النقطة $P(x,y,4)$ ، احسب معادلة المستوي Π .

الحل :

بما أن الخط المستقيم ℓ يتقاطع مع المستوي Π في النقطة $P(x,y,4)$ فإن النقطة P تقع على الخط المستقيم ℓ وبالتالي تحقق معادلاته الوسيطية ، أي أن

$$z = t+3 \implies 4 = t+3 \implies t = 1$$

وبالتالي $x = 2t+1 = 2(1)+1 = 3$ و $y = -t-1 = -1-1 = -2$

أي أن الخط المستقيم يتقاطع مع المستوي في النقطة $P(3,-2,4)$

الخط المستقيم ℓ يوازي المتجه $\overrightarrow{d} = \langle 2,-1,1 \rangle$ ، وبما أن الخط المستقيم ℓ يتعامد على المستوي Π فإن $\overrightarrow{d}$ هو المتجه الناظمي للمستوي Π .

معادلة المستوي Π المار بالنقطة $P(3,-2,4)$ ومتجهه الناظمي $\overrightarrow{d} = \langle 2,-1,1 \rangle$ هي

$$2(x-3)-(1)(y-(-2))+(1)(z-4) = 0 \implies 2x-y+z-6-2-4 = 0$$

$$\implies 2x-y+z-12 = 0$$

(9) بين أن أي متجه يقع على الخط المستقيم ℓ المعطى بالمعادلات الوسيطية $x = t\ ,\ y = -2t\ ,\ z = t$ حيث $t \in \mathbb{R}^*$ ، يتعامد على المتجه الناظمي للمستوي Π الذي معادلته $x + y + z - 4 = 0$ ، واحسب المسافة بين الخط المستقيم ℓ والمستوي Π .

الحل :

الخط المستقيم ℓ يوازي المتجه $\overrightarrow{a} = \langle 1, -2, 1 \rangle$

المتجه الناظمي للمستوي Π هو $\overrightarrow{b} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

ليكن $\overrightarrow{v}$ أي متجه يقع على الخط المستقيم ℓ ، عندئذ المتجه $\overrightarrow{v}$ يوازي المتجه $\overrightarrow{a}$ ، أي أن $\overrightarrow{v} = \lambda\ \overrightarrow{a}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{b} = (\lambda\ \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda\ \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = \lambda\left(\langle 1, -2, 1 \rangle \cdot \langle 1, 1, 1 \rangle\right) = \lambda\left(1 - 2 + 1\right) = 0$$

أي أن أي متجه يقع على الخط المستقيم ℓ يتعامد على المتجه الناظمي للمستوي Π .

حساب المسافة بين الخط المستقيم ℓ والمستوي Π :

بوضع $t = 1$ في المعادلات الوسيطية للخط المستقيم ℓ نجد أن النقطة $(1, -2, 1)$ تقع على الخط المستقيم ℓ .

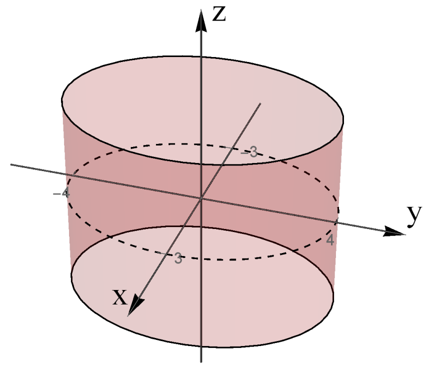
المسافة بين الخط المستقيم ℓ والمستوي Π هي نفس المسافة بين النقطة $P(1, -2, 1)$ والمستوي Π .

$$d = \left|\frac{1(1) + 1(-2) + 1(1) + (-4)}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}}\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

(10) أرسم الأسطوانة $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ في الفضاء الثلاثي ، وحدد نوع قاعدتها .

الحل :

قاعدة الأسطوانة تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ، ومحوره الأكبر يقع على محور y وطوله 8 ومحوره الأصغر يقع على محور x وطوله 6 .


z
y
x
−4
4
−3
3

202 ريض - حساب المتجهات
الفصل الدراسي الثاني 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

أجب عن الأسئلة السبعة التالية :

(1) احسب طول المنحنى المعطى بالدالة المتجهية
$\overrightarrow{r}(t) = 4\sin t\,\overrightarrow{i} - 3t\,\overrightarrow{j} + 4\cos t\,\overrightarrow{k}$ من $t = -2\pi$ إلى $t = 2\pi$.

الحل : الصيغة الوسيطية للمنحنى هي

$$C\ :\ x = 4\sin t\ ,\ y = -3t\ ,\ z = 4\cos t\ ;\ t \in [-2\pi, 2\pi]$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\cos t\ ,\ \ \frac{dy}{dt} = -3\ ,\ \ \frac{dz}{dt} = -4\sin t$$

$$L = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{(4\cos t)^2 + (-3)^2 + (-4\sin t)^2}\, dt = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{16\cos^2 t + 9 + 16\sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{16+9}\, dt = \int_{-2\pi}^{2\pi} 5\, dt = 5\,[t]_{-2\pi}^{2\pi} = 5(2\pi - (-2\pi)) = 20\pi$$

(2) إذا كانت $\overrightarrow{r'}(t) = e^{3t}\overrightarrow{i} + (t+2)^3\overrightarrow{j} + \frac{1}{2t+1}\overrightarrow{k}$ ، و $\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ ، أوجد $\overrightarrow{r}(t)$.

الحل : $\overrightarrow{r}(t) = \int \overrightarrow{r'}(t)\, dt = \left(\int e^{3t}\, dt\right)\overrightarrow{i} + \left(\int (t+2)^3\, dt\right)\overrightarrow{j} + \left(\int \frac{1}{2t+1}\, dt\right)\overrightarrow{k}$

$$= \left(\frac{1}{3}\int e^{3t}(3)\, dt\right)\overrightarrow{i} + \left(\int (t+2)^3\, dt\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{1}{2}\int \frac{2}{2t+1}\, dt\right)\overrightarrow{k}$$

$$= \left(\frac{e^{3t}}{3} + c_1\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{(t+2)^4}{4} + c_2\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{1}{2}\ln|2t+1| + c_3\right)\overrightarrow{k}$$

بما أن $\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ فإن

$$\frac{e^0}{3} + c_1 = 1 \implies \frac{1}{3} + c_1 = 1 \implies c_1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{(0+2)^4}{4} + c_2 = 5 \implies 4 + c_2 = 5 \implies c_2 = 1$$

$$\frac{1}{2}\ln|2(0)+1| + c_3 = 2 \implies \frac{1}{2}\ \ln(1) + c_3 = 2 \implies c_3 = 2$$

أي أن $\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{e^{3t}}{3} + \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{(t+2)^4}{4} + 1\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{1}{2}\ln|2t+1| + 2\right)\overrightarrow{k}$

(3) إذا كانت $\overrightarrow{r}$ دالة متجهية قابلة للإشتقاق مرتين ، فأثبت أن
$$D_t\left[\overrightarrow{r}(t)\times\overrightarrow{r'}(t)\right]=\overrightarrow{r}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)$$

الحل :

$$D_t\left[\overrightarrow{r}(t)\times\overrightarrow{r'}(t)\right]=\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r'}(t)+\overrightarrow{r}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)$$
$$=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{r}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)=\overrightarrow{r}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)$$

(4) إذا كان متجه التسارع لجسيم ما هو المتجه الصفري عند أي زمن t ، أثبت أن الجسيم يتحرك على خط مستقيم .

الحل : بما أن متجه السرعة هو المتجه الصفري عند أي زمن فإن $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}(t)=\overrightarrow{r''}(t)$

$$\overrightarrow{r'}(t)=\int\overrightarrow{r''}(t)\,dt=\int\overrightarrow{0}\,dt=c_1\overrightarrow{i}+c_2\overrightarrow{j}+c_3\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r}(t)=\int\overrightarrow{r'}(t)\,dt=(c_1t+d_1)\,\overrightarrow{i}+(c_2t+d_2)\,\overrightarrow{j}+(c_3t+d_3)\,\overrightarrow{k}$$

المنحنى C الناتج عن الدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)$ يعطى بالمعادلات الوسيطية التالية :

$$C\ :\ x=c_1t+d_1\ ,\ y=c_2t+d_2\ ,\ z=c_3t+d_3$$
$$\begin{cases}x=c_1t+d_1\\ y=c_2t+d_2\\ z=c_3t+d_3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x-d_1=c_1t\\ y-d_2=c_2t\\ z-d_3=c_3t\end{cases}$$

وتمثل معادلة خط مستقيم يمر بالنقطة (d_1,d_2,d_3) ويوازي المتجه $\langle c_1,c_2,c_3\rangle$

(5) إذا كان متجه الموضع لجسيم ما معطى بالدالة المتجهية
$\overrightarrow{r}(t)=bt\,\overrightarrow{i}+a\cos t\,\overrightarrow{j}+a\sin t\,\overrightarrow{k}$ حيث $0\le t\le 2\pi$ و $a,b\in\mathbb{R}^*$

(i) احسب السرعة المتجهية والتسارع عند الزمن t .

الحل : السرعة المتجهية عند الزمن t هي $\overrightarrow{v}(t)=\overrightarrow{r'}(t)=b\,\overrightarrow{i}-a\sin t\,\overrightarrow{j}+a\cos t\,\overrightarrow{k}$

التسارع عند الزمن t هو $\overrightarrow{a}(t)=\overrightarrow{r''}(t)=(0)\,\overrightarrow{i}-a\cos t\,\overrightarrow{j}-a\sin t\,\overrightarrow{k}$

(ii) بين أن السرعة ثابتة لكل $0\le t\le 2\pi$.

الحل : لأي $t\in[0.2\pi]$

$$v(t)=\|\overrightarrow{v}(t)\|=\sqrt{(b)^2+(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}=\sqrt{b^2+a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{b^2+a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\sqrt{b^2+a^2}$$

(iii) استنتج قيمة المركبتين المماسية و الناظمية لمتجه التسارع عند أي زمن t .

الحل : بما أن السرعة ثابتة لكل t ، فإن متجه السرعة يتعامد على متجه التسارع .

وبالتالي المركبة المماسية للتسارع عند أي t هي 0 $a_T = \dfrac{\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|} = \dfrac{\overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{a}(t)}{\sqrt{b^2+a^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{b^2+a^2}} = 0$

المركبة الناظمية للتسارع عند أي زمن t هي $\|\overrightarrow{a}(t)\|$ $a_N = \sqrt{\|\overrightarrow{a}(t)\|^2 - (a_T)^2} = \sqrt{\|\overrightarrow{a}(t)\|^2 - 0} = \|\overrightarrow{a}(t)\|$

أي أن $|a|$ $a_N = \sqrt{(0)^2+(-a\cos t)^2+(-a\sin t)^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2} = |a|$

(iv) استنتج قيمة الانحناء عند أي t .

الحل : $K(t) = \dfrac{a_N}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|^2} = \dfrac{|a|}{b^2+a^2}$

(6) إذا كان C هو منحنى الدالة $y = 2\cosh x$ ، احسب الانحناء عند $x = 0$ وأوجد معادلة دائرة الانحناء .

الحل : $y(0) = 2\cosh(0) = 2(1) = 2$

$$y = 2\cosh x \implies y' = 2\sinh x \implies y'' = 2\cosh x$$

$$K = \frac{|2\cosh x|}{[1+(2\sinh x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\cosh x}{\left[1+4\sinh^2 x\right]^{\frac{3}{2}}}$$

الانحناء عند النقطة $(0,2)$ هو 2 $K|_{(0,2)} = \dfrac{2\cosh(0)}{\left[1+4\sinh^2(0)\right]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{[1+0]^{\frac{3}{2}}} = 2$

نصف قطر الانحناء عند النقطة $(0,2)$ هو $\dfrac{1}{2}$ $\rho = \dfrac{1}{K|_{(0,2)}} = \dfrac{1}{2}$

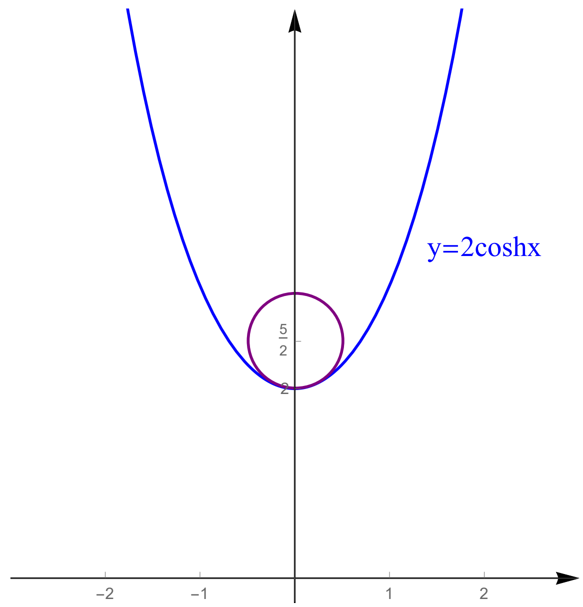
إيجاد مركز الانحناء :

$$a = 0 - \frac{2\sinh(0)\left[1+(2\sinh(0))^2\right]}{2\cosh(0)} = 0 - \frac{0\,[1+0]}{2} = 0$$

$$b = 2 + \frac{\left[1+(2\sinh(0))^2\right]}{2\cosh(0)} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

أي أن مركز الانحناء هو $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$

معادلة دائرة الانحناء هي $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2 + (x-0)^2$ أو $x^2 + \left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$



(7) (i) أوجد معادلة المستوي المماس للسطح $z = 2x^2 + y^2$ عند النقطة $(1, -1, 3)$.

الحل : ضع $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z$ عندئذ $F(x, y, z) = 0$

$$F_x(x, y, z) = 4x \implies F_x(1, -1, 3) = 4(1) = 4$$

$$F_y(x, y, z) = 2y \implies F_y(1, -1, 3) = 2(-1) = -2$$

$$F_z(x, y, z) = -1 \implies F_z(1, -1, 3) = -1$$

المتجه الناظمي للمستوي المماس للسطح عند النقطة $(1, -1, 3)$ هو $\langle 4, -2, -1 \rangle$

معادلة المستوي المماس للسطح عند النقطة $(1, -1, 3)$ هي :

$$4(x-1) + (-2)(y - (-1)) + (-1)(z-3) = 0 \implies 4x - 2y - z - 3 = 0$$

(ii) أوجد النقاط الواقعة على السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ التي يكون عندها المستوي المماس موازياً للمستوي $x + y + z = 0$.

الحل : ضع $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$ عندئذ $F(x, y, z) = 0$

$F_x(x, y, z) = 2x$ و $F_y(x, y, z) = 2y$ و $F_z(x, y, z) = 2z$.

المتجه الناظمي للمستوي المماس للسطح عند أي نقطة (x, y, z) هو $\langle 2x, 2y, 2z \rangle$

المتجه الناظمي للمستوي $x + y + z = 0$ هو $\langle 1, 1, 1 \rangle$

المستوي المماس للسطح يوازي المستوي $x + y + z = 0$ عندما يكون $\langle 2x, 2y, 2z \rangle = \lambda \langle 1, 1, 1 \rangle$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$

أي $\langle 2x, 2y, 2z\rangle = \langle \lambda, \lambda, \lambda\rangle$ ومنه $x = \frac{\lambda}{2}\ ,\ y = \frac{\lambda}{2}\ ,\ z = \frac{\lambda}{2}$

من معادلة السطح نجد أن $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 12 \implies \frac{3}{4}\lambda^2 = 12 \implies \lambda^2 = 16 \implies \lambda = \pm 4$

وبالتالي $x = y = z = \frac{4}{2} = 2$ أو $x = y = z = \frac{-4}{2} = -2$

عند النقطتين $(2, 2, 2)$ و $(-2, -2, -2)$ يكون المستوي المماس للسطح موازياً للمستوي $x + y + z = 0$.

202 ريض - حساب المتجهات
الفصل الدراسي الثاني 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

أجب عن الأسئلة الخمسة التالية :
السؤال الأول (ست درجات) :

(1) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم الذي يتعامد على المستوي $2x + y - z = 0$ عند النقطة $(1, 0, 2)$.

الحل : المتجه الناظمي للمستوي هو $\langle 2, 1, -1 \rangle$.

بما أن الخط المستقيم يتعامد على المستوي فإن الخط المستقيم يوازي المتجه $\langle 2, 1, -1 \rangle$.

المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطة $(1, 0, 2)$ ويوازي المتجه $\langle 2, 1, -1 \rangle$ هي

$$\begin{cases} x - 1 = 2t \\ y - 0 = t \\ z - 2 = -t \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

(2) أوجد معادلة المستوي المار بمركز الكرة $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 16$ ويوازي المستوي الذي معادلته $2x - 2y + 3z = 3$.

الحل : مركز الكرة هو النقطة $(2, -3, 1)$

المتجه الناظمي للمستوي الذي معادلته $2x - 2y + 3z = 3$ هو $\overrightarrow{a} = \langle 2, -2, 3 \rangle$

وبالتالي المتجه الناظمي للمستوي المطلوب هو $\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a} = \langle 2\lambda, -2\lambda, 3\lambda \rangle$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$

معادلة المستوي المار بالنقطة $(2, -3, 1)$ ومتجهه الناظمي $\overrightarrow{b} = \langle 2\lambda, -2\lambda, 3\lambda \rangle$ هي

$$2\lambda(x-2) + (-2\lambda)(y-(-3)) + 3\lambda(z-1) = 0 \implies \lambda\left[2(x-2) - 2(y+3) + 3(z-1)\right] = 0$$

$$\implies 2x - 4 - 2y - 6 + 3z - 3 = 0 \implies 2x - 2y + 3z - 13 = 0$$

(3) إذا كان $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ متجهين غير صفريين و $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\|$ فأثبت أن المتجهين $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ متعامدان .

الحل : $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}$

$$= \|\overrightarrow{a}\|^2 - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - \|\overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 - \|\overrightarrow{b}\|^2 = 0$$

لاحظ أن $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\|$ وبالتالي $\|\overrightarrow{a}\|^2 = \|\overrightarrow{b}\|^2$

السؤال الثاني (سبع درجات):

(1) إذا كان $C \ : \ x = 3\cos t \ , \ y = 2\sin t \ ; \ 0 \leq t \leq 2\pi$ ، احسب الانحناء عند النقطة $P(0,2)$.

الحل : لاحظ أن $(0,2) = (3\cos t, 2\sin t)$ وبالتالي $2 = 2\sin t$ ومنها $t = \frac{\pi}{2}$.

أي أن النقطة $P(0,2)$ تقع على المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{2}$.

$$x = f(t) = 3\cos t \implies f'(t) = -3\sin t \implies f''(t) = -3\cos t$$

$$y = g(t) = 2\sin t \implies g'(t) = 2\cos t \implies g''(t) = -2\sin t$$

$$K = \frac{|f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)|}{\left[(f'(t))^2 + (g'(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|(-2\sin t)(-3\sin t) - (-3\cos t)(2\sin t)|}{\left[(-3\sin t)^2 + (2\cos t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left|6\sin^2 t + 6\cos^2 t\right|}{\left[9\sin^2 t + 4\cos^2 t\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|6\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\right|}{\left[9\sin^2 t + 4\cos^2 t\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{\left[9\sin^2 t + 4\cos^2 t\right]^{\frac{3}{2}}}$$

الانحناء عند النقطة $P(0,2)$ هو

$$K|_{(0,2)} = K|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{\left[9\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{(9+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

(2) إذا كان متجه الموضع لجسيم ما معطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i} + \frac{t^2}{2}\overrightarrow{j} + \frac{t^3}{3}\overrightarrow{k}$ حيث $t \geq 0$ ، احسب المركبة الناظمية للتسارع عند أي زمن t .

الحل :

$$\overrightarrow{r'}(t) = \overrightarrow{i} + t\,\overrightarrow{j} + t^2\,\overrightarrow{k}$$

$\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (t)^2 + (t^2)^2} = \sqrt{1 + t^2 + t^4}$ ، لاحظ أن $\|\overrightarrow{r'}(t)\| \neq 0$ لكل t .

$$\overrightarrow{r''}(t) = (0)\,\overrightarrow{i} + (1)\,\overrightarrow{j} + 2t\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} + 2t\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = (2t^2 - t^2)\,\overrightarrow{i} - (2t - 0)\,\overrightarrow{j} + (1 - 0)\,\overrightarrow{k} = t^2\,\overrightarrow{i} - 2t\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

$$\|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\| = \sqrt{(t^2)^2 + (-2t)^2 + (1)^2} = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$$

$$a_N = \frac{\|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|} = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$

(3) أوجد النقاط الواقعة على السطح $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ التي يكون عندها المستوي المماس موازياً للمستوي yz .

الحل : ضع $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}-1$ عندئذ $F(x,y,z)=0$

$F_x(x,y,z)=\dfrac{2x}{9}$ و $F_y(x,y,z)=\dfrac{2y}{25}$ و $F_z(x,y,z)=\dfrac{2z}{16}=\dfrac{z}{8}$.

المتجه الناظمي للمستوي المماس للسطح عند أي نقطة (x,y,z) هو $\langle\dfrac{2x}{9},\dfrac{2y}{25},\dfrac{z}{8}\rangle$

المتجه الناظمي للمستوي yz هو $\overrightarrow{i}=\langle 1,0,0\rangle$

المستوي المماس للسطح يوازي المستوي yz عندما يكون $\langle\dfrac{2x}{9},\dfrac{2y}{25},\dfrac{z}{8}\rangle=\lambda\langle 1,0,0\rangle$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^*$

أي $\langle\dfrac{2x}{9},\dfrac{2y}{25},\dfrac{z}{8}\rangle=\langle\lambda,0,0\rangle$ ومنه $y=0\ ,\ z=0$

من معادلة السطح نجد أن $\dfrac{x^2}{9}+0+0=1\implies x^2=9\implies x=\pm 3$

عند النقطتين $(3,0,0)$ و $(-3,0,0)$ يكون المستوي المماس للسطح موازياً للمستوي yz .

السؤال الثالث (ثمان درجات) :

(1) إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(3x^2y)\overrightarrow{i}+(x^3+z^2e^y)\overrightarrow{j}+(2ze^y-1)\overrightarrow{k}$

- بين أن حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ ليس دورانياً ، وأوجد دالة الجهد له .

الحل :

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2y&x^3+z^2e^y&2ze^y-1\end{vmatrix}$$
$$=(2ze^y-2ze^y)\overrightarrow{i}-(0-0)\overrightarrow{j}+(3x^2-3x^2)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}$$

أي أن حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ ليس دورانياً .

إيجاد دالة الجهد f لحقل المتجهات F :

$$f_x(x,y,z)=3x^2y\implies f(x,y,z)=x^3y+g(y,z)$$
$$f_y(x,y,z)=x^3+z^2e^y\implies x^3+g_y(y,z)=x^3+z^2e^y\implies g(y,z)=z^2e^y+h(z)$$
$$f(x,y,z)=x^3y+z^2e^y+h(z)$$
$$f_z(x,y,z)=2ze^y-1\implies 2ze^y+h'(z)=2ze^y-1\implies h(z)=-z+c$$

أي أن دالة الجهد هي $f(x,y,z)=x^3y+z^2e^y-z+c$

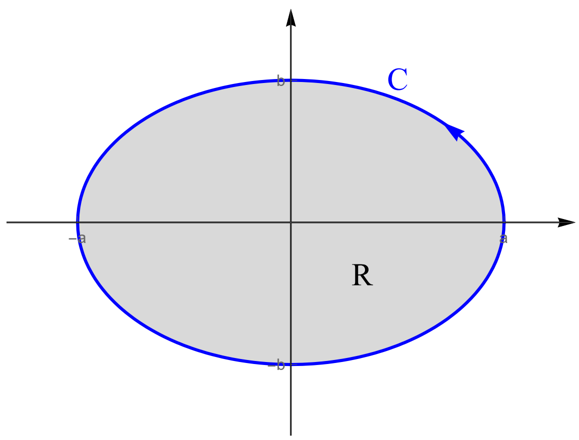
- احسب الشغل المبذول بواسطة حقل متجهات القوة $\overrightarrow{F}$ على طول أي منحنى يبدأ من النقطة $(0,2,0)$ إلى $(1,\ln 9,1)$.

الحل: $W = \int_{(0,2,0)}^{(1,\ln 9,1)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = [f(x,y,z)]_{(0,2,0)}^{(1,\ln 9,1)}$

$$= \left[x^3 y + z^2 e^y - z + c\right]_{(0,2,0)}^{(1,\ln 9,1)} = (\ln 9 + 9 - 1) - (0 + 0 - 0) = 8 + \ln 9 = 8 + 2\ln 3$$

(2) إذا كانت R هي المنطقة المحصورة داخل المنحنى C المعطى بالمعادلة $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ، حيث $a > b > 0$ ، احسب $\oint_C f(x)dx + [x + g(y)]\, dy$ حيث f و g دالتان حقيقيتان متصلتان على R .

الحل : المنحنى C يمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ورؤوسه $(\pm a, 0)$ و $(0, \pm b)$.



$$M(x,y) = f(x) \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$N(x,y) = x + g(y) \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 0 = 1$$

من نظرية جرين $\oint_C f(x)dx + [x + g(y)]\, dy = \iint_R \left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y} \right) dA$

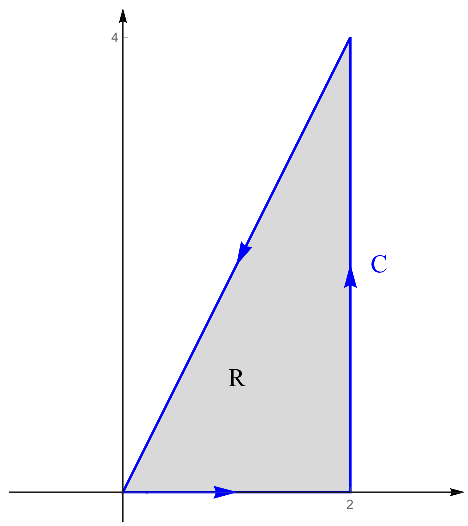
$$= \iint_R (1 - 0)\, dA = \iint_R dA = \pi ab$$

لاحظ أن $\iint_R dA$ يساوي مساحة المنطقة R وهي مساحة المنطقة الواقعة داخل القطع الناقص الذي طول محوره الأكبر $2a$ وطول محوره الأصغر $2b$.

السؤال الرابع (تسع درجات) :

(1) إذا كان المنحنى C هو المثلث الذي رؤوسه $(0,0)$ و $(2,0)$ و $(2,4)$ وكان $\overrightarrow{F}(x,y) = (y - e^x)\, \overrightarrow{i} + \left(x^3 + \sin y\right) \overrightarrow{j}$ حقل متجهات ، استخدم نظرية جرين لحساب $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

الحل : لاحظ أن معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$ هو $y=2x$



$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2\ ,\ 0\le y\le 2x\right\}$$

$$M(x,y)=y-e^x \implies \frac{\partial M}{\partial y}=1$$

$$N(x,y)=x^3+\sin y \implies \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2$$

من نظرية جرين $\displaystyle\oint_C (y-e^x)\,dx+(x^3+\sin y)\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\,dA=\iint_R (3x^2-1)\,dA$

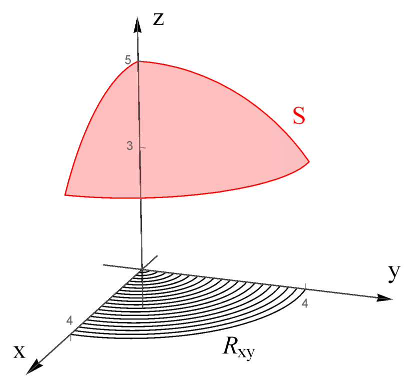
$$=\int_0^2\int_0^{2x}(3x^2-1)\,dy\,dx=\int_0^2(3x^2-1)\,[y]_0^{2x}\,dx=\int_0^2(3x^2-1)(2x-0)\,dx$$

$$=\int_0^2(6x^3-2x)\,dx=\left[\frac{3}{2}x^4-x^2\right]_0^2=(24-4)-(0-0)=20$$

(2) إذا كان S هو النصف العلوي من سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=25$ الواقع في الثمن الأول والمحدود من أسفل بالمستوي $z=3$ ، احسب التكامل السطحي $\displaystyle\iint_S x^2yz\,dS$.

الحل : السطح S هو عبارة عن جزء من النصف العلوي للكرة التي نصف قطرها 5 والمحصور من أسفل بالمستوي $z=3$ ويقع في الثمن الأول .

$R_{x,y}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 16\ ,\ x\ge 0\ ,\ y\ge 0\right\}$ أي أن R_{xy} تمثل القرص الذي مركزه نقطة الأصل ونصف قطره 4 ويقع في الربع الأول من المستوي xy .



لاحظ أن السطح S يعطى بالمعادلة $z = f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ وبالتالي

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \text{ و } f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

$$dS = \sqrt{\frac{x^2}{25 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2} + 1}\, dA = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA$$

$$\iint_S x^2yz\, dS = \iint_{R_{xy}} x^2y\sqrt{25 - x^2 - y^2}\, \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA = \iint_{R_{xy}} 5x^2y\, dA$$

باستخدام الإحداثيات القطبية $R_{xy} = \left\{(r,\theta) : 0 \le r \le 4\,,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$

$$\iint_S x^2yz\, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 5(r\ \cos\theta)^2\,(r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 5r^4 \cos^2\theta\ \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^4 5r^4\, dr\right)\left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2(-\sin\theta)\, d\theta\right) = \left[r^5\right]_0^4\ \left[-\frac{(\cos\theta)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (4^5 - 0)\left(0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4^5}{3} = \frac{1024}{3}$$

السؤال الخامس (عشر درجات):

(1) احسب تدفق حقل المتجهات $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y^2z\,\overrightarrow{i} + xe^z\,\overrightarrow{j} + 3x^2z\,\overrightarrow{k}$ خلال السطح المغلق S المكون من السطوح $x^2 + y^2 = 4$ و $z = 1 + x^2 + y^2$ و $z = -1 - x^2 - y^2$.

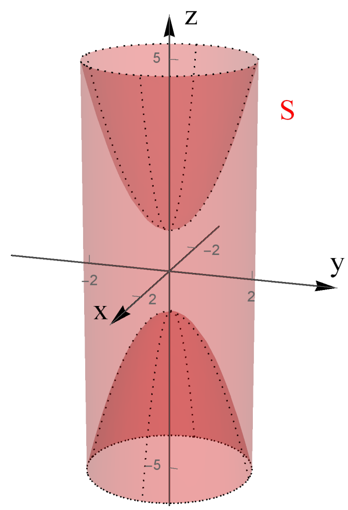
الحل : ليكن Q المجسم في الفضاء الثلاثي الذي حدوده السطح المغلق S .

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^z) + \frac{\partial}{\partial z}(3x^2z) = 0 + 0 + 3x^2 = 3x^2$$

باستخدام نظرية التباعد $Flux = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dV = \iiint_Q 3x^2\, dV$

باستخدام الإحداثيات الأسطوانية : $0 \le r \le 2\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

و $-1 - r^2 = -1 - x^2 - y^2 \le z \le 1 + x^2 + y^2 = 1 + r^2$



$$Flux = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dV = \iiint_Q 3x^2\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-1-r^2}^{1+r^2} 3(r\cos\theta)^2 r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-1-r^2}^{1+r^2} 3r^3 \cos^2\theta\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [z]_{-1-r^2}^{1+r^2} \left(3r^3 \cos^2\theta\right)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2 + 2r^2) \left(3r^3\cos^2\theta\right)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6r^3 + 6r^5) \cos^2\theta\, dr\, d\theta = \left[\frac{3r^4}{2} + r^6\right]_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$

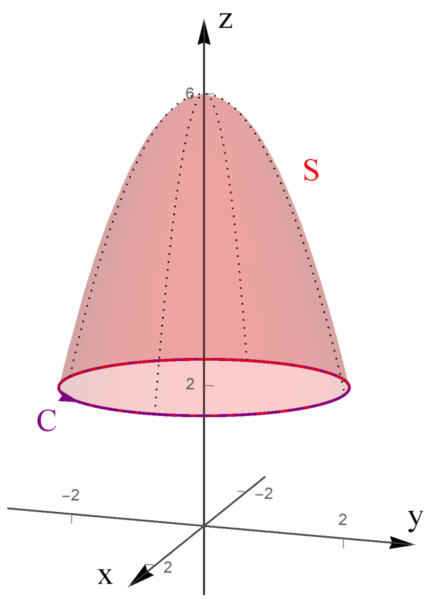
$$= \left(\frac{3(2^4)}{2} + 2^6\right) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta = (24 + 64)\ \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

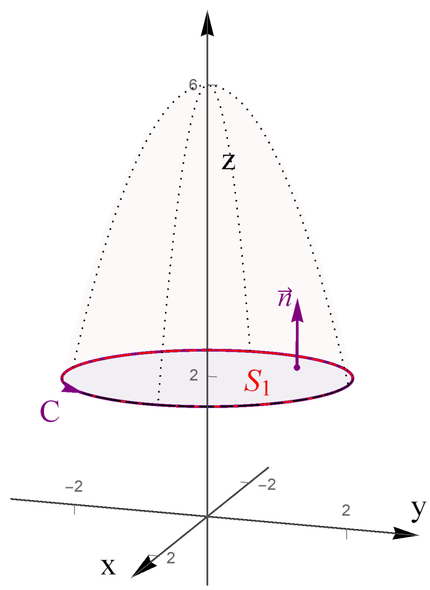
$$= (88)\ \frac{1}{2}\,[(2\pi - 0) - (0 - 0)] = 88\pi$$

(2) إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (5x+y)\overrightarrow{i} + (3x-5z)\overrightarrow{j} + xe^z\overrightarrow{k}$ حقل متجهات، وكان S الجزء من السطح $z = 6 - x^2 - y^2$ الواقع فوق $z = 2$ ، استخدم نظرية ستوكس لحساب $\iint_S \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n}\, dS$ حيث $\overrightarrow{n}$ هو متجه الوحدة الناظم الخارجي .

الحل الأول : لاحظ أن المنحنى C الناتج عن تقاطع $z = 6 - x^2 - y^2$ والمستوي $z = 2$ هو الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ التي مركزها $(0,0,2)$ ونصف قطرها 2

ليكن S_1 هو الجزء من المستوي $z = 2$ الواقع داخل $z = 6 - x^2 - y^2$
عندئذ $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4\, ,\ z = 2\right\}$





من نظرية ستوكس $\iint_S \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_{S_1} \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n}\, dS$

على السطح S_1 نلاحظ أن متجه الوحدة الناظمي هو $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 5x+y & 3x-5z & xe^z \end{vmatrix} = (0+5)\overrightarrow{i} - (e^z - 0)\overrightarrow{j} + (3-1)\overrightarrow{k} = 5\,\overrightarrow{i} - e^z\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$$

$$\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n} = \left[5\,\overrightarrow{i} - e^z\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}\right] \cdot \overrightarrow{k} = 2$$

$$\iint_S \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_{S_1} \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_{S_1} 2\, dS = 2\iint_{S_1} dS = 2\left[\pi(2^2)\right] = 8\pi$$

لاحظ أن $\iint_{S_1} dS$ يمثل مساحة الدائرة التي نصف قطرها 2 وتساوي 4π

الحل الثاني : من نظرية ستوكس

$$\iint_S \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_C (5x+y)\, dx + (3x-5y)\, dy + xe^z\, dz$$

المعادلات الوسيطية للمنحنى C هي $x = 2\cos t\ ,\ y = 2\sin t\ ,\ z = 2$

وبالتالي $dx = -2\sin t\, dt\ ,\ dy = 2\cos t\, dt\ ,\ dz = 0$

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} (10\cos t + 2\sin t)(-2\sin t\, dt) + (6\cos t - 10\sin t)(2\cos t\, dt) + 2\cos t\, e^2(0)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-20\sin t\cos t - 4\sin^2 t + 12\cos^2 t - 20\sin t\cos t\right]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [-40\sin t\cos t - 2(1-\cos 2t) + 6(1+\cos 2t)]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [-40\sin t\cos t + 4 + 8\cos 2t]\, dt$$

$$= \left[-20(\sin t)^2 + 4t + 4\sin 2t\right]_0^{2\pi} = (0 + 4(2\pi) + 0) - (0+0+0) = 8\pi$$