جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

محاضرات المقرر
202 ريض
حساب المتجهات

الفصل الثاني 1439 – 1440
الطبعة الثانية

د طارق عبدالرحمن الفاضل
أستاذ مشارك بقسم الرياضيات
e-mail : alfadhel@ksu.edu.sa
url : http://fac.ksu.edu.sa/alfadhel

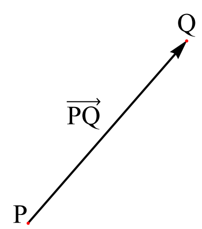
المحتويات

باب 1

المتجهات والسطوح

1.1 المتجهات في المستوي $\mathbb{R}^2$

درس الطالب في مقرر حساب التكامل مفاهيم رياضية كطول القوس والمساحة والحجم والتي يعبر عنها بمقادير كمية (المقدار الكمي هنا هو عدد حقيقي فقط) .
بعض المفاهيم الفيزيائية كالسرعة لا يكفي المقدار الكمي لوصفها بل يلزم أيضاً معرفة الاتجاه ومن هنا نشأت فكرة تمثيل مثل هذه المفاهيم بواسطة المتجهات ، ويذكر أن العالم الإيرلندي هاملتون هو من استخدم هذه الفكرة لتمثيل المفاهيم الفيزيائية.



تعريف (المتجه في $\mathbb{R}^2$) :
نرمز للمتجه الذي يبدأ من النقطة P وينتهي بالنقطة Q بالرمز $\overrightarrow{PQ}$ ويعرف بأنه القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها P ونهايتها Q .

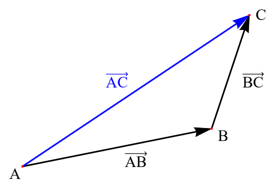
تعريف (مقياس المتجه في $\mathbb{R}^2$) :
إذا كانت $P=(x_1,y_1)$ و كانت $Q=(x_2,y_2)$ فإن مقياس المتجه $\overrightarrow{PQ}$ يرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{PQ}\|$ ويعرف بأنه طول القطعة المستقيمة $[P,Q]$. أي أن $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

تعريف (تكافؤ متجهين) :
نقول أن المتجهين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ متكافئين إذا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المقياس .

ملاحظات :

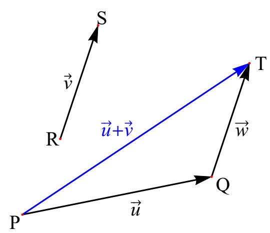
(i) أي متجه في $\mathbb{R}^2$ يحدد بواسطة اتجاهه ومقياسه فقط (وليس بمكان وجوده).

(ii) أي متجه في $\mathbb{R}^2$ يمكن إزاحته من مكان إلى آخر مع المحافظة على اتجاهه ومقياسه .

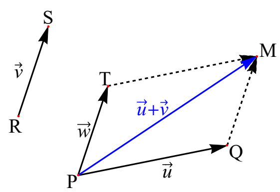


تعريف (جمع متجهين في $\mathbb{R}^2$):
إذا كان $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ متجهين في $\mathbb{R}^2$ فإن
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

ملاحظات :

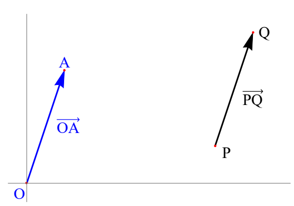


(i) إذا كان $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{RS}$ متجهين في $\mathbb{R}^2$ نأخذ المتجه $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QT}$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{v}$ ولكن نقطة بدايته هي النقطة Q عندئذ
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{PT}$



(ii) إذا كان $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{RS}$ متجهين في $\mathbb{R}^2$ نأخذ المتجه $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PT}$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{v}$ ولكن نقطة بدايته هي النقطة P عندئذ
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PM}$
الشكل الرباعي الذي رؤوسه النقاط $PQMT$ هو متوازي أضلاع والمتجه $\overrightarrow{PT}$ يكافئ المتجه $\overrightarrow{QM}$.

تعريف (ضرب متجه بعدد حقيقي):
إذا كان $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ متجهاً في $\mathbb{R}^2$ وكان c عدداً حقيقياً فإن $c\overrightarrow{v}$ يعرف بأنه المتجه الذي مقياسه يساوي $|c|\,\|v\|$ واتجاهه نفس اتجاه المتجه $\overrightarrow{v}$ إذا كان $c > 0$ وعكس اتجاه المتجه $\overrightarrow{v}$ إذا كان $c < 0$.



تعريف (متجه الموضع):
إذا كان $\overrightarrow{PQ}$ متجهاً في $\mathbb{R}^2$ فإن المتجه $\overrightarrow{OA}$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ ولكن نقطة بدايته هي نقطة الأصل $O = (0,0)$ يسمى متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{PQ}$.

ملاحظات :

(i) أي متجه في $\mathbb{R}^2$ يحدد بواسطة زوج مرتب (a_1, a_2) ، هذا الزوج المرتب هو إحداثيات نقطة النهاية لمتجه الموضع .

(ii) إذا كانت $A = (a_1, a_2)$ و $B = (b_1, b_2)$ فإن $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ حيث $C = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

(ii) إذا كانت $A = (a_1, a_2)$ و $c \in \mathbb{R}$ فإن المتجه $c\overrightarrow{OA}$ يحدد بالزوج المرتب (ca_1, ca_2) .

تعريف (الفضاء الاتجاهي ثنائي البعد):
نرمز للفضاء الاتجاهي ثنائي البعد بالرمز $\mathbf{V}_2$ ويعرف بأنه مجموعة جميع الأزواج المرتبة الحقيقية $\langle x, y\rangle$ والتي تحقق التالي :

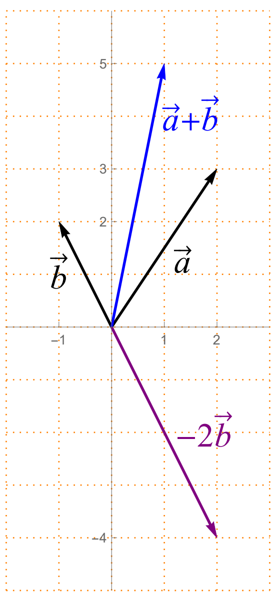
(i) إذا كان $\overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\overrightarrow{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ فإن $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$

(ii) إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $c \in \mathbb{R}$ فإن $c\vec{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$

تعاريف :

(i) نرمز للمتجه الصفري بالرمز $\vec{0}$ ويعرف بأنه $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

(ii) إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ فإن $\overrightarrow{-a} = -\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, -a_2 \rangle$.



مثال : إذا كان $\vec{a} = \langle 2, 3 \rangle$ و $b = \langle -1, 2 \rangle$

(i) أحسب $\vec{a} + \vec{b}$ و $2\vec{a} + 3\vec{b}$ و $-2\vec{b}$

(ii) أرسم المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ و $-2\vec{b}$

الحل :

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \langle 2, 3 \rangle + \langle -1, 2 \rangle = \langle 2 + (-1), 3 + 2 \rangle = \langle 1, 5 \rangle$

$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2\langle 2, 3 \rangle + 3\langle -1, 2 \rangle = \langle 4, 6 \rangle + \langle -3, 6 \rangle = \langle 1, 12 \rangle$

$-2\vec{b} = -2\langle -1, 2 \rangle = \langle 2, -4 \rangle$

(ii) رسم المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ و $-2\vec{b}$ في الشكل المقابل.

نتيجة :

إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ فإن $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

نظرية :

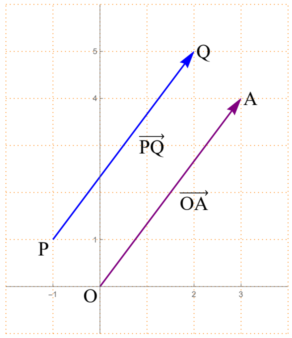
إذا كانت $P_1\left(x_1, y_1\right)$ و $P_2 = \left(x_2, y_2\right)$ نقطتين مختلفتين في المستوى فإن المتجه $\vec{a} \in \mathbf{V}_2$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ هو
$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

البرهان :

للحصول على المتجه $\vec{a} \in \mathbf{V}_2$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ نقوم بإزاحة (تحريك) المتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ دون تغيير طوله أو اتجاهه بحيث تنطبق النقطة P_1 على نقطة الأصل وفي هذه الحالة تصبح

$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \implies a_1 = x_2 - x_1 \ , \ a_2 = y_2 - y_1$

وبالتالي $\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \in \mathbf{V}_2$ هو المتجه المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$



مثال :
إذا كانت $P(-1,1)$ و $Q(2,5)$ أحسب متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ وارسمه .
الحل :
متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ هو المتجه $\overrightarrow{a} = \langle 2-(-1), 5-1\rangle = \langle 3,4\rangle$

نظرية :
إذا كان $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ ثلاث متجهات في $\mathbf{V}_2$ فإن

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)=\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{-a}=\overrightarrow{0} \quad (4)$$

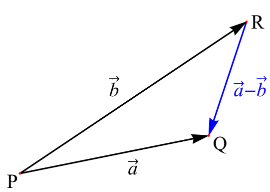
البرهان : ليكن $\overrightarrow{a}=\langle a_1,a_2\rangle$ و $\overrightarrow{b}=\langle b_1,b_2\rangle$ و $\overrightarrow{c}=\langle c_1,c_2\rangle$

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\langle a_1,a_2\rangle+\langle b_1,b_2\rangle=\langle a_1+b_1,a_2+b_2\rangle \quad (1)$$
$$=\langle b_1+a_1,b_2+a_2\rangle=\langle b_1,b_2\rangle+\langle a_1,a_2\rangle=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)=\langle a_1,a_2\rangle+(\langle b_1,b_2\rangle+\langle c_1,c_2\rangle)=\langle a_1,a_2\rangle+\langle b_1+c_1,b_2+c_2\rangle \quad (2)$$
$$=\langle a_1+b_1+c_1,a_2+b_2+c_2\rangle=\langle a_1+b_1,a_2+b_2\rangle+\langle c_1,c_2\rangle$$
$$=(\langle a_1,a_2\rangle+\langle b_1,b_2\rangle)+\langle c_1,c_2\rangle=\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\langle a_1,a_2\rangle+\langle 0,0\rangle=\langle a_1+0,a_2+0\rangle=\langle a_1,a_2\rangle=\overrightarrow{a} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{-a}=\langle a_1,a_2\rangle+\langle -a_1,-a_2\rangle=\langle a_1-a_1,a_2-a_2\rangle=\langle 0,0\rangle=\overrightarrow{0} \quad (4)$$



تعريف (حاصل طرح متجهين) :
إذا كان $\overrightarrow{a}=\langle a_1,a_2\rangle$ و $\overrightarrow{b}=\langle b_1,b_2\rangle$ فإن $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{-b}\right)$
وفي هذه الحالة يكون $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\langle a_1-b_1,a_2-b_2\rangle$

مثال : إذا كان $\overrightarrow{a}=\langle 3,2\rangle$ و $\overrightarrow{b}=\langle -4,4\rangle$ ، أحسب $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ و $4\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$
الحل : $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\langle 3,2\rangle-\langle -4,4\rangle=\langle 3-(-4),2-4\rangle=\langle 7,-2\rangle$
$4\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}=\langle 12,8\rangle-\langle -12,12\rangle=\langle 12-(-12),8-12\rangle=\langle 24,-4\rangle$

تعريف :

إذا كان $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}_2$ فإن

(i) $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان $\vec{b} = c\vec{a}$ حيث $c > 0$ و $c \in \mathbb{R}$

(ii) $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعاكسي الاتجاه إذا كان $\vec{b} = c\vec{a}$ حيث $c < 0$ و $c \in \mathbb{R}$

نظرية :

إذا كان $\vec{a} \in \mathbf{V}_2$ و $c \in \mathbb{R}$ فإن $\|c\vec{a}\| = |c| \, \|\vec{a}\|$

البرهان :

ليكن $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ عندئذ $c\vec{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$

$$\|c\vec{a}\| = \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} = \sqrt{c^2 a_1^2 + c^2 a_2^2} = \sqrt{c^2 \left(a_1^2 + a_2^2\right)} = |c| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |c| \, \|\vec{a}\|$$

نظرية :

إذا كان $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}_2$ و $c, d \in \mathbb{R}$ فإن

(1) $c\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = c\vec{a} + c\vec{b}$

(2) $(c+d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$

(3) $(cd)\vec{a} = c\left(d\vec{a}\right) = d\left(c\vec{a}\right)$

(4) $1\vec{a} = \vec{a}$

(5) $0\vec{a} = \vec{0} = c\vec{0}$

البرهان : ليكن $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$

(1) $$c\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = c\left(\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle\right) = c\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle = \langle c\left(a_1 + b_1\right), c\left(a_2 + b_2\right) \rangle$$

$$= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle = \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle = c\langle a_1, a_2 \rangle + c\langle b_1, b_2 \rangle = c\vec{a} + c\vec{b}$$

(2) $$(c+d)\vec{a} = (c+d)\langle a_1, a_2 \rangle = \langle (c+d)a_1, (c+d)a_2 \rangle = \langle ca_1 + da_1, ca_2 + da_2 \rangle$$

$$= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle da_1, da_2 \rangle = c\langle a_1, a_2 \rangle + d\langle a_1, a_2 \rangle = c\vec{a} + d\vec{a}$$

(3) $$(cd)\vec{a} = (cd)\langle a_1, a_2 \rangle = \langle cda_1, cda_2 \rangle = c\langle da_1, da_2 \rangle = c\left(d\langle a_1, a_2 \rangle\right) = c\left(d\vec{a}\right)$$

$$(cd)\vec{a} = (cd)\langle a_1, a_2 \rangle = \langle cda_1, cda_2 \rangle = d\langle ca_1, ca_2 \rangle = d\left(c\langle a_1, a_2 \rangle\right) = d\left(c\vec{a}\right)$$

(4) $$1\vec{a} = 1\langle a_1, a_2 \rangle = \langle 1\ a_1, 1\ a_2 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle = \vec{a}$$

(5) $$0\vec{a} = 0\langle a_1, a_2 \rangle = \langle 0\ a_1, 0\ a_2 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \vec{0} = \langle c\,0, c\,0 \rangle = c\langle 0, 0 \rangle = c\vec{0}$$

تعريف :

$\vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$ و $\vec{j} = \langle 0, 1 \rangle$

نظرية :

إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ متجهاً في $\mathbf{V}_2$ فإن $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$

البرهان :

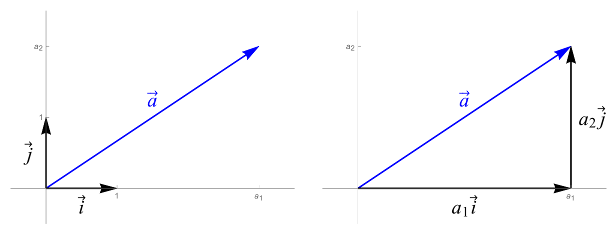
$$\vec{a} = \langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, 0\rangle + \langle 0, a_2\rangle = a_1\langle 1, 0\rangle + a_2\langle 0, 1\rangle = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

ملاحظة : إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2\rangle = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$

(1) تسمى a_1 بالمركبة الأفقية .

(2) تسمى a_2 بالمركبة الرأسية (أو العمودية) .

(3) لاحظ أن $\|\vec{i}\| = 1$ و $\|\vec{j}\| = 1$



مثال : إذا كان $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ ، أحسب $3\vec{a} - \vec{b}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$

الحل :

$$3\vec{a} - \vec{b} = 3\left(3\vec{i} - \vec{j}\right) - \left(2\vec{i} + 5\vec{j}\right) = \left(9\vec{i} - 3\vec{j}\right) - \left(2\vec{i} + 5\vec{j}\right)$$
$$= (9-2)\vec{i} + (-3-5)\vec{j} = 7\vec{i} - 8\vec{j}$$

نظرية :

إذا كان $\vec{a}$ متجهاً غير صفرياً فإن متجه الوحدة $\vec{u}$ في نفس اتجاه $\vec{a}$ هو $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$

البرهان :

بما أن $\vec{a}$ متجه غير صفري فإن $\|\vec{a}\| > 0$ ، بوضع $c = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}$ فإن $c > 0$

وبالتالي $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = c\vec{a}$ حيث $c > 0$ مما يعني أن المتجه $\vec{u}$ في نفس اتجاه المتجه $\vec{a}$

لإثبات أن $\vec{u}$ هو متجه الوحدة ، يجب إثبات أن مقياسه يساوي 1 .

$$\|\vec{u}\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\| = \left|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\right|\|\vec{a}\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1$$

مثال : أحسب متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{a} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$

الحل : $\|\vec{a}\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{10}\left(8\vec{i} + 6\vec{j}\right) = \left(\frac{8}{10}\right)\vec{i} + \left(\frac{6}{10}\right)\vec{j} = \left(\frac{4}{5}\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{5}\right)\vec{j}$$

تمارين (1.1)

(1) أحسب $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ و $2\vec{a}+3\vec{b}$ و $3\vec{a}-4\vec{b}$ فيما يلي :

(i) $\vec{a}=\langle 3,-2\rangle$, $\vec{b}=\langle 1,3\rangle$ $\quad$ (ii) $\vec{a}=\langle 2,-3\rangle$, $\vec{b}=\langle 1,4\rangle$

(iii) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}$ $\quad$ (iv) $\vec{a}=-\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}$

(2) أوجد متجه الموضع المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ وأحسب طوله وارسمه فيما يلي :

(i) $P(1,2)$, $Q(3,5)$ $\quad$ (ii) $P(2,0)$, $Q(6,-3)$

(iii) $P(-2,1)$, $Q(-4,7)$ $\quad$ (iv) $P(-1,-2)$, $Q(-4,-5)$

(3) (i) أوجد المتجه الذي له نفس اتجاه المتجه $\vec{a}=\langle 2,-3\rangle$ وطوله ضعف طول المتجه $\vec{a}$

(ii) أوجد المتجه الذي له عكس اتجاه المتجه $\vec{a}=\langle -3,6\rangle$ وطوله ثلث طول المتجه $\vec{a}$

(4) إذا كان $\vec{a}=-3\vec{i}+4\vec{j}$ أوجد قيمة c التي تحقق

(i) $\|c\vec{a}\|=3$ $\quad$ (ii) $\|c\vec{a}\|=0$

(5) ليكن $\vec{a}=\langle a_1,a_2\rangle$ متجهاً غير صفرياً ولتكن $A(a_1,a_2)$ ، إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجه $\overrightarrow{OA}$ ومحور x فأثبت أن
$$\vec{a}=\|\vec{a}\|\left(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\right)$$

(6) إذا كان $\vec{r_0}=\langle x_0,y_0\rangle$ و $\vec{r}=\langle x,y\rangle$ و $c>0$ ، صف مجموعة النقاط $P(x,y)$ التي تحقق $\|\vec{r}-\vec{r_0}\|=c$

(7) إذا كان $\vec{r_0}=\langle x_0,y_0\rangle$ و $\vec{r}=\langle x,y\rangle$ و $c\in\mathbb{R}^*$ و $\vec{a}=\langle a_1,a_2\rangle\neq\vec{0}$ ، صف مجموعة النقاط $P(x,y)$ التي تحقق
$$\vec{r}-\vec{r_0}=c\vec{a}$$

(8) إذا كانت $P_1,P_2,\cdots P_n$ نقاط مختلفة في المستوي ، حيث $n\in\mathbb{N}$ ، أثبت أن $\left(\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{P_kP_{k+1}}\right)+\overrightarrow{P_nP_1}=\vec{0}$

2.1 المتجهات في الفضاء $\mathbb{R}^3$

المسافة بين نقطتين في $\mathbb{R}^3$:
إذا كانت $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين في $\mathbb{R}^3$ فإن المسافة بينهما هي
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال : أحسب المسافة بين النقطتين $P_1(1, -2, 1)$ و $P_2(3, 1, -4)$
الحل :
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-(-2))^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$$

تعريف (الفضاء الاتجاهي ثلاثي البعد) :
نرمز للفضاء الاتجاهي ثلاثي البعد بالرمز $\mathbf{V}_3$ ويعرف بأنه مجموعة جميع الثلاثيات المرتبة الحقيقية $\langle x, y, z\rangle$ والتي تحقق التالي:

(i) إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ فإن $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$

(ii) إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $c \in \mathbb{R}$ فإن $c\vec{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle$

تعاريف :

(1) $\vec{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$

(2) إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \in \mathbf{V}_3$ فإن $-\vec{a} = -\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle -a_1, -a_2, -a_3\rangle$

(3) إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ متجهين في $\mathbf{V}_3$ فإن
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\rangle$$

نتيجة (مقياس متجه في $\mathbf{V}_3$) :
إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \in \mathbf{V}_3$ فإن $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

نظرية :
إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \in \mathbf{V}_3$ و $c \in \mathbb{R}$ فإن $\|c\vec{a}\| = |c|\,\|\vec{a}\|$
البرهان : $\|c\vec{a}\| = \|\langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle\| = \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2}$
$$= \sqrt{c^2 a_1^2 + c^2 a_a^2 + c^2 a_3^2} = \sqrt{c^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)} = |c|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |c|\,\|\vec{a}\|$$

مثال : إذا كان $\vec{a} = \langle 3, 1, -5\rangle$ و $\vec{b} = \langle 2, -3, 4\rangle$ ، أحسب $\vec{a} + \vec{b}$ و $3\vec{a} - 2\vec{b}$ و $\|-3\vec{a}\|$
الحل :
$$\vec{a} + \vec{b} = \langle 3, 1, -5\rangle + \langle 2, -3, 4\rangle = \langle 3+2, 1+(-3), -5+4\rangle = \langle 5, -2, -1\rangle$$
$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3\langle 3, 1, -5\rangle + (-2)\langle 2, -3, 4\rangle = \langle 9, 3, -15\rangle + \langle -4, 6, -8\rangle = \langle 5, 9, -23\rangle$$
$$\|-3\vec{a}\| = |-3|\|\vec{a}\| = 3\sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-5)^2} = 3\sqrt{9+1+25} = 3\sqrt{35}$$

تعريف :
إذا كان $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbf{V}_3$ فإن

(i) $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان $\overrightarrow{b} = c\overrightarrow{a}$ حيث $c > 0$ و $c \in \mathbb{R}$

(ii) $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ متعاكسي الاتجاه إذا كان $\overrightarrow{b} = c\overrightarrow{a}$ حيث $c < 0$ و $c \in \mathbb{R}$

مثال : إذا كان $\overrightarrow{a} = \langle 4, 6, -2\rangle$ و $\overrightarrow{b} = \langle 12, 18, -6\rangle$ و $\overrightarrow{c} = \langle -2, -3, 1\rangle$

(i) بين أن المتجهين $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ لهما نفس الاتجاه .

(ii) بين أن المتجهين $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{c}$ متعاكسي الاتجاه .

الحل :

(i) $\overrightarrow{b} = \langle 12, 18, -6\rangle = 3\langle 4, 6, -1\rangle = 3\overrightarrow{a}$

أي أن المتجهين $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ لهما نفس الاتجاه .

(ii) $\overrightarrow{c} = \langle -2, -3, 1\rangle = \dfrac{-1}{2}\langle 4, 6, -2\rangle = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}$

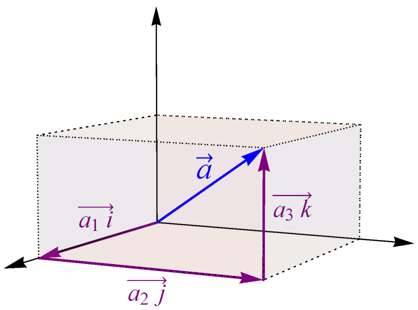
أي أن المتجهين $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{c}$ متعاكسي الاتجاه .

تعريف (متجه الموضع) :
إذا كان $\overrightarrow{PQ}$ متجهاً في $\mathbb{R}^3$ فإن المتجه $\overrightarrow{OA}$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ ولكن نقطة بدايته هي نقطة الأصل $O = (0,0,0)$ يسمى متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{PQ}$.

نظرية :
إذا كانت $P_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ و $P_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ نقطتين مختلفتين في الفضاء الثلاثي فإن المتجه $\overrightarrow{a} \in \mathbf{V}_3$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ هو $\overrightarrow{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$
البرهان :
للحصول على المتجه $\overrightarrow{a} \in \mathbf{V}_3$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ نقوم بإزاحة (تحريك) المتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ دون تغيير طوله أو اتجاهه بحيث تنطبق النقطة P_1 على نقطة الأصل وفي هذه الحالة تصبح
$$\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle \implies a_1 = x_2 - x_1\ ,\ a_2 = y_2 - y_1\ ,\ a_3 = z_2 - z_1$$
وبالتالي $\overrightarrow{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle \in \mathbf{V}_2$ هو المتجه المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$

مثال : إذا كانت $P_1(2, -1, 4)$ و $P_2(-3, 4, 1)$ نقطتين في $\mathbb{R}^3$ فأوجد المتجه $\overrightarrow{a} \in \mathbf{V}_3$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$
الحل : $\overrightarrow{a} = \langle -3-2, 4-(-1), 1-4\rangle = \langle -5, 5, -3\rangle$

تعريف :
$\overrightarrow{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$ و $\overrightarrow{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ و $\overrightarrow{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$



نظرية :

إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ متجهاً في $\mathbf{V}_3$ فإن $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

البرهان :

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle$$
$$= a_1\langle 1,0,0\rangle + a_2\langle 0,1,0\rangle + a_3\langle 0,0,1\rangle = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

مثال : إذا كان $\vec{a} = \langle 2, -1, 3 \rangle$

(i) أكتب المتجه $\vec{a}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$.

(ii) أوجد متجه الوحدة $\vec{u}$ باتجاه المتجه $\vec{a}$.

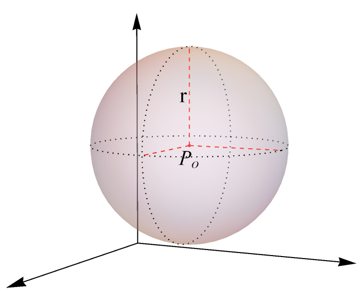
الحل :

(i) $\vec{a} = \langle 2, -1, 3 \rangle = 2\vec{i} + (-1)\vec{j} + 3\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

(ii) $\|\vec{a}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

تعريف (الكرة) : تعرف الكرة بأنها مجموعة جميع النقاط في الفضاء الثلاثي التي تبعد بعداً ثابتاً (يسمى نصف قطر الكرة) عن نقطة ثابتة (تسمى مركز الكرة) .



نظرية :

معادلة الكرة التي مركزها النقطة $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ ونصف قطرها $r > 0$ هي

$$(x - x_0)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

البرهان :

لتكن $P(x, y, z)$ أي نقطة تقع على سطح الكرة عندئذ $d\left(P, P_0\right) = r$

أي أن $\sqrt{(x - x_0)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + (z - z_0)^2} = r$

$$\Longrightarrow\ (x - x_0)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

مثال : بين أن $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z - 19 = 0$ تمثل معادلة كرة ، وأوجد مركزها ونصف قطرها ؟

الحل : $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z - 19 = 0$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + (z^2 + 2z) = 19$$

باستخدام الإكمال لمربع كامل

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) = 19 + 1 + 4 + 1$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5^2$$

المعادلة تمثل كرة مركزها النقطة $(1, 2, -1)$ ونصف قطرها 5 .

تمارين (2.1)

(1) أحسب $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ و $2\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$ و $\|2\overrightarrow{a}\|$ و $\|-3\overrightarrow{b}\|$ فيما يلي :

(i) $\overrightarrow{a}=\langle -2,3,1\rangle$, $\overrightarrow{b}=\langle 4,-4,-2\rangle$ $\quad$ (ii) $\overrightarrow{a}=\langle 1,5,-2\rangle$, $\overrightarrow{b}=\langle -3,0,4\rangle$

(iii) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$ $\quad$ (iv) $\overrightarrow{a}=-3\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$

(2) (i) أحسب متجه الوحدة في نفس اتجاه المتجه $\overrightarrow{a}=\langle 2,-2,3\rangle$.

(ii) أحسب متجه الوحدة في عكس اتجاه المتجه $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$.

(3) (i) أوجد المتجه الذي له نفس اتجاه المتجه $\overrightarrow{a}=\langle 1,-1,1\rangle$ وطوله ثلاثة أمثال طول المتجه $\overrightarrow{a}$.

(ii) أوجد المتجه الذي له عكس اتجاه المتجه $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$ وطوله نصف طول المتجه $\overrightarrow{a}$.

(4) أوجد معادلة الكرة التي مركزها C ونصف قطرها r فيما يلي :

(i) $C(-1,3,4)$, $r=\dfrac{1}{3}$ $\quad$ (ii) $C(2,0,5)$, $r=\sqrt{7}$

(5) أوجد معادلة الكرة التي قطرها القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(1,3,-1)$ و $(7,3,1)$.

(6) أوجد نصف قطر ومركز الكرة المعطاة بالمعادلة :

(i) $x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z+9=0$

(ii) $x^2+y^2+z^2+8x-2z-19=0$

(7) صف المنطقة R في الفضاء الثلاثي فيما يلي :

(i) $R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$

(ii) $R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 9\le x^2+y^2+z^2\le 16\}$

(iii) $R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ |x|\le 1\ ,\ |y|\le 1\ ,\ |z|\le 1\}$

3.1 الضرب الداخلي للمتجهات

تعريف (الضرب الداخلي لمتجهين) :
إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في $\mathbf{V}_3$ نرمز للضرب الداخلي للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بالرمز $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ويعرف كالتالي : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

ملاحظة : حاصل الضرب الداخلي لمتجهين هو عدد حقيقي وليس متجه .

مثال : أحسب $\vec{a} \cdot \vec{b}$ فيما يلي :

(i) $\vec{a} = \langle 1, 3, -2 \rangle$, $\vec{b} = \langle -2, 4, -1 \rangle$

(ii) $\vec{a} = \langle 2, 5, -3 \rangle$, $\vec{b} = \langle -1, 4, 6 \rangle$

(iii) $\vec{a} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

الحل :

(i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle 1, 3, -2 \rangle \cdot \langle -2, 4, -1 \rangle = -2 + 12 + 2 = 12$

(ii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle 2, 5, -3 \rangle \cdot \langle -1, 4, 6 \rangle = -2 + 20 - 18 = 0$

(iii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - 2\vec{k}\right) \cdot \left(3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\right) = -3 + 2 - 2 = -3$

نظرية : إذا كان $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}_3$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(3) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(4) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \left(\lambda \vec{b}\right)$

(5) $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

البرهان : لتكن $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ و $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = \|\vec{a}\|^2$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(3) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot (\langle b_1, b_2, b_3 \rangle + \langle c_1, c_2, c_3 \rangle) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle$

$= a_1 (b_1 + c_1) + a_2 (b_2 + c_2) + a_3 (b_3 + c_3) = a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$

$$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

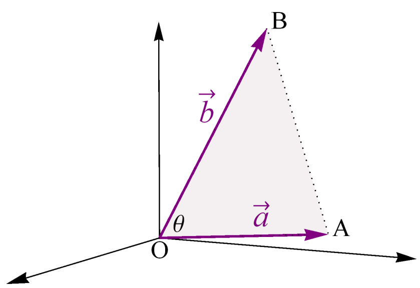
(4) $$\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = (\lambda\langle a_1,a_2,a_3\rangle)\cdot\langle b_1,b_2,b_3\rangle = \langle\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\rangle\cdot\langle b_1,b_2,b_3\rangle$$

$$= \lambda a_1b_1 + \lambda a_2b_2 + \lambda a_3b_3 = \lambda(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = \lambda a_1b_1 + \lambda a_2b_2 + \lambda a_3b_3 = a_1(\lambda b_1) + a_2(\lambda b_2) + a_3(\lambda b_3)$$

$$= \langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot\langle\lambda b_1,\lambda b_2,\lambda b_3\rangle = \langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot(\lambda\langle b_1,b_2,b_3\rangle) = \vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)$$

(5) $$\vec{0}\cdot\vec{a} = \langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot\langle 0,0,0\rangle = a_10 + a_20 + a_30 = 0+0+0 = 0$$



تعريف (الزاوية بين متجهين) :
ليكن $\vec{a} = \langle a_1,a_2,a_3\rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1,b_2,b_3\rangle$ متجهين مختلفين في $\mathbf{V}_3$
و $A = (a_1,a_2,a_3)$ و $B = (b_1,b_2,b_3)$ نقطتين في $\mathbb{R}^3$

(i) إذا كان $\vec{a} \neq \lambda\vec{b}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^*$ فإن الزاوية θ بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تعرف بأنها الزاوية $\widehat{AOB}$ في المثلث AOB .

(ii) إذا كان $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^*$ و كانت $\lambda > 0$ فإن $\theta = 0$ ، و إذا كانت $\lambda < 0$ فإن $\theta = \pi$.

ملاحظات :

(1) لاحظ أن $0 \le \theta \le \pi$

(2) إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن المتجهين متعامدان .

نظرية :
إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ فإن $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$
البرهان :
أولاً - إذا كان $\vec{a} \neq \lambda\vec{b}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^*$
بتطبيق قانون جيب التمام على المثلث AOB حيث $\theta = \widehat{AOB}$ (انظر الشكل السابق)

$$[d(A,B)]^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$
$$(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$
$$b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2a_3b_3 + a_3^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$
$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$
$$-2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

ثانياً - إذا كان $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^*$
إذا كانت $\lambda > 0$ فهذا يعني أن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لهما نفس الاتجاه وفي هذه الحالة $\theta = 0$ وبالتالي $\cos\theta = 1$

عندئذ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\lambda\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)=\lambda\|\vec{b}\|^2$

وأيضاً $\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta=\|\lambda\vec{b}\|\,\|\vec{b}\|\cos(0)=|\lambda|\|\vec{b}\|\,\|\vec{b}\|=\lambda\|\vec{b}\|^2$

أما إذا كانت $\lambda<0$ فهذا يعني أن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعاكسي الاتجاه وفي هذه الحالة $\theta=\pi$ وبالتالي $\cos\theta=-1$

عندئذ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\lambda\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)=\lambda\|\vec{b}\|^2$

وأيضاً $\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta=\|\lambda\vec{b}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\pi)=|\lambda|\|\vec{b}\|\,\|\vec{b}\|\,(-1)=-(-\lambda)\|\vec{b}\|^2=\lambda\|\vec{b}\|^2$

أي أن $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$

نتيجة :

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ فإن $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$

مثال : أحسب الزاوية بين المتجهين $\vec{a}=\langle 1,4,1\rangle$ و $\vec{b}=\langle -1,2,2\rangle$

الحل :

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}=\frac{(1)(-1)+(4)(2)+(1)(2)}{\sqrt{1+16+1}\,\sqrt{1+4+4}}=\frac{-1+8+2}{\sqrt{18}\,\sqrt{9}}=\frac{9}{3\left(3\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

نظرية :

المتجهان غير الصفريان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

البرهان :

أولاً - لنفرض أن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدان ، إذا كانت θ هي الزاوية بينهما فإن $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

وبالتالي $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,(0)=0$

ثانياً - لنفرض أن $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$0=\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta\implies\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta=0$

وبما أن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غير صفريين فإن $\|\vec{a}\|\neq 0$ و $\|\vec{b}\|\neq 0$

عندئذ $\cos\theta=0\implies\theta=\dfrac{\pi}{2}$ (لاحظ أن $0\le\theta\le\pi$)

وبالتالي المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدان

مثال : بين أن المتجهين $\vec{a}=\langle 2,4,-5\rangle$ و $\vec{b}=\langle -1,3,2\rangle$ متعامدان .

الحل : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\langle 2,4,-5\rangle\cdot\langle -1,3,2\rangle=(2)(-1)+(4)(3)+(-5)(2)=-2+12-10=0$

نظرية (متباينة كوشي - شوارتز) :

$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$

البرهان :

$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=\left|\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta\right|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,|\cos\theta|\le\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$

تذكر أن $-1\le\cos\theta\le 1\implies|\cos\theta|\le 1$

نظرية (متباينة المثلث) :

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

البرهان :

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

من متباينة كوشي - شوارتز $\vec{a}\cdot\vec{b} \le \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \le \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$

أي أن $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \le \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = \left(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|\right)^2$

وبالتالي $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

ملاحظة مهمة :

إذا كان $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ متجهين مختلفين في $\mathbb{R}^3$ ولهما نفس نقطة البداية وكانت θ هي الزاوية بين المتجهين ، وكان $\vec{a}\in\mathbf{V}_3$ متجهاً مكافئاً للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ و $\vec{b}\in\mathbf{V}_3$ متجهاً مكافئاً للمتجه $\overrightarrow{PR}$ فإن

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta = \|\overrightarrow{PQ}\|\,\|\overrightarrow{PR}\|\cos\theta$$

وبالتالي $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \vec{a}\cdot\vec{b}$

تعريف (مركبة متجه بالنسبة لمتجه آخر) :

إذا كان $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{V}_3$ وكان $\vec{b}\ne\vec{0}$ فإن مركبة المتجه $\vec{a}$ بالنسبة للمتجه $\vec{b}$ يرمز لها بالرمز $Comp_{\vec{b}}\,\vec{a}$ وتعرف كالتالي

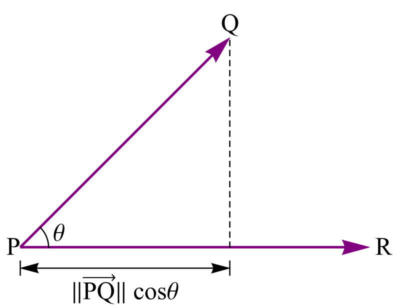
$$Comp_{\vec{b}}\,\vec{a} = \vec{a}\cdot\frac{1}{\|\vec{b}\|}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

ملاحظات :

(1) إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ فإن $Comp_{\vec{i}}\,\vec{a} = a_1$ و $Comp_{\vec{j}}\,\vec{a} = a_2$ و $Comp_{\vec{k}}\,\vec{a} = a_3$

(2) إذا كان $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ متجهين في $\mathbb{R}^3$ وكانت θ هي الزاوية بينهما فإن مركبة المتجه $\overrightarrow{PQ}$ بالنسبة للمتجه $\overrightarrow{PR}$ هي

$$Comp_{\overrightarrow{PR}}\overrightarrow{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\|\cos\theta = \overrightarrow{PQ}\cdot\frac{1}{\|\overrightarrow{PR}\|}\overrightarrow{PR} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PR}\|}$$



مثال : إذا كان $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ، أحسب $Comp_{\vec{b}}\,\vec{a}$ و $Comp_{\vec{a}}\,\vec{b}$

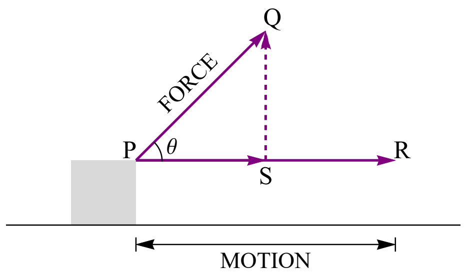
الحل :

$$Comp_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{(2)(-1)+(4)(3)+(-1)(2)}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{-2+12-2}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$Comp_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{(2)(-1)+(4)(3)+(-1)(2)}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{-2+12-2}{\sqrt{21}} = \frac{8}{\sqrt{21}}$$

تطبيق فيزيائي :

نعلم أن الشغل المبذول W الناتج عن دفع جسم ما بقوة ثابتة F لمسافة معينة d يحسب من العلاقة $W = F\,d$. لاحظ هنا أن اتجاه القوة (قوة الدفع) في نفس اتجاه حركة الجسم .

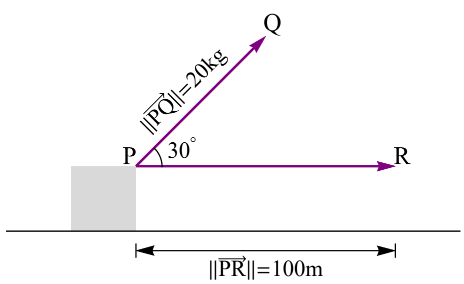


إذا كان المتجه $\overrightarrow{PQ}$ يمثل قوة جذب ثابتة تستخدم لسحب جسم ما على طول الخط من النقطة P إلى النقطة R (انظر الشكل)، لاحظ أن المتجه $\overrightarrow{PQ}$ يمثل جمع المتجهين $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{SQ}$ ، والمتجه $\overrightarrow{SQ}$ لايؤثر على الحركة الأفقية للجسم المسحوب ، أي أن الحركة على طول الخط من P إلى R ناتجة عن المتجه $\overrightarrow{PS}$ فقط ، وبالتالي الشغل المبذول الناتج عن سحب الجسم على طول الخط من P إلى R يعطى بالعلاقة

$$W = \|\overrightarrow{PS}\| \, \|\overrightarrow{PR}\| = \left(\|\overrightarrow{PQ}\| \cos\theta\right) \|\overrightarrow{PR}\| = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$$

تعريف (الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة) :
الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة $\overrightarrow{PQ}$ نقطة تطبيقها تتحرك على طول المتجه $\overrightarrow{PR}$ يعطى بالعلاقة $\mathrm{W} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$

مثال : إذا كان مقدار واتجاه قوة ثابتة يعطى بالمتجه $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ، أحسب الشغل المبذول الناتج عن القوة الثابتة التي نقطة تطبيقها تتحرك من النقطة $P(1,2,-1)$ إلى النقطة $R(5,3,1)$.
الحل :
القوة تمثل بالمتجه $\overrightarrow{PQ}$ ويكافئه المتجه $\vec{a} = \langle 3,1,4\rangle$
المتجه $\vec{b} \in \mathbf{V}_3$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PR}$ هو $\vec{b} = \langle 5-1, 3-2, 1-(-1)\rangle = \langle 4,1,2\rangle$
وبالتالي الشغل المبذول هو $W = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \langle 3,1,4\rangle \cdot \langle 4,1,2\rangle = 12 + 1 + 8 = 21$



مثال : يسحب شخص عربة على سطح مستوي وذلك بقوة تعادل $20kg$ على مقبض العربة، ومقبض العربة يصنع زاوية قدرها 30^o مع مستوى السطح ، أحسب الشغل المبذول لسحب العربة لمسافة $100m$.
الحل :
المتجه $\overrightarrow{PQ}$ يمثل القوة (مقداراً واتجاهاً) و $\|\overrightarrow{PQ}\| = 20$ تمثل مقدار القوة .
نقطة تطبيق القوة تتحرك على طول المتجه $\overrightarrow{PR}$ حيث $\|\overrightarrow{PR}\| = 100$
$\theta = 30^o = \frac{\pi}{6}$ تمثل الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$
الشغل المبذول هو

$$W = \|\overrightarrow{PQ}\| \, \|\overrightarrow{PR}\| \cos\theta = (20)(100)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1000\sqrt{3}\ kg.m$$

تمارين (3.1)

(1) إذا كان $\vec{a} = \langle -2,1,3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 4,0,1 \rangle$ و $\vec{c} = \langle 5,2,-7 \rangle$ أحسب مايلي :

$(i)\ \vec{a}\cdot\vec{b}$ $\quad (ii)\ \vec{b}\cdot\vec{c}$ $\quad (iii)\ \vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

$(iv)\ \vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)$ $\quad (v)\ Comp_{\vec{a}}\vec{b}$ $\quad (vi)\ Comp_{\vec{c}}\vec{a}$

(2) أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ في مايلي :

$(i)\ \vec{a} = \langle 1,-2,4 \rangle\ ,\ \vec{b} = \langle 2,5,-1 \rangle \quad (ii)\ \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{k}\ ,\ \vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

(3) أحسب الشغل المبذول الناتج عن القوة الثابتة التي مقدارها واتجاهها معطى بالمتجه $\vec{a}$ ونقطة تطبيقها تتحرك من النقطة P إلى النقطة Q فيما يلي :

(i) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}\ ,\ P(1,-1,3)\ ,\ Q(4,2,5)$

(ii) $\vec{a} = \langle -3,4,-1 \rangle\ ,\ P(0,1,-3)\ ,\ Q(5,7,1)$

(4) قوة ثابتة مقدارها 10 نيوتن ولها نفس اتجاه المتجه $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ، إذا كانت المسافة تقاس بالمتر فأحسب الشغل المبذول الناتج عن هذه القوة إذا كانت نقطة تطبيقها تتحرك على محور y من $(0,-2,0)$ إلى $(0,3,0)$.

(5) إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ أي متجهين فأثبت أن :

(i) $\|\vec{a}-\vec{b}\| \geq \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$

(ii) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) + \|\vec{b}\|^2$

(6) إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متجهين غير صفريين فأثبت أن

المتجهان $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$

(7) إذا كان $\vec{a} = \langle x,y \rangle$ متجهاً غير صفري ، حيث $x,y\in\mathbb{R}$ وكان $\vec{b} = \langle x\cos\theta - y\sin\theta\ ,\ x\sin\theta + y\cos\theta \rangle$ فأثبت أن الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هي θ .

(8) ليكن $\vec{a} = \langle a_1,a_2,a_3 \rangle$ متجهاً غير صفري ، إذا كانت α هي الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{i}$ و β هي الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{j}$ و γ هي الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{k}$ فأثبت أن :

(i) $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|}\ ,\ \cos\beta = \dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|}\ ,\ \cos\gamma = \dfrac{a_3}{\|\vec{a}\|}$

(ii) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

4.1 الضرب الخارجي (المتجهي) للمتجهات

يعرف الضرب الخارجي (المتجهي) لمتجهين في $\mathbf{V}_3$ بواسطة محدد مصفوفة من النوع 3×3 .

محدد المصفوفة من النوع 2×2 :

إذا كانت $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ فإن $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

محدد المصفوفة من النوع 3×3 :

إذا كانت $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ فإن

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

مثال : أحسب $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ الحل :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} (2) - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} (1) + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} (-1)$$
$$= 2(-9-(-8)) - (-3-0) + (-1)(4-0) = -2+3-4 = -3$$

تعريف (الضرب الخارجي (المتجهي) لمتجهين) :

إذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \ , \ \vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \in \mathbf{V}_3$ فإن حاصل الضرب الخارجي للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ يرمز له بالرمز $\vec{a} \times \vec{b}$ ويعرف كالتالي

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

مثال : إذا كان $\vec{a} = \langle 1, -5, 4 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 2, 3, -2 \rangle$ ، أحسب $\vec{a} \times \vec{b}$

الحل :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= (10-12)\vec{i} - (-2-8)\vec{j} + (3+10)\vec{k} = -2\vec{i} + 10\vec{j} + 13\vec{k}$$

ملاحظات :

(1) إذا كان $\vec{a}$ أي متجه في $\mathbf{V}_3$ فإن $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$

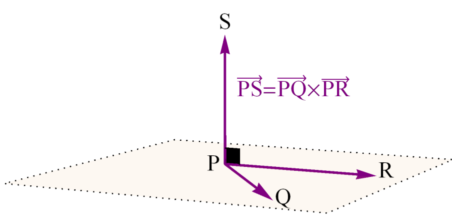
(2) إذا كان $\vec{a}$ أي متجه في $\mathbf{V}_3$ فإن $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

نظرية :
إذا كان $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}_3$ فإن المتجه $\vec{a} \times \vec{b}$ عمودي على كل من $\vec{a}$ و $\vec{b}$
البرهان : ليكن $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3$$
$$= a_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - a_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 - a_1 a_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1 = 0$$

أي أن المتجهين $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{a}$ متعامدان .
إثبات أن $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0$ بطريقة مشابهة .

المعنى الهندسي لحاصل الضرب الخارجي (المتجهي) لمتجهين :
إذا كان $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ متجهين في $\mathbb{R}^3$ ولهما نفس نقطة البداية ، وكان $\vec{a} \in \mathbf{V}_3$ هو المتجه المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ و $\vec{b} \in \mathbf{V}_3$ هو المتجه المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PR}$ فإن المتجه $\vec{a} \times \vec{b}$ هو المتجه المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PS}$ حيث $\overrightarrow{PS}$ هو المتجه العمودي على المستوى المار بالنقاط P و Q و R .
وفي هذه الحالة نكتب $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$



نظرية :
إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متجهين غير صفريين في $\mathbf{V}_3$ وكانت θ هي الزاوية بينهما فإن $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \sin\theta$
البرهان :

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$
$$= a_2^2 b_3^2 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2$$
$$= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$
$$= \left(\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|\right)^2 - \left(\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\theta\right)^2 = \left(\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|\right)^2 - \left(\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|\right)^2 \cos^2\theta$$
$$= \left(\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|\right)^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) = \left(\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|\right)^2 \sin^2\theta$$

وبالتالي $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, |\sin\theta| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \sin\theta$
تذكر أن $0 \le \theta \le \pi$ وبالتالي $\sin\theta \ge 0$ وعندئذ $|\sin\theta| = \sin\theta$

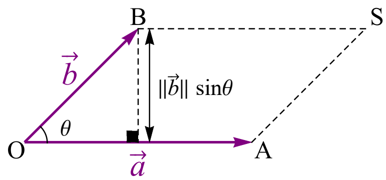
نتيجة :
إذا كان $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}_3$ متجهين غير صفريين فإن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيان إذا وفقط إذا كان $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 0$

المعنى الهندسي للمقدار $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$:

ليكن $\vec{a}\in\mathbf{V}_3$ هو المتجه الواصل بين النقطتين O و A و ليكن $\vec{b}\in\mathbf{V}_3$ هو المتجه الواصل بين النقطتين O و B (انظر الشكل) ، الشكل الرباعي $OASB$ هو متوازي أضلاع ومساحته تساوي حاصل ضرب طول القاعدة في الارتفاع ، قاعدة متوازي الأضلاع طولها $\|\vec{a}\|$ والارتفاع هو $\|\vec{b}\|\sin\theta$

وبالتالي مساحة متوازي الأضلاع هي $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\theta$

أي أن $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعيه المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$



مثال : أحسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $P(1,1,1)$ و $Q(5,1,2)$ و $R(2,2,3)$

الحل :

ليكن $\vec{a}$ هو متجه الموضع المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ عندئذ $\vec{a}=\langle 4,0,1\rangle$

ليكن $\vec{b}$ هو متجه الموضع المكافئ للمتجه $\overrightarrow{PR}$ عندئذ $\vec{b}=\langle 1,1,2\rangle$

مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط P و Q و R تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعيه المتجهين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$

مساحة المثلث هي

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|=\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}4&1\\1&2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}4&0\\1&1\end{vmatrix}^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(0-1)^2+(8-1)^2+(4-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{1+49+16}}{2}=\frac{\sqrt{66}}{2}$$

ملاحظات مهمة :

(1) $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$

(2)
$$\begin{array}{lll}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & , \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & , \quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} & , \quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} & , \quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\end{array}$$

(3) عملية حاصل الضرب الخارجي (المتجهي) ليست إبدالية

مثلاً $\vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}\neq\vec{j}\times\vec{i}=-k$

(4) عملية حاصل الضرب الخارجي (المتجهي) ليست تجميعية

مثلاً $\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)\times\vec{j}=\vec{0}\times\vec{j}=\vec{0}$

بينما $\vec{i}\times\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)=\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

نظرية :

إذا كان $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{V}_3$ و $m\in\mathbb{R}$ فإن

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2) $\left(m\vec{a}\right)\times\vec{b}=m\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(m\vec{b}\right)$

(3) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$

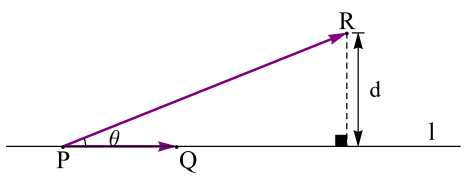
(4) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \quad (5)$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} \quad (6)$$

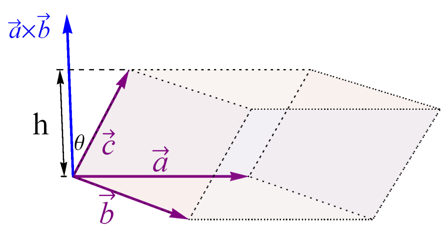
البرهان :
يمكن برهان جميع الفقرات باستخدام تعريف حصل الضرب الخارجي (المتجهي)
البرهان متروك للطالب .

تطبيقات :
أولاً - بعد خط مستقيم عن نقطة خارجة عنه :
ليكن l خطاً مستقيماً ولتكن R نقطة خارجة عنه . نختار نقطتين P و Q تقعان على المستقيم l ولتكن θ هي الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ (انظر الشكل) . بعد المستقم l عن النقطة R هو d وفي هذه الحالة



$$d=\|\overrightarrow{PR}\|\ \sin\theta=\frac{\|\overrightarrow{PR}\|\ \|\overrightarrow{PQ}\|\sin\theta}{\|\overrightarrow{PQ}\|}=\frac{\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

ثانيا - حجم الصندوق المائل :



الصندوق المائل شكل له ثمانية رؤوس و ستة أوجه ، كل وجهين متقابلين هما متوازيا أضلاع .
الصندوق المائل المنشأ بواسطة المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مساحة قاعدته هي $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ وارتفاعه $h=\|\vec{c}\|\,|\cos\theta|$
وبالتالي حجمه $V=\|\vec{a}\times\vec{b}\|\ \|\vec{c}\|\,|\cos\theta|=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$

ملاحظة :
إذا كان $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ و $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ و $\vec{c}=\langle c_1,c_2,c_3\rangle$ فإن حجم الصندوق المائل المنشأ بالمتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هو

$$V=\left|\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3\right|=\left|\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\right|$$

مثال : أوجد حجم الصندوق المائل المنشأ بالمتجهات $\vec{a}=\langle 4,0,1\rangle$ و $\vec{b}=\langle 1,5,0\rangle$ و $\vec{c}=\langle 0,2,3\rangle$
الحل :

$$V=\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix}(0)-\begin{vmatrix} 4 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}(2)+\begin{vmatrix} 4 & 0\\ 1 & 5\end{vmatrix}(3)\right|$$

$$=|0-2(0-1)+3(20-0)|=|0+2+60|=62$$

تمارين (4.1)

(1) أحسب $\vec{a}\times\vec{b}$ في مايلي :

$$(i)\ \vec{a}=\langle -3,2,2\rangle\ ,\ \vec{b}=\langle 1,4,-1\rangle \qquad (ii)\ \vec{a}=\langle 5,1,0\rangle\ ,\ \vec{b}=\langle 3,1,-2\rangle$$
$$(iii)\ \vec{a}=-\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}\ ,\ \vec{b}=3\vec{i}+5\vec{k} \qquad (iv)\ \vec{a}=\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k}\ ,\ \vec{b}=-\vec{j}+4\vec{k}$$

(2) إذا كان $\vec{a}=\langle -2,3,0\rangle$ و $\vec{b}=\langle -1,-4,2\rangle$ و $\vec{c}=\langle 0,5,-1\rangle$ ، أحسب $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ و $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

(3) أحسب المتجه العمودي للمستوي المحدد بالنقاط P و Q و R و مساحة المثلث الذي رؤوسه هذه النقاط فيما يلي :

$$(i)\ P(-3,0,5)\ ,\ Q(2,1,4)\ ,\ R(3,2,-2) \qquad (ii)\ P(2,0,0)\ ,\ Q(0,5,0)\ ,\ R(0,0,3)$$

(4) (i) إذا كانت $P(1,2,1)$ و $Q(0,3,4)$ و $R(3,2,-1)$ أحسب حجم الصندوق المائل الذي أضلاعه هي OP و OQ و OR .

(ii) (i) إذا كانت $A(2,1,0)$ و $B(3,-1,4)$ و $C(4,0,1)$ و $D(5,2,0)$ أحسب حجم الصندوق المائل الذي أضلاعه هي AB و AC و AD .

(5) إذا كان $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{V}_3$ فأثبت أن $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

(6) إذا كان $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{V}_3$ متجهين غير صفريين فأثبت أن $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$

(7) إذا كانت $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ثلاث متجهات مختلفة لها نفس نقطة البداية فأثبت أن $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$ إذا وفقط إذا كانت هذه المتجهات الثلاثة تقع في نفس المستوي .

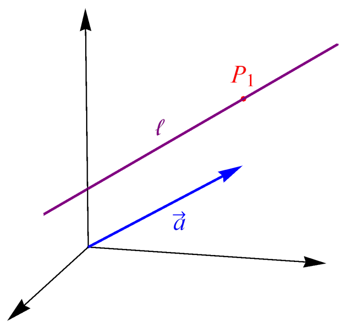
(8) إذا كان $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{V}_3$ متجهات غير صفرية وكان $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ فأثبت أن $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

(9) إذا كانت $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ و $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ و $\vec{c}=\langle c_1,c_2,c_3\rangle$ فأثبت أن :

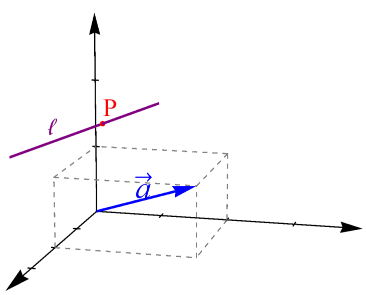
$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

5.1 المستقيمات والمستويات في $\mathbb{R}^3$

يركز هذا الفصل على دراسة ووصف المستقيمات والمستويات في $\mathbb{R}^3$ باستخدام المتجهات .

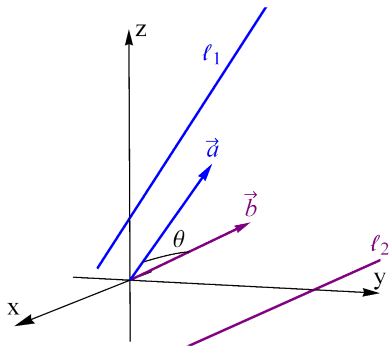


نظرية (المعادلات الوسيطية للخط المستقيم) :
المعادلات الوسيطية للخط المستقيم ℓ المار بالنقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$
ويوازي المتجه $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ هي
$x = x_1 + ta_1 \;,\; y = y_1 + ta_2 \;,\; z = z_1 + ta_3$ حيث $t \in \mathbb{R}^*$
البرهان :
لتكن $P(x, y, z)$ نقطة تقع على الخط المستقيم ℓ المار بالنقطة P_1 ويوازي المتجه $\vec{a}$ عندئذ متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{P_1P}$ يوازي المتجه $\vec{a}$ ، وبالتالي يوجد $t \in \mathbb{R}^*$ بحيث يكون $\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle = t\langle a_1, a_2, a_3\rangle$
من تساوي المتجهين نحصل على
$x - x_1 = ta_1 \;,\; y - y_1 = ta_2 \;,\; z - z_1 = ta_3$
ومن ثم $x = x_1 + ta_1 \;,\; y = y_1 + ta_2 \;,\; z = z_1 + ta_3$



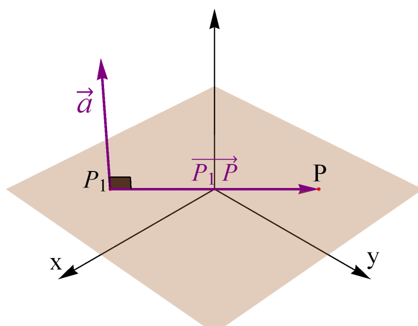
مثال :
(1) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم ℓ المار بالنقطة $P(3,1,2)$ ويوازي المتجه $\vec{a} = \langle 2,2,1\rangle$
(2) أرسم الخط المستقيم ℓ ومتجه الموضع $\vec{a}$
الحل :
(1) المعادلات الوسيطية للخط المستقيم ℓ هي
$x - 3 = 2t \;,\; y - 1 = 2t \;,\; z - 2 = t$ حيث $t \in \mathbb{R}^*$
وبالتالي $x = 3 + 2t \;,\; y = 1 + 2t \;,\; z = 2 + t$
(2) أنظر الشكل المقابل .

مثال : أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم ℓ المار بالنقطتين $P_1(3,-5,4)$ و $P_2(-1,-2,-6)$
الحل :
المتجه $\vec{a} \in \mathbf{V}_3$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ هو $\vec{a} = \langle -4,3,-10\rangle$
المعادلات الوسيطية للخط المستقيم ℓ المار بالنقطة $P_1(3,-5,4)$ ويوازي المتجه $\vec{a} = \langle -4,3,-10\rangle$ هي
$x = 3 - 4t \;,\; y = -5 + 3t \;,\; z = 4 - 10t$ حيث $t \in \mathbb{R}^*$



تعريف (الزاويتين بين خطين مستقيمين مختلفين)
إذا كان ℓ_1 و ℓ_2 خطين مستقيمين موازيين للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ على الترتيب فإن الزاويتين بين ℓ_1 و ℓ_2 هما θ و $\pi-\theta$ حيث θ هي الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$.
نقول أن الخطين ℓ_1 و ℓ_2 متعامدان إذا كان المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدين ، أي أن $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
نقول أن الخطين ℓ_1 و ℓ_2 متوازيان إذا كان المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيين ، أي أن $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

تعريف (المتجه الناظمي لمستوي) :
نقول أن المتجه $\vec{a}$ هو المتجه الناظمي للمستوي Π إذا كان المتجه $\vec{a}$ يتعامد مع أي متجه يقع في المستوي Π .



نظرية (معادلة المستوي بمعرفة متجهه الناظمي ونقطة تقع عليه) :
معادلة المستوي الذي متجهه الناظمي $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ ويمر بالنقطة $P_1(x_1,y_1,z_1)$ هي $a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0$
البرهان :
لتكن $P(x,y,z)$ أي نقطة تقع في المستوي Π الذي متجهه الناظمي $\vec{a}$ ويمر بالنقطة P_1 .
عندئذ المتجه $\overrightarrow{P_1P}$ يقع في المستوي Π وبالتالي يتعامد مع المتجه الناظمي $\vec{a}$ ، إذا كان $\overrightarrow{OA}$ هو متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{P_1P}$ فإن
$\overrightarrow{OA}=\langle x-x_1,y-y_1,z-z_1\rangle$
وبما أن المتجهين $\vec{a}$ و $\overrightarrow{OA}$ متعامدان فإن $\vec{a}\cdot\overrightarrow{OA}=0$
أي أن $a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0$

مثال : أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $(-3,1,4)$ ومتجهه الناظمي $\vec{a}=\langle 2,-1,1\rangle$
الحل : معادلة المستوي هي
$$2(x-(-3))+(-1)(y-1)+1(z-4)=0$$
$$2x+6-y+1+z-4=0 \implies 2x-y+z+3=0$$

مثال : أوجد معادلة المستوي المار بالنقاط الثلاث $P(1,-2,1)$ و $Q(-1,3,2)$ و $R(1,4,-2)$
الحل :
ليكن $\vec{a}$ هو متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ عندئذ $\vec{a}=\langle -2,5,1\rangle$
ليكن $\vec{b}$ هو متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{PR}$ عندئذ $\vec{b}=\langle 0,6,-3\rangle$
المتجه $\vec{a}\times\vec{b}$ هو المتجه الناظمي للمستوي المار بالنقاط P و Q و R .

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 5 & 1\\ 0 & 6 & -3\end{vmatrix}=-21\vec{i}-6\vec{j}-12\vec{k}$$

إذاً معادلة المستوي الذي متجهه الناظمي $\vec{a}\times\vec{b}=\langle -21,-6,-12\rangle$ ويمر بالنقطة $P(1,-2,1)$ هي

$$(-21)(x-1)+(-6)(y+2)+(-12)(z-1)=0$$

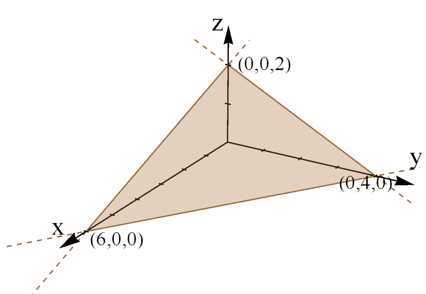
$$-21x-6y-12z+21-12+12=0 \implies -21x-6y-12z+21=0$$

نتيجة :
المعادلة $ax+by+cz+d=0$ تمثل مستوي في $\mathbb{R}^3$ متجهه الناظمي هو $\langle a,b,c\rangle$

مثال : أرسم الشكل الذي تمثله المعادلة $2x+3y+6z=12$
الحل :
في البداية نحدد ثلاث نقاط مختلفة تقع في المستوي وهي في الواقع نقاط تقاطع المستوي مع المحاور الإحداثية .
(1) نقطة تقاطع المستوي مع محور x : نضع $y=z=0$ فنحصل على $2x=12$ وبالتالي $x=6$
أي أن النقطة $(6,0,0)$ تقع في المستوي الذي معادلته $2x+3y+6z=12$
(2) نقطة تقاطع المستوي مع محور y : نضع $x=z=0$ فنحصل على $3y=12$ وبالتالي $y=4$
أي أن النقطة $(0,4,0)$ تقع في المستوي الذي معادلته $2x+3y+6z=12$
(3) نقطة تقاطع المستوي مع محور z : نضع $x=y=0$ فنحصل على $6z=12$ وبالتالي $z=2$
أي أن النقطة $(0,0,2)$ تقع في المستوي الذي معادلته $2x+3y+6z=12$

نحدد أثر المستوي المطلوب في المستويات xy و xz و yz كالتالي :
(1) أثر المستوي $2x+3y+6z=12$ في المستوي xy : نضع $z=0$ فنحصل على $2x+3y=12$
الخط المستقيم $2x+3y=12$ والمار بالنقطتين $(6,0,0)$ و $(0,4,0)$ يقع في المستوي المطلوب.

(2) أثر المستوي $2x+3y+6z=12$ في المستوي xz :
نضع $y=0$ فنحصل على $2x+6z=12$
الخط المستقيم $2x+6z=12$ والمار بالنقطتين $(6,0,0)$ و $(0,0,2)$ يقع في المستوي المطلوب.
(3) أثر المستوي $2x+3y+6z=12$ في المستوي yz :
نضع $x=0$ فنحصل على $3y+6z=12$
الخط المستقيم $3y+6z=12$ والمار بالنقطتين $(0,4,0)$ و $(0,0,2)$ يقع في المستوي المطلوب.



نحدد نقاط تقاطع المحاور الإحداثية مع المستوي المطلوب ونرسم المستقيمات التي تمثل أثر المستوي المطلوب مع المستويات xy و xz و yz نظلل المنطقة المثلثة والتي تحدد جزءاً من المستوي المطلوب (انظر الشكل) .

تعريف :
إذا كان Π_1 مستوي متجهه الناظمي $\overrightarrow{a}$ و Π_2 مستوي آخر متجهه الناظمي $\overrightarrow{b}$ فإن :

(1) المستويين Π_1 و Π_2 متعامدان إذا كان المتجهان $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ متعامدين.

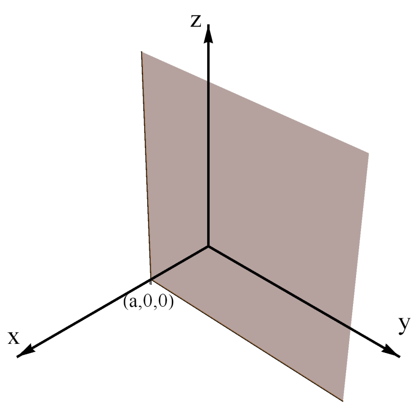
(2) المستويين Π_1 و Π_2 متوازيان إذا كان المتجهان $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ متوازيين.

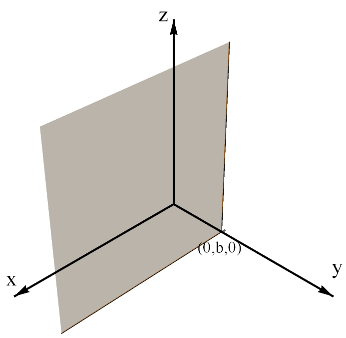
مثال : بين أن المستويين اللذين معادلتيهما $-3x+y+2z+5=0$ و $6x-2y-4z-1=0$ متوازيان .
الحل :
$-3x+y+2z+5=0$ يمثل مستو متجهه الناظمي $\overrightarrow{a}=\langle -3,1,2\rangle$
$6x-2y-4z-1=0$ يمثل مستو متجهه الناظمي $\overrightarrow{b}=\langle 6,-2,-4\rangle$
لاحظ أن $\overrightarrow{b}=-2\overrightarrow{a}$ أي أن المتجهين $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ متوازيان ، وبالتالي المستويان متوازيان.

مثال : أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $P(-2,1,4)$ ويوازي المستوي الذي معادلته $2x+5y-z+7=0$
الحل :
لاحظ أن المستوي الذي معادلته $2x+5y-z+7=0$ متجهه الناظمي هو $\overrightarrow{a}=\langle 2,5,-1\rangle$
وبما أن المستوي المطلوب يوازي المستوي $2x+5y-z+7=0$ إذاً متجهه الناظمي هو $\overrightarrow{b}=\lambda\overrightarrow{a}=\langle 2\lambda,5\lambda,-\lambda\rangle$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$
وبالتالي معادلة المستوي المطلوب هي $2\lambda x+5\lambda y-\lambda z+d=0$
بما أن المستوي المطلوب يمر بالنقطة $P(-2,1,4)$ فإنها تحقق معادلة المستوي وبالتالي $-4\lambda+5\lambda-4\lambda+d=0$
أي أن $d=4\lambda-5\lambda+4\lambda=3\lambda$
إذاً معادلة المستوي المطلوب هي $2\lambda x+5\lambda y-\lambda z+3\lambda=0$
$$\lambda\left(2x+5y-z+3\right)=0 \implies 2x+5y-z+3=0$$

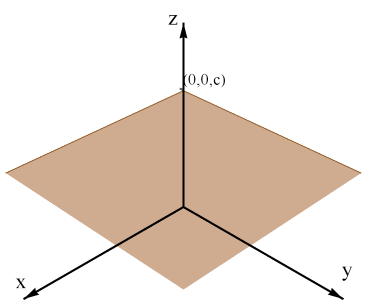
ملاحظات :

(1) المعادلة $x=a$ حيث $a\in\mathbb{R}$:
تمثل مستو يوازي المستوي yz ويمر بالنقطة $(a,0,0)$
متجهه الناظمي هو $\overrightarrow{i}=\langle 1,0,0\rangle$
وبالتالي يتعامد على المستويين xy و xz



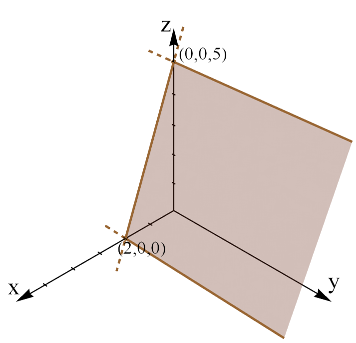


(2) المعادلة $y = b$ حيث $b \in \mathbb{R}$:
تمثل مستو يوازي المستوي xz ويمر بالنقطة $(0, b, 0)$
متجهه الناظمي هو $\overrightarrow{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$
وبالتالي يتعامد على المستويين xy و yz



(3) المعادلة $z = c$ حيث $c \in \mathbb{R}$:
تمثل مستو يوازي المستوي xy ويمر بالنقطة $(0, 0, c)$
متجهه الناظمي هو $\overrightarrow{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$
وبالتالي يتعامد على المستويين xz و yz

(4) المعادلة $by + cz + d = 0$ تمثل مستو متجهه الناظمي هو $\overrightarrow{a} = \langle 0, b, c \rangle$ وبالتالي يتعامد على المستوي yz
لاحظ أن $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i} = 0$
(5) المعادلة $ax + cz + d = 0$ تمثل مستو متجهه الناظمي هو $\overrightarrow{b} = \langle a, 0, c \rangle$ وبالتالي يتعامد على المستوي xz
لاحظ أن $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{j} = 0$
(6) المعادلة $ax + by + d = 0$ تمثل مستو متجهه الناظمي هو $\overrightarrow{c} = \langle a, b, 0 \rangle$ وبالتالي يتعامد على المستوي xy
لاحظ أن $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{k} = 0$



مثال : أرسم المستوي الذي معادلته $5x + 2z - 10 = 0$
الحل : المستوي المطلوب يتعامد على المستوي xz .
المستوي يتقاطع مع محور x في النقطة $(2, 0, 0)$.
ويتقاطع مع محور z في النقطة $(0, 0, 5)$
أثر المستوي المطلوب في المستوي xy هو خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0, 0)$
أثر المستوي المطلوب في المستوي yz هو خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(0, 0, 5)$
الشكل المقابل يوضح المستوي المطلوب في الثمن الأول

الصيغة التناظرية للخط المستقيم :

المعادلات الوسيطية للخط المستقيم ℓ المار بالنقطة $P_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ ويوازي المتجه $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ هي

$x = x_1 + ta_1 \;\; , \;\; y = y_1 + ta_2 \;\; , \;\; z = z_1 + ta_3$ حيث $t \in \mathbb{R}^*$

إذا كانت a_1, a_2, a_3 جميعها ليست أصفاراً فإن

$$t = \frac{x - x_1}{a_1} \;\; , \;\; t = \frac{y - y_1}{a_2} \;\; , \;\; t = \frac{z - z_1}{a_3}$$

وبالتالي $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2} = \dfrac{z - z_1}{a_3}$

تسمى الصيغة السابقة بالصيغة التناظرية للخط المستقيم ℓ المار بالنقطة $P_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ ويوازي المتجه $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$

ملاحظات :

(1) الصيغة التناظرية للمستقيم ℓ ليست وحيدة فقد تختلف باختيار نقطة أخرى واقعة عليه غير P_1 وكذلك اختيار أي متجه آخر موازي للمتجه $\vec{a}$

(2) بكتابة الصيغة التناظرية للخط المستقيم ℓ على الشكل $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2}$ و $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{z - z_1}{a_3}$ فإن المستقيم ℓ يمكن وصفه بتقاطع مستويين أحدهما متعامد على المستوي xy والآخر متعامد على المستوي xz

(3) إذا كانت $a_3 = 0$ و $a_1, a_2 \neq 0$ فإن الصيغة التناظرية للخط المستقيم ℓ هي $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2}$ و $z = z_1$ وفي هذه الحالة أيضاً يمكن وصف المستقيم ℓ كتقاطع مستويين مختلفين .

مثال : أوجد الصيغة التناظرية للخط المستقيم ℓ المار بالنقطتين $P_1(2, 1, 6)$ و $P_2(5, -5, 2)$

الحل :

متجه الموضع $\vec{a}$ المكافئ للمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ هو $\vec{a} = \langle 3, -6, -4\rangle$

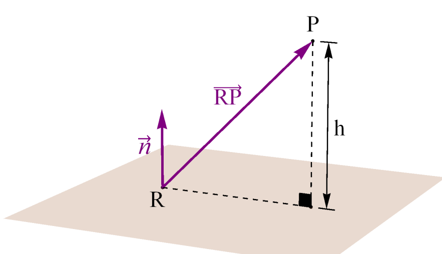
المعادلات الوسيطية للمستقيم ℓ الموازي للمتجه $\vec{a}$ والمار بالنقطة P_1 هي

$x = 2 + 3t \;\; , \;\; y = 1 - 6t \;\; , \;\; z = 6 - 4t$ حيث $t \in \mathbb{R}^*$

وبالتالي الصيغة التناظرية للمستقيم ℓ هي $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{z - 6}{-4} \;\; , \;\; \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y - 1}{-6}$

تطبيقات هندسية :

أولاً - المسافة بين مستو ونقطة خارجة عنه :



ليكن Π هو المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ ولتكن $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ نقطة خارج المستوي Π ، وليكن $\vec{n}$ هو متجه الوحدة الناظمي للمستوي Π ، عندئذ $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\langle a, b, c\rangle$

ولتكن $R\left(x_1, y_1, z_1\right)$ نقطة تقع في المستوي Π (انظر الشكل)

المسافة بين النقطة $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ و المستوي Π هي

$$\begin{aligned} h = \left|Comp_{\vec{n}}\overrightarrow{RP}\right| = \left|\overrightarrow{RP}\cdot\vec{n}\right| &= \left|\left\langle\left(x_0 - x_1\right), \left(y_0 - y_1\right), \left(z_0 - z_1\right)\right\rangle \cdot \frac{\langle a, b, c\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| \\ &= \left|\frac{a\left(x_0 - x_1\right) + b\left(y_0 - y_1\right) + c\left(z_0 - z_1\right)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - ax_1 - by_1 - cz_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| \end{aligned}$$

بما أن النقطة R تقع في المستوي Π إذاً فهي تحقق معادلته أي أن $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ وبالتالي

$$h = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

مثال : أحسب بعد النقطة $P(-2,5,4)$ عن المستوي الذي معادلته $2x+3y-z+5=0$

الحل :

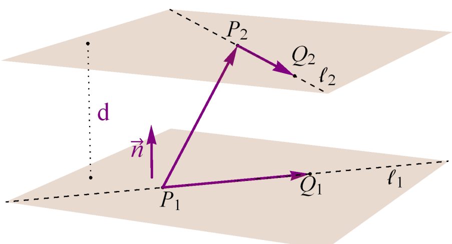
من معادلة المستوي نستنتج أن $a=2\ ,\ b=3\ ,\ c=-1\ ,\ d=5$

$$h=\left|\frac{2(-2)+3(5)+(-1)4+5}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}\right|=\left|\frac{-4+15-4+5}{\sqrt{4+9+1}}\right|=\frac{12}{\sqrt{14}}$$

ثانياً - المسافة بين خطين مستقيمين متخالفين :

الخطان المستقيمان المتخالفان هما خطان لا يتوازيان ولا يتقاطعان .

ليكن ℓ_1 و ℓ_2 خطين متخالفين ، ولتكن P_1 و Q_1 نقطتين واقعتين على ℓ_1 و لتكن P_2 و Q_2 نقطتين واقعتين على ℓ_2 .



لاحظ أن المتجه $\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_2Q_2}$ يتعامد على المتجهين $\overrightarrow{P_1Q_1}$ و $\overrightarrow{P_2Q_2}$ ، بوضع $\vec{n}=\dfrac{\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_2Q_2}}{\|\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_2Q_2}\|}$ عندئذ $\vec{n}$ هو متجه الوحدة المتعامد على كل من $\overrightarrow{P_1Q_1}$ و $\overrightarrow{P_2Q_2}$.

ليكن Π_1 هو المستوي الذي متجهه الناظمي $\vec{n}$ ويمر بالنقطة P_1 وليكن Π_2 هو المستوي الذي متجهه الناظمي $\vec{n}$ ويمر بالنقطة P_2 ، عندئذ المستويان Π_1 و Π_2 متوازيان ويحويان المستقيمين ℓ_1 و ℓ_2 على الترتيب (انظر الشكل) .

المسافة بين المستقيمين ℓ_1 و ℓ_2 تساوي المسافة بين النقطة P_2 والمستوي Π_1 ، أي أن

$$d=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_2Q_2}}{\|\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_2Q_2}\|}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\left(\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_2Q_2}\right)\right|}{\|\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_2Q_2}\|}$$

تمارين (5.1)

(1) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطتين P_1 و P_2 في مايلي :

$$(i)\ \ P_1(1,0,3)\ ,P_2(-2,2,4)\quad ,\quad (ii)\ \ P_1(-3,1,5)\ \ ,\ \ P_2(2,-4,0)$$

(2) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطة P ويوازي المتجه $\overrightarrow{a}$ في مايلي :

$$(i)\ P(2,0,-1)\ \ ,\ \ \overrightarrow{a}=\langle 3,-1,\frac{1}{2}\rangle \qquad (ii)\ P(-1,-1,3)\ \ ,\ \ \overrightarrow{a}=\langle 2,0,2\rangle$$
$$(iii)\ P(5,6,-1)\ \ ,\ \ \overrightarrow{a}=-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j} \qquad (iv)\ P(0,-3,2)\ \ ,\ \ \overrightarrow{a}=\overrightarrow{k}$$

(3) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطة $P(3,3,-1)$ ويوازي المستقيم الذي معادلاته الوسيطية هي $x=2+t$ و $y=-1+4t$ و $z=-2t$.

(4) أوجد معادلة المستوي الذي :

(i) يمر بالنقطة $P(3,7,-2)$ ويوازي المستوي xz .

(ii) يمر بالنقطة $P(5,0,-4)$ ومتجهه الناظمي هو $\overrightarrow{k}$.

(iii) يمر بالنقطة $P(2,2,-1)$ ومتجهه الناظمي هو $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{k}$.

(iv) يمر بالنقطة $P(2,0,-1)$ ومتجهه الناظمي هو $\overrightarrow{OP}$.

(v) يمر بنقطة الأصل ويوازي المستوي $3x-4y+z=6$.

(vi) يمر بالنقاط $P(1,0,2)$ و $Q(3,-2,0)$ و $R(-2,1,5)$.

(5) أرسم المستويات التالية :

$$(i)\ 3x-y+2z=5 \qquad (ii)\ -x+5y-3z=11$$
$$(iii)\ -2x+3z=4 \qquad (iv)\ 4y-z=3$$

(6) أوجد الصيغة التناظرية للخط المستقيم المار بالنقطتين :

$$(i)\ P_1(2,-1,3)\ ,P_2(4,4,4) \qquad (ii)\ P_1(5,0,-1)\ ,P_2(-2,-2,3)$$
$$(iii)\ P_1(1,0,-1)\ ,P_2(0,3,-6) \qquad (iv)\ P_1(2,4,1)\ ,P_2(-3,-5,-7)$$

(7) أوجد المسافة بين النقطة والمستوي في مايلي :

$$(i)\ P(1,-2,0)\ ,\ 2x+3y+z=5\ \ ,\ \ (ii)\ P(-4,1,3)\ ,\ -x+y+5z=12$$

(8) بين أن المستويين متوازيان وأحسب المسافة بينهما في مايلي :

(i) $4x+8y-16z=5 \;,\; 3x+6y-12z=2$

(ii) $-5x-10y+20z=12 \;,\; 2x+4y-8z=6$

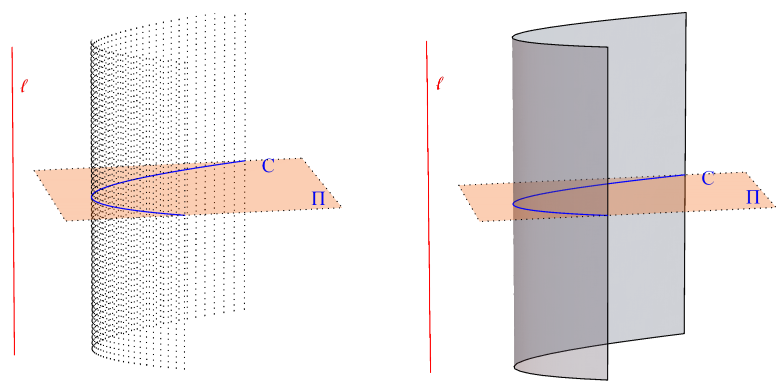
(9) أذا كانت المعادلات الوسيطية للخط المستقيم ℓ هي $x=2t+1$ و $y=-t-2$ و $z=t+3$ ، أوجد معادلة المستوي الذي يحوي المستقيم ℓ والنقطة $P(5,5,5)$.

(10) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين $x+2y+4z=5$ و $3x+y-5z=10$.

(11) استخدم حاصل الضرب الداخلي لحساب المسافة بين النقطة $A(2,-6,1)$ والمستقيم المار بالنقطتين $B(3,4,-2)$ و $C(7,-1,5)$.

6.1 السطوح في الفضاء الثلاثي

أولاً - الأسطوانة في الفضاء الثلاثي :
تعريف (الأسطوانة) :
ليكن C منحنى يقع في المستوي Π وليكن ℓ مستقيماً لا يقع في مستو موازٍ للمستوي Π ، نسمي مجموعة النقاط الواقعة على كل مستقيم يوازي المستقيم ℓ ويمر بالمنحنى C بالأسطوانة المولدة بالمنحنى C .



هذا الدرس يركز على دراسة الحالات الثلاث التالية :

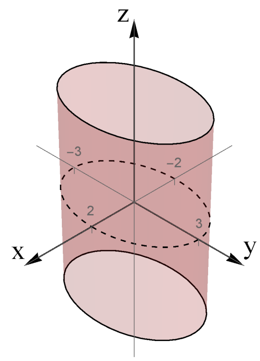
(1) المنحنى C يقع في المستوي xy و ℓ هي محور z .

(2) المنحنى C يقع في المستوي xz و ℓ هي محور y .

(3) المنحنى C يقع في المستوي yz و ℓ هي محور x .

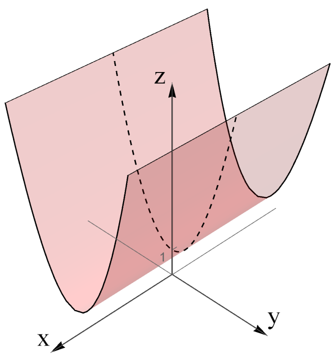
في جميع الحالات نحصل على أسطوانة قائمة قاعدتها تحدد بواسطة المنحنى C .

مثال : أرسم السطح الذي معادلته $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ في الفضاء الثلاثي .
الحل :



لاحظ أن المنحنى C يقع في المستوى xy و يمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل و محوره الأكبر يقع على محور y وطوله 6 بينما محوره الأصغر يقع على محور x وطوله يساوي 4 .
ℓ في هذه الحالة هي محور z .
السطح الناتج هو أسطوانة قائمة قاعدتها قطع ناقص .
الشكل المقابل يمثل رسم السطح الذي معادلته $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ في الفضاء الثلاثي .

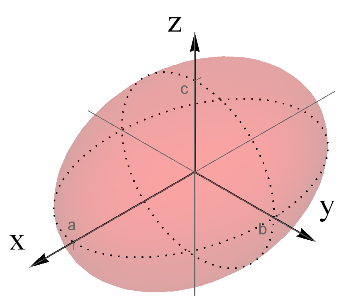
مثال : أرسم السطح الذي معادلته $z=y^2+1$ في الفضاء الثلاثي .
الحل :



لاحظ أن المنحنى C يقع في المستوي yz ويمثل قطع مكافئ رأسه النقطة $(0,0,1)$ وفتحته للأعلى .
ℓ في هذه الحالة هي محور x .
السطح الناتج هو أسطوانة قائمة قاعدتها قطع مكافئ .
الشكل المقابل يمثل رسم السطح الذي معادلته $z=y^2+1$ في الفضاء الثلاثي .

ثانياً - السطوح التربيعية :
هذا الدرس يركز على دراسة السطح الذي تمثله المعادلة التربيعية التالية :
$Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$ حيث $A,B,C,J\in\mathbb{R}$
وبشكل خاص الأشكال الستة التالي :

(1) السطح الناقصي

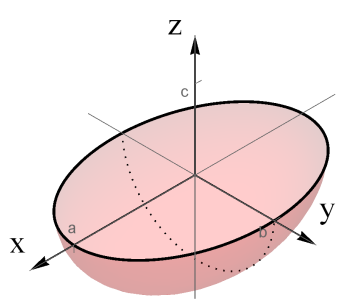


المعادلة العامة للسطح الناقصي هي

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ حيث $a, b, c > 0$

الشكل المقابل يمثل رسم السطح الناقصي

ولمعرفة رسم السطح الناقصي يجب معرفة أثر السطح في المستويات الإحداثية .

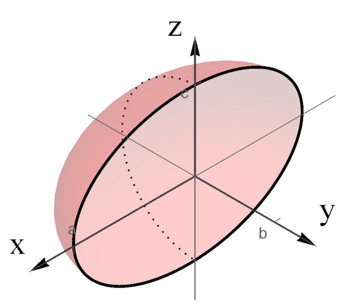


أثر السطح الناقصي في المستوي xy :

بوضع $z = 0$ نحصل على $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

وهذه المعادلة تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

الشكل المقابل يوضح أثر السطح الناقصي في المستوي xy

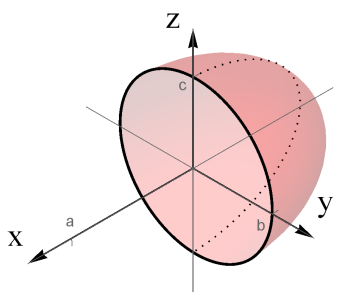


أثر السطح الناقصي في المستوي xz :

بوضع $z = 0$ نحصل على $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$

وهذه المعادلة تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

الشكل المقابل يوضح أثر السطح الناقصي في المستوي xz



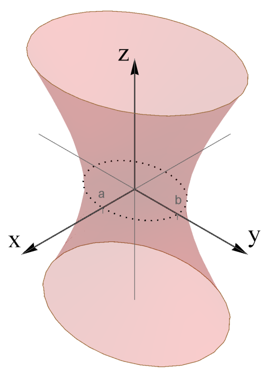
أثر السطح الناقصي في المستوي yz :

بوضع $x = 0$ نحصل على $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

وهذه المعادلة تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

الشكل المقابل يوضح أثر السطح الناقصي في المستوي yz

(2) السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة

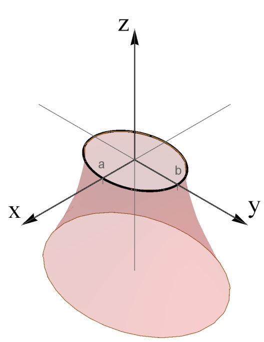


المعادلة العامة للسطح الزائدي ذو القطعة الواحدة هي

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ حيث $a, b, c > 0$

الشكل المقابل يمثل رسم السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة

ولمعرفة رسم السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة يجب معرفة أثر السطح في المستويات الإحداثية .

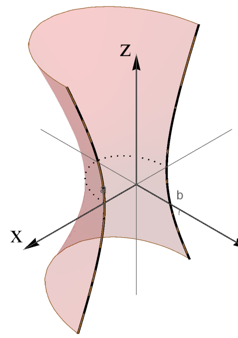


أثر السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة في المستوي xy :

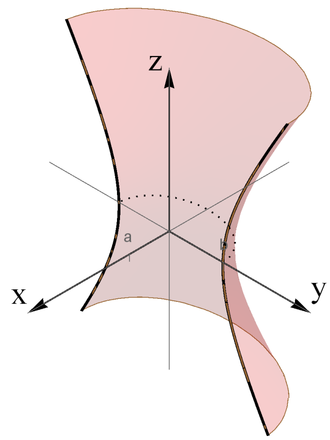
بوضع $z = 0$ نحصل على $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

وهذه المعادلة تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

الشكل المقابل يوضح أثر السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة في المستوي xy

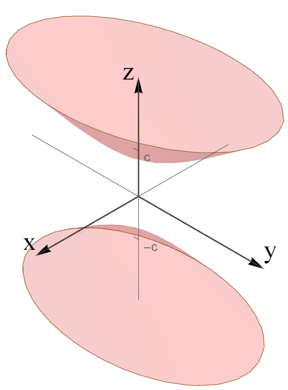


أثر السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة في المستوي xz :
بوضع $y = 0$ نحصل على $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
وهذه المعادلة تمثل قطع زائد مركزه نقطة الأصل ورأساه تقعان على محور x
الشكل المقابل يوضح أثر السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة في المستوي xz

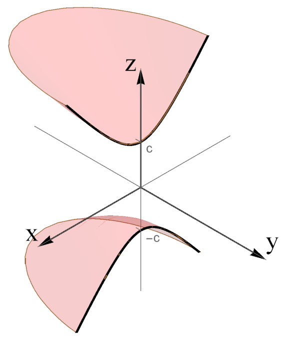


أثر السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة في المستوي yz :
بوضع $x = 0$ نحصل على $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
وهذه المعادلة تمثل قطع زائد مركزه نقطة الأصل ورأساه تقعان على محور y
الشكل المقابل يوضح أثر السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة في المستوي yz

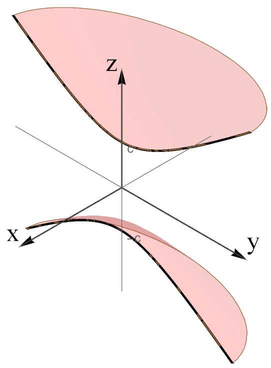
(3) السطح الزائدي ذو قطعتين



المعادلة العامة للسطح الزائدي ذو قطعتين هي
$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ حيث $a, b, c > 0$
الشكل المقابل يمثل رسم السطح الزائدي ذو قطعتين
ولمعرفة رسم السطح الزائدي ذو قطعتين يجب معرفة أثر السطح في المستويات الإحداثية .

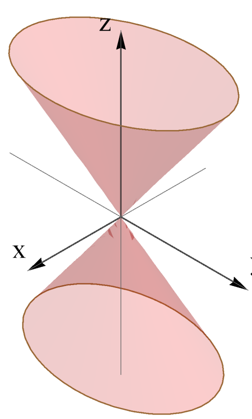


أثر السطح الزائدي ذو قطعتين في المستوي xz :
بوضع $y=0$ نحصل على $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
وهذه المعادلة تمثل قطع زائد مركزه نقطة الأصل ورأساه تقعان على محور z
الشكل المقابل يوضح أثر السطح الزائدي ذو قطعتين في المستوي xz

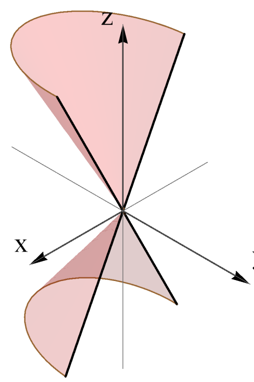


أثر السطح الزائدي ذو قطعتين في المستوي yz :
بوضع $x=0$ نحصل على $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
وهذه المعادلة تمثل قطع زائد مركزه نقطة الأصل ورأساه تقعان على محور z
الشكل المقابل يوضح أثر السطح الزائدي ذو قطعتين في المستوي yz

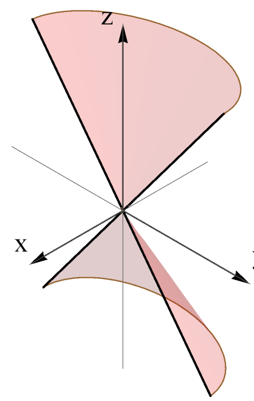
(4) السطح المخروطي الناقصي المزدوج



المعادلة العامة للسطح المخروطي الناقصي المزدوج هي
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ حيث $a,b,c>0$
الشكل المقابل يمثل رسم السطح المخروطي الناقصي المزدوج
ولمعرفة رسم السطح المخروطي الناقصي المزدوج يجب معرفة أثر السطح في المستويات الإحداثية .

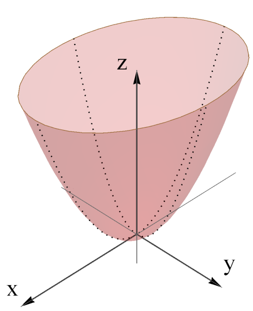


أثر السطح المخروطي الناقصي المزدوج في المستوي xz :
بوضع $y = 0$ نحصل على $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$
أي أن $z = \pm\frac{c}{a}x$ وهذه المعادلة تمثل خطين مستقيمين يتقاطعان في نقطة الأصل
الشكل المقابل يوضح أثر السطح المخروطي الناقصي المزدوج في المستوي xz

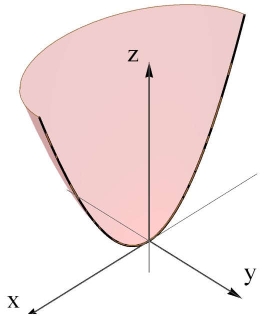


أثر السطح المخروطي الناقصي المزدوج في المستوي yz :
بوضع $x = 0$ نحصل على $\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$
أي أن $z = \pm\frac{c}{b}y$ وهذه المعادلة تمثل خطين مستقيمين يتقاطعان في نقطة الأصل
الشكل المقابل يوضح أثر السطح المخروطي الناقصي المزدوج في المستوي yz

(5) السطح المكافئ الناقصي



المعادلة العامة للسطح المكافئ الناقصي هي
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ حيث $a, b, c > 0$
الشكل المقابل يمثل رسم السطح المكافئ الناقصي
ولمعرفة رسم السطح المكافئ الناقصي يجب معرفة أثر السطح في المستويات الإحداثية .

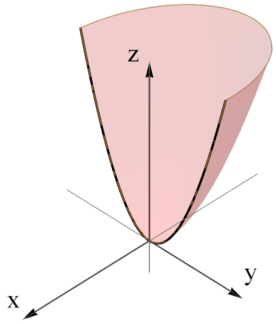


أثر السطح المكافئ الناقصي في المستوي xz :

بوضع $y=0$ نحصل على $\frac{x^2}{a^2}=cz$

وهذه المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وفتحته للأعلى

الشكل المقابل يوضح أثر السطح المكافئ الناقصي في المستوي xz



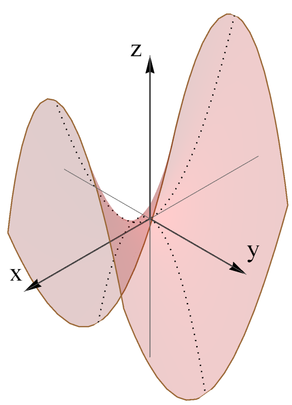
أثر السطح المكافئ الناقصي في المستوي yz :

بوضع $x=0$ نحصل على $\frac{y^2}{b^2}=cz$

وهذه المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وفتحته للأعلى

الشكل المقابل يوضح أثر السطح المكافئ الناقصي في المستوي yz

(6) السطح المكافئ الزائدي (السطح السرجي)

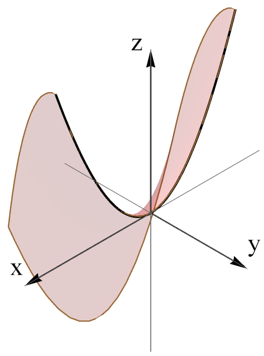


المعادلة العامة للسطح المكافئ الزائدي هي

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$ حيث $a,b,c>0$

الشكل المقابل يمثل رسم السطح المكافئ الزائدي

ولمعرفة رسم السطح المكافئ الزائدي يجب معرفة أثر السطح في المستويات الإحداثية .

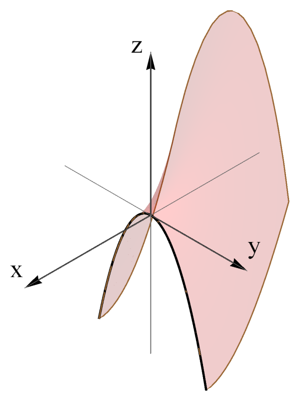


أثر السطح المكافئ الزائدي في المستوي xz :

بوضع $y = 0$ نحصل على $\frac{x^2}{a^2} = cz$

وهذه المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وفتحته للأعلى

الشكل المقابل يوضح أثر السطح المكافئ الزائدي في المستوي xz

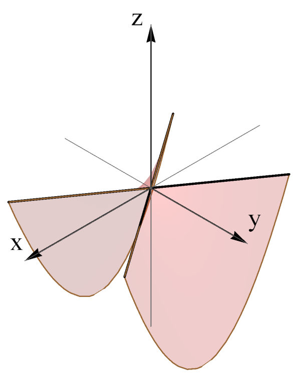


أثر السطح المكافئ الزائدي في المستوي yz :

بوضع $x = 0$ نحصل على $-\frac{y^2}{b^2} = cz$

وهذه المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وفتحته للأسفل

الشكل المقابل يوضح أثر السطح المكافئ الزائدي في المستوي yz



أثر السطح المكافئ الزائدي في المستوي xz :

بوضع $z = 0$ نحصل على $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

أي أن $y = \pm\frac{b}{a}x$ وهذه المعادلة تمثل خطين مستقيمين يتقاطعان في نقطة الأصل .

الشكل المقابل يوضح أثر السطح المكافئ الزائدي في المستوي xy

تمارين (6.1)

(1) أرسم الأسطوانات التالية في الفضاء الثلاثي :

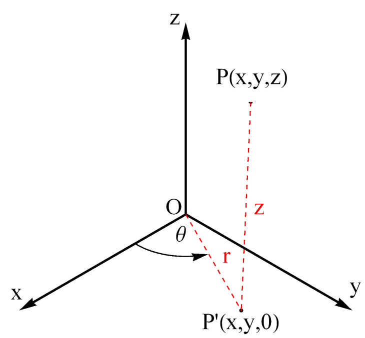
$(i)\ x - y^2 - 1 = 0 \quad (ii)\ 4x^2 + 9y^2 = 36$
$(iii)\ x^2 - z = 0 \quad (iv)\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

(2) حدد نوع السطح التربيعي وارسمه في مايلي :

$(i)\ 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144 \quad (ii)\ 4x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$
$(iii)\ 4x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0 \quad (iv)\ z = x^2 + y^2$
$(v)\ x^2 + y^2 = 9 - z \quad (vi)\ x^2 + y^2 - z^2 = 9$

7.1 الإحداثيات الأسطوانية والكروية

أولاً - الإحداثيات الأسطوانية :



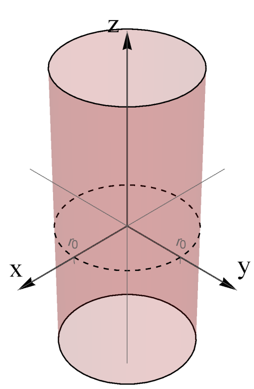
لتكن $P(x,y,z)$ نقطة ما في الفضاء الثلاثي ولا تساوي نقطة الأصل ، ولتكن $P'(x,y,0)$ إسقاط النقطة P في المستوي xy ، إذا كانت (r,θ) هي الإحداثيات القطبية المقابلة للزوج المرتب (x,y) ، فإن الثلاثي المرتب (r,θ,z) يمثل الإحداثيات الأسطوانية للنقطة $P(x,y,z)$

العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزية والإحداثيات الأسطوانية :
إذا كانت (x,y,z) هي الإحداثيات الكارتيزية و (r,θ,z) هي الإحداثيات الأسطوانية للنقطة P فإن :

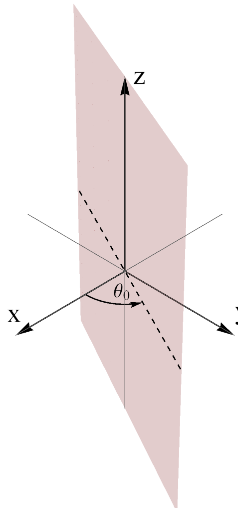
$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ , \ z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \ , \ \tan\theta = \frac{y}{x} \ , \ x \neq 0$$

ملاحظات :



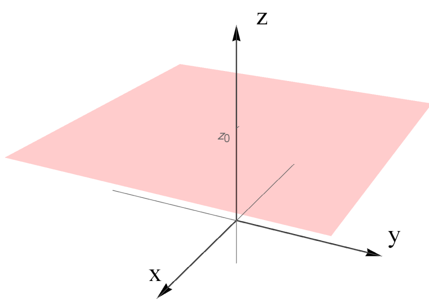
(1) المعادلة $r = r_0$ حيث $r_0 > 0$ تكافئ المعادلة $x^2 + y^2 = r_0^2$ وتمثل أسطوانة قائمة قاعدتها دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r_0
الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $r = r_0$



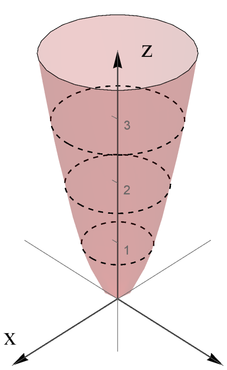
(2) المعادلة $\theta = \theta_0$ حيث θ_0 عدداً ثابتاً

$$\theta = \theta_0 \implies \tan\theta = \tan\theta_0$$
$$\implies \frac{y}{x} = \tan\theta_0 \implies y = \tan\theta_0\, x$$

المعادلة $\theta = \theta_0$ حيث θ_0 عدداً ثابتاً تمثل مستو يحوي محور z
الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $\theta = \theta_0$



(3) المعادلة $z = z_0$ حيث z_0 عدداً ثابتاً تمثل مستو يوازي المستوي xy ويمر بالنقطة $(0, 0, z_0)$
الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $z = z_0$



مثال : أوجد المعادلة الكارتيزية للسطح $z = 4r^2$ وارسمه ؟
الحل :

$$z = 4r^2 = 4\left(x^2 + y^2\right) = 4x^2 + 4y^2 \implies x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z$$

وهذه المعادلة تمثل سطح مكافئ ناقصي (دائري)
الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $z = 4r^2$

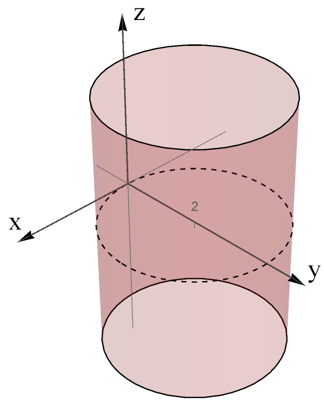
مثال : أوجد المعادلة الكارتيزية للسطح $r = 4\sin\theta$ وارسمه ؟

الحل :

$$r = 4\sin\theta \implies r^2 = 4r\sin\theta \implies x^2 + y^2 = 4y$$
$$\implies x^2 + y^2 - 4y = 0 \implies x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4$$
$$\implies x^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

وهذه المعادلة تمثل أسطوانة قائمة قاعدتها دائرة مركزها النقطة $(0,2)$ ونصف قطرها 2

الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $r = 4\sin\theta$



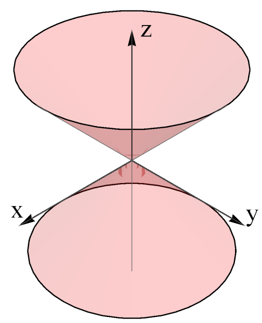
مثال : أوجد المعادلة في الإحداثيات الأسطوانية للسطح $z^2 = x^2 + y^2$ وارسمه ؟

الحل :

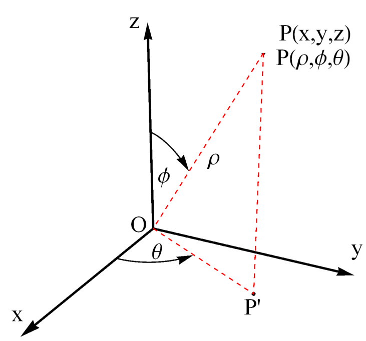
$$z^2 = x^2 + y^2 = r^2 \implies z = r$$

وهذه المعادلة تمثل سطح مخروطي ناقصي (دائري) مزدوج

الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $z^2 = x^2 + y^2$



ثانياً - الإحداثيات الكروية



لتكن $P(x,y,z)$ نقطة ما في الفضاء الثلاثي ولا تساوي نقطة الأصل ، ولتكن $P'(x,y,0)$ إسقاط النقطة P في المستوي xy ، وليكن ρ هو $\|\overrightarrow{OP}\|$ و ϕ هي الزاوية بين المتجه $\overrightarrow{OP}$ ومحور z و θ هي الزاوية بين المتجه $\overrightarrow{OP'}$ ومحور x عندئذ الثلاثي المرتب (ρ,ϕ,θ) يمثل الإحداثيات الكروية للنقطة P .

العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزية والإحداثيات الكروية :

لاحظ أن $\rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ وبالتالي $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$

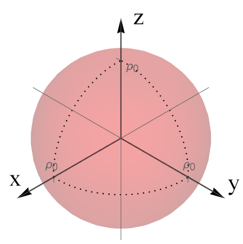
أيضاً $\|\overrightarrow{OP'}\| = \rho \sin\phi$

أي أن $x = \|\overrightarrow{OP'}\| \cos\theta = \rho\ \sin\phi\ \cos\theta$

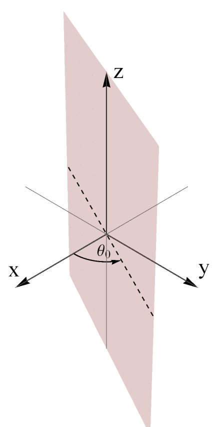
و $y = \|\overrightarrow{OP'}\| \sin\theta = \rho\ \sin\phi\ \sin\theta$

وأخيراً $\cos\phi = \dfrac{z}{\rho}$ وبالتالي $z = \rho\ \cos\phi$

ملاحظات :



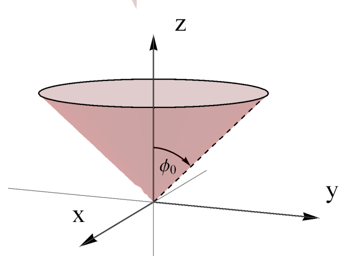
(1) المعادلة $\rho = \rho_0$ حيث $\rho_0 > 0$ تكافئ المعادلة $x^2+y^2+z^2 = \rho_0^2$
وتمثل كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ρ_0 .
الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $\rho = \rho_0$



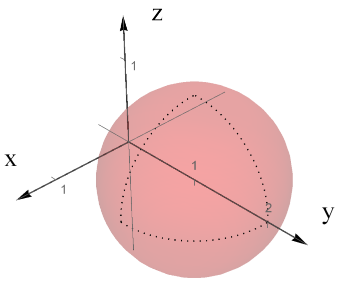
(2) المعادلة $\theta = \theta_0$ حيث θ_0 عدداً ثابتاً

$$\theta = \theta_0 \implies \tan\theta = \tan\theta_0$$
$$\implies \frac{y}{x} = \tan\theta_0 \implies y = \tan\theta_0\ x$$

المعادلة $\theta = \theta_0$ حيث θ_0 عدداً ثابتاً تمثل مستو يحوي محور z
الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $\theta = \theta_0$



(3) المعادلة $\phi = \phi_0$ حيث ϕ_0 عدداً ثابتاً تمثل مخروطاً رأسه نقطة الأصل .
الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $\phi = \phi_0$



مثال : أوجد المعادلة الكارتيزية للسطح $\rho = 2\sin\phi\sin\theta$ وارسمه ؟
الحل :

$$\rho = 2\sin\phi\sin\theta \implies \rho^2 = 2(\rho\sin\phi\sin\theta)$$
$$\implies x^2+y^2+z^2 = 2y \implies x^2+y^2-2y+z^2 = 0$$
$$\implies x^2+(y^2-2y+1)+z^2 = 1 \implies x^2+(y-1)^2+z^2 = 1^2$$

وهذه المعادلة تمثل كرة مركزها النقطة $(0,1,0)$ ونصف قطرها 1 .
الشكل المقابل يمثل السطح المعطى بالمعادلة $\rho = 4\sin\phi\sin\theta$

مثال : أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة التي إحداثياتها الكروية هي $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$

الحل : $\rho = 2 \ , \ \phi = \frac{\pi}{4} \ , \ \theta = \frac{\pi}{6}$

$$x = \rho\ \sin\phi\ \cos\theta = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$y = \rho\ \sin\phi\ \sin\theta = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$z = \rho\ \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

تمارين (7.1)

(1) حول النقاط التالية من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات الأسطوانية :

$(i)\ (1,1,2) \quad , \quad (ii)\ (2,0,3)$

(2) حول النقاط التالية من الإحداثيات الأسطوانية إلى الإحداثيات الكارتيزية :

$(i)\ \left(2,\frac{\pi}{6},-1\right) \quad , \quad (ii)\ \left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4},2\right)$

(3) حول النقاط التالية من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات الكروية :

$(i)\ \left(1,\sqrt{3},2\right) \quad , \quad (ii)\ \left(\sqrt{2},\sqrt{2},1\right)$

(4) حول النقاط التالية من الإحداثيات الكروية إلى الإحداثيات الكارتيزية :

$(i)\ \left(4,\frac{\pi}{3},\pi\right) \quad , \quad (ii)\ \left(1,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

(5) صف الأشكال في الفضاء الثلاثي المعطاة بالمعادلات التالية :

$(i)\ r=3 \qquad (ii)\ \rho=2 \qquad (iii)\ \theta=\frac{\pi}{3}$

$(iv)\ \phi=\frac{\pi}{4} \qquad (v)\ r=4\sin\theta \qquad (vi)\ \rho=6\cos\phi$

$(vii)\ z=4+r^2 \qquad (iix)\ \rho=4\sin\phi\ \cos\theta \qquad (ix)\ \rho^2-4\rho+3=0$

(6) حول المعادلات الكارتيزية إلى معادلات أسطوانية و معادلات كروية في ما يلي :

$(i)\ x^2+y^2+z^2=16 \qquad (ii)\ x^2+y^2=z \qquad (iii)\ x^2-y^2-z^2=1$

$(iv)\ y^2+z^2=4 \qquad (v)\ 6y=x^2+y^2 \qquad (vi)\ y=x$

باب 2

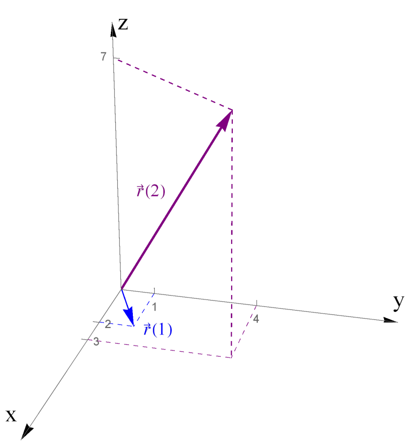
الدوال المتجهية

1.2 الدوال المتجهية والمنحنيات في الفضاء الثلاثي

تعريف (الدالة المتجهية) :
لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، الدالة المتجهية $\overrightarrow{r}$ التي مجالها D هي علاقة تربط كل عدد $t \in D$ بمتجه وحيد $\overrightarrow{r}(t)$ في $\mathbf{V}_3$.
مدى الدالة $\overrightarrow{r}$ يتكون من جميع المتجهات $\overrightarrow{r}(t)$ لكل $t \in D$

ملاحظة :
بما أن $t \in D$ تحدد متجهاً وحيداً في $\mathbf{V}_3$ فإن مركبات الدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)$ تحدد بواسطة المتغير t فقط ، أي أن $\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$ ، حيث f, g, h دوال حقيقية في المتغير t .

مثال : إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = (t+1)\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + (t^3-1)\overrightarrow{k}$ حيث $t \in \mathbb{R}$
(1) أحسب $\overrightarrow{r}(1)$ و $\overrightarrow{r}(2)$ وأرسم متجه الموضع لهما .
(2) حدد قيم t التي تجعل متجه الموضع للدالة $\overrightarrow{r}(t)$ يقع في المستويات الإحداثية .



الحل :
(1) $\overrightarrow{r}(1) = (1+1)\overrightarrow{i} + (1^2)\overrightarrow{j} + (1^3-1)\overrightarrow{k} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
أي أن $\overrightarrow{r}(1) = \langle 2, 1, 0 \rangle$
$\overrightarrow{r}(2) = (2+1)\overrightarrow{i} + (2^2)\overrightarrow{j} + (2^3-1)\overrightarrow{k} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$
أي أن $\overrightarrow{r}(2) = \langle 3, 4, 7 \rangle$
متجها الموضع للمتجهين $\overrightarrow{r}(1)$ و $\overrightarrow{r}(2)$ في الشكل المقابل .
لاحظ أن المتجه $\overrightarrow{r}(1)$ يقع في المستوى xy .

(2) متجه الموضع للدالة $\vec{r}(t)$ تقع في المستوي xy عندما تكون $t^3 - 1 = 0$ أي $t = 1$.
متجه الموضع للدالة $\vec{r}(t)$ تقع في المستوي xz عندما تكون $t^2 = 0$ أي $t = 0$.
متجه الموضع للدالة $\vec{r}(t)$ تقع في المستوي yz عندما تكون $t + 1 = 0$ أي $t = -1$.

المنحنيات في الفضاء الثلاثي :
المنحنى C في الفضاء الثلاثي هو مجموعة الثلاثيات المرتبة $\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ حيث f و g و h دوال متصلة على الفترة $I = [a, b]$ و $a, b \in \mathbb{R}$.
ويمكن كتابة المنحنى C على الشكل $C \ : \ x = f(t) \ , \ y = g(t) \ , \ z = h(t) \ , \ t \in I = [a, b]$ وتسمى بالصيغة الوسيطية للمنحنى C .

ملاحظات :

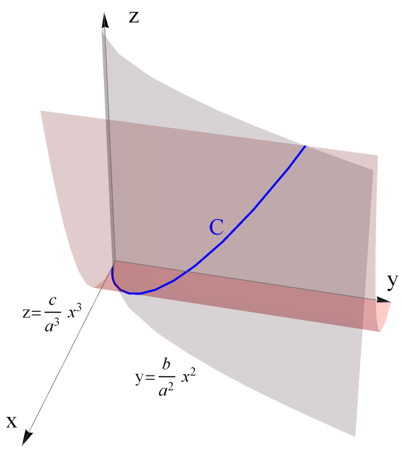
(1) النقطة $\big(f(a), g(a), h(a)\big)$ تسمى نقطة البداية و النقطة $\big(f(b), g(b), h(b)\big)$ تسمى نقطة النهاية للمنحنى C .

(2) إذا كانت $\big(f(a), g(a), h(a)\big) = \big(f(b), g(b), h(b)\big)$ فإن C منحنى مغلق .

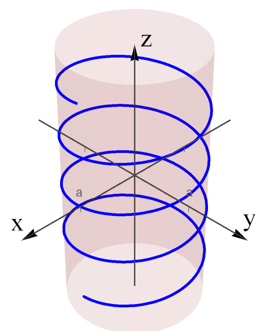
(3) إذا كان المنحنى C لا يتقاطع مع نفسه (ماعدا عند نقطتي البداية والنهاية) فإن C منحنى بسيط .

(4) إذا كانت f' و g' و h' دوال متصلة على I ولا تساوي الصفر في آن واحد فإن المنحنى C يسمى منحنى أملس (ناعم) .

أمثلة لبعض المنحنيات في الفضاء الثلاثي :



(1) المنحنى الملتوي التكعيبي :
وصيغته الوسيطية هي
$C \ : \ x = at \ , \ y = bt^2 \ , \ z = ct^3 \ , \ \ t \geq 0$
حيث $a, b, c \in \mathbb{R}^*$
وينتج هذا المنحنى من تقاطع الأسطوانة $y = \dfrac{b}{a^2}x^2$ مع الأسطوانة
$z = \dfrac{c}{a^3}x^3$
الشكل المقابل يمثل رسم المنحنى الملتوي التكعيبي .



(2) اللولب الدائري :
وصيغته الوسيطية هي
$C\ :\ x = a\cos t\ ,\ y = a\sin t\ ,\ z = bt\ ,\ \ t \geq 0$
حيث $a, b \in \mathbb{R}^*$
لاحظ أن هذا المنحنى يلتف على أسطوانة دائرية قائمة ،
لأن $x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$
تمثل أسطوانة قاعدتها دائرة نصف قطرها a .
الشكل المقابل يمثل رسم اللولب الدائري .

طول المنحنى في الفضاء الثلاثي :
إذا كان $C\ :\ x = f(t)\ ,\ y = g(t)\ ,\ z = h(t)\ ,\ t \in I = [a, b]$ منحنى بسيط وأملس فإن طول المنحنى C هو

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\ dt$$

أو
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$

مثال : أحسب طول المنحنى الذي تمثله الدالة المتجهية $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\,\vec{k}$ من $t = 0$ حتى $t = 1$
الحل : الصيغة الوسيطية لهذا المنحنى هي $C\ :\ x = 2t\ ,\ y = t^2\ ,\ z = \frac{1}{3}t^3\ ,\ \ t \in [0, 1]$

$$\frac{dx}{dt} = 2\ ,\quad \frac{dy}{dt} = 2t\ ,\quad \frac{dz}{dt} = t^2$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(2)^2 + (2t)^2 + (t^2)^2}\ dt = \int_0^1 \sqrt{4 + 4t^2 + t^4}\ dt = \int_0^1 \sqrt{\left(t^2 + 2\right)^2}\ dt$$

$$= \int_0^1 \left|t^2 + 2\right|\ dt = \int_0^1 \left(t^2 + 2\right)\ dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

لاحظ أن المنحنى هو المنحنى الملتوي التكعيبي .

مثال : أحسب طول المنحنى الذي تمثله الدالة المتجهية $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$ من $t = 0$ حتى $t = 2\pi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}^*$
الحل : الصيغة الوسيطية لهذا المنحنى هي $C\ :\ x = a\cos t\ ,\ y = a\sin t\ ,\ z = bt\ ,\ \ t \in [0, 2\pi]$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t\ ,\quad \frac{dy}{dt} = a\cos t\ ,\quad \frac{dz}{dt} = b$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (b)^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + b^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\ dt = \sqrt{a^2 + b^2}\ \ [t]_0^{2\pi} = 2\pi\ \sqrt{a^2 + b^2}$$

لاحظ أن المنحنى هو اللولب الدائري .

مثال : أحسب طول المنحنى الذي تمثله الدالة المتجهية $\vec{r}(t) = e^t\cos t\,\vec{i} + e^t\sin t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$ من $t = 0$ حتى $t = 2\pi$

الحل : الصيغة الوسيطية لهذا المنحنى هي $C\ :\ x=e^t\cos t\ ,\ y=e^t\sin t\ ,\ z=e^t\ ,\ \ t\in[0,2\pi]$

$$\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t\ \ ,\ \ \frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t\ \ ,\ \ \frac{dz}{dt}=e^t$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(e^t\cos t-e^t\sin t\right)^2+\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)^2+\left(e^t\right)^2}\ dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2t}\left(\cos^2 t-2\sin t\cos t+\sin^2 t\right)+e^{2t}\left(\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t\right)+e^{2t}}\ dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{3e^{2t}}\ dt=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\left|e^t\right|\ dt=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}e^t\ dt=\sqrt{3}\left[e^t\right]_0^{2\pi}=\sqrt{3}\left(e^{2\pi}-1\right)$$

تمارين (1.2)

(1) أرسم المنحنى C المعطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)$ في مايلي :

(i) $\overrightarrow{r}(t) = 2t\overrightarrow{i} + (1-4t^2)\overrightarrow{j}\ ;\ t \in \mathbb{R}$

(ii) $\overrightarrow{r}(t) = (2+\cos t)\overrightarrow{i} + (3-\sin t)\overrightarrow{j}\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$

(iii) $\overrightarrow{r}(t) = 2\cos t\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 3\sin t\overrightarrow{k}\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$

(iv) $\overrightarrow{r}(t) = t\overrightarrow{i} + 2t^2\overrightarrow{j} + 3t^3\overrightarrow{k}\ ;\ t \in \mathbb{R}$

(iii) $\overrightarrow{r}(t) = 2\cos t\overrightarrow{i} + 3\sin t\overrightarrow{j} + t\overrightarrow{k}\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$

(2) أحسب طول المنحنى C المعطى بالمعادلات الوسيطية التالية :

(i) $x = 3t^2\ ,\ y = 6t\ ,\ z = t^3\ ,\quad 0 \le t \le 1$

(ii) $x = 8t\ ,\ y = 3\cos 2t\ ,\ z = 3\sin 2t\ ,\quad 0 \le t \le 2\pi$

(iii) $x = 2t\ ,\ y = \dfrac{4t^{\frac{3}{2}}}{3}\ ,\ z = \dfrac{t^2}{2}\ ,\quad 0 \le t \le 3$

(3) بين أن المنحنى C المعطى بالمعادلات الوسيطية $x = a\ \sin t\ \sin\alpha$ و $y = b\ \sin t\cos\alpha$ و $z = c\ \cos t$ حيث $0 \le t \le 2\pi$ و $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، يقع على السطح الناقصي المعطى بالمعادلة $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

2.2 نهاية واشتقاق وتكامل الدوال المتجهية

مجال الدالة المتجهية :
إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$ دالة متجهية ، حيث f و g و h دوال حقيقية في المتغير t ، وكان D_f مجال الدالة f و D_g مجال الدالة g و D_h مجال الدالة h فإن مجال الدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)$ هو $D_{\overrightarrow{r}} = D_f \cap D_g \cap D_h$

مثال : أوجد مجال الدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = \ln t\,\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}\overrightarrow{j} + \cos t\,\overrightarrow{k}$
الحل : $D_{\overrightarrow{r}} = (0,\infty) \cap (1,\infty) \cap \mathbb{R} = (1,\infty)$

نهاية الدالة المتجهية :
إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$ دالة متجهية وكانت النهايات $\lim\limits_{t\to a} f(t)$ و $\lim\limits_{t\to a} g(t)$ و $\lim\limits_{t\to a} h(t)$ موجودة فإن

$$\lim_{t\to a}\overrightarrow{r}(t) = \left(\lim_{t\to a} f(t)\right)\overrightarrow{i} + \left(\lim_{t\to a} g(t)\right)\overrightarrow{j} + \left(\lim_{t\to a} h(t)\right)\overrightarrow{k}$$

مثال : إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = (t^2-1)\overrightarrow{i} + \sqrt{t+1}\,\overrightarrow{j} + e^t\overrightarrow{k}$ أحسب $\lim\limits_{t\to 0}\overrightarrow{r}(t)$
الحل : $\lim\limits_{t\to 0}\overrightarrow{r}(t) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

ملاحظة : إذا كانت إحدى النهايات $\lim\limits_{t\to a} f(t)$ أو $\lim\limits_{t\to a} g(t)$ أو $\lim\limits_{t\to a} h(t)$ غير موجودة فإن $\lim\limits_{t\to a}\overrightarrow{r}(t)$ غير موجودة .

إتصال الدالة المتجهية عند نقطة :
نقول أن الدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)$ متصلة عند النقطة $a \in D_{\overrightarrow{r}}$ إذا كانت $\lim\limits_{t\to a}\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(a)$

ملاحظات :

(1) إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$ فإن الدالة $\overrightarrow{r}(t)$ متصلة عند النقطة $a \in D_{\overrightarrow{r}}$ إذا وفقط إذا كانت الدوال $f(t)$ و $g(t)$ و $h(t)$ متصلة عند النقطة a .

(2) إذا كانت الدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)$ متصلة عند كل نقطة في مجالها فنقول أن $\overrightarrow{r}(t)$ متصلة على مجالها .

اشتقاق الدالة المتجهية :
لتكن $\overrightarrow{r}(t)$ دالة متجهية إذا كانت النهاية $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\overrightarrow{r}(t+\Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t}$ موجودة فإن الدالة المتجهية قابلة للاشتقاق وأن

$$\overrightarrow{r'}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{r}(t+\Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t}$$

نظرية :
إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$ حيث f و g و h دوال قابلة للاشتقاق فإن

$$\overrightarrow{r'}(t) = f'(t)\overrightarrow{i} + g'(t)\overrightarrow{j} + h'(t)\overrightarrow{k}$$

البرهان :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{r}(t+\Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left[f(t+\Delta t)\vec{i} + g(t+\Delta t)\vec{j} + h(t+\Delta t)\vec{k}\right] - \left[f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}\right]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\vec{k}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

$$= f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

أي أن $\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$

ملاحظات :

(1) نرمز لاشتقاق الدالة المتجهية بالرمز $\vec{r}'(t) = D_t\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$

(2) إذا كانت $\vec{r}$ قابلة للاشتقاق مرتين فإن $\vec{r}''(t) = f''(t)\vec{i} + g''(t)\vec{j} + h''(t)\vec{k}$

نظرية :
إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دالتين متجهتين قابلتين للإشتقاق وكانت $c\in\mathbb{R}$ فإن :

(1) $D_t\left[\vec{u}(t)+\vec{v}(t)\right] = D_t\vec{u}(t) + D_t\vec{v}(t) = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$

(2) $D_t\left[c\,\vec{u}(t)\right] = c\,D_t\vec{u}(t) = c\,\vec{u}'(t)$

(3) $D_t\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right] = \vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t) + \vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$

(4) $D_t\left[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)\right] = \vec{u}'(t)\times\vec{v}(t) + \vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$

البرهان : لتكن $\vec{u}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ و $\vec{v}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}$

(1) $\vec{u}(t)+\vec{v}(t) = \left(f_1(t)+g_1(t)\right)\vec{i} + \left(f_2(t)+g_2(t)\right)\vec{j} + \left(f_3(t)+g_3(t)\right)\vec{k}$

$$D_t\left[\vec{u}(t)+\vec{v}(t)\right] = \left(f_1(t)+g_1(t)\right)'\vec{i} + \left(f_2(t)+g_2(t)\right)'\vec{j} + \left(f_3(t)+g_3(t)\right)'\vec{k}$$

$$= \left(f_1'(t)+g_1'(t)\right)\vec{i} + \left(f_2'(t)+g_2'(t)\right)\vec{j} + \left(f_3'(t)+g_3'(t)\right)\vec{k}$$

$$= \left[f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}\right] + \left[g_1'(t)\vec{i} + g_2'(t)\vec{j} + g_3'(t)\vec{k}\right] = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$$

(2) $c\,\vec{u}(t) = \left(c\,f_1(t)\right)\vec{i} + \left(c\,f_2(t)\right)\vec{j} + \left(c\,f_3(t)\right)\vec{k}$

$$D_t\left[c\,\vec{u}(t)\right] = \left(c\,f_1(t)\right)'\vec{i} + \left(c\,f_2(t)\right)'\vec{j} + \left(c\,f_3(t)\right)'\vec{k}$$

$$= \left(c\,f_1'(t)\right)\vec{i} + \left(c\,f_2'(t)\right)\vec{j} + \left(c\,f_3'(t)\right)\vec{k} = c\left[f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}\right] = c\,\vec{u}'(t)$$

(3) $\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t)$

$$D_t\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right]=D_t\sum_{i=1}^{3}f_i(t)g_i(t)=\sum_{i=1}^{3}D_t\left[f_i(t)g_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{3}\left[f_i'(t)g_i(t)+f_i(t)g_i'(t)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{3}f_i'(t)g_i(t)+\sum_{i=1}^{3}f_i(t)g_i'(t)=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$$

$$\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)=\left[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t)\right]\vec{i} \quad (4)$$

$$-\left[f_1(t)g_3(t)-f_3(t)g_1(t)\right]\vec{j}+\left[f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)\right]\vec{k}$$

$$D_t\left[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)\right]=\left[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t)\right]'\vec{i}$$

$$-\left[f_1(t)g_3(t)-f_3(t)g_1(t)\right]'\vec{j}+\left[f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)\right]'\vec{k}$$

$$=\left[f_2'(t)g_3(t)+f_2(t)g_3'(t)-\left(f_3'(t)g_2(t)+f_3(t)g_2'(t)\right)\right]\vec{i}$$

$$-\left[f_1'(t)g_3(t)+f_1(t)g_3'(t)-\left(f_3'(t)g_1(t)+f_3(t)g_1'(t)\right)\right]\vec{j}$$

$$+\left[f_1'(t)g_2(t)+f_1(t)g_2'(t)-\left(f_2'(t)g_1(t)+f_2(t)g_1'(t)\right)\right]\vec{k}$$

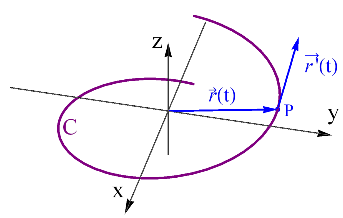
$$=\left[f_2'(t)g_3(t)-f_3'(t)g_2(t)\right]\vec{i}-\left[f_1'(t)g_3(t)-f_3'(t)g_1(t)\right]\vec{j}+\left[f_1'(t)g_2(t)-f_2'(t)g_1(t)\right]\vec{k}$$

$$+\left[f_2(t)g_3'(t)-f_3(t)g_2'(t)\right]\vec{i}-\left[f_1(t)g_3'(t)-f_3(t)g_1'(t)\right]\vec{j}+\left[f_1(t)g_2'(t)-f_2(t)g_1'(t)\right]\vec{k}$$

$$=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$$

المعنى الهندسي لمشتقة الدالة المتجهية :

ليكن C هو المنحنى الناتج عن الدالة المتجهية $\vec{r}(t)$ ، المتجه $\vec{r}'(t)$ هو عبارة عن المتجه المماس للمنحنى C عند النقطة P ، ونمثل المتجه $\vec{r}'(t)$ بمتجه نقطة بدايته هي النقطة P (انظر الشكل) .



لاحظ أن اتجاه المتجه $\vec{r}'(t)$ يكون باتجاه تزايد المتغير t .
نعرف المماس للمنحنى C عند النقطة P بأنه الخط المستقيم المار بالنقطة P ويوازي المتجه $\vec{r}'(t)$.

مثال : إذا كان $C:\ x=t\ ,\ y=t^2\ ,\ z=t^3\ \ ,t\geq 0$ فأوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المماس للمنحنى C عندما تكون $t=1$.

الحل : $P=\left(x(1),y(1),z(1)\right)=(1,1,1)$

$$\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}\implies\vec{r}'(t)=\vec{i}+2t\,\vec{j}+3t^2\vec{k}$$

متجه المماس عندما $t=1$ هو $\vec{r}'(1)=\vec{i}+2(1)\vec{j}+3(1^2)\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$

المعادلات الوسيطية للمماس للمنحنى C عندما $t=1$ هي المعادلات الوسيطية للخط المستقيم المار بالنقطة $P=(1,1,1)$ ويوازي متجه المماس $\vec{r}'(1)=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ وهي $x=t+1\ ,\ y=2t+1\ ,\ z=3t+1$

نتيجة :

إذا كانت $\overrightarrow{r}$ دالة متجهية قابلة للاشتقاق وكان $\|\overrightarrow{r}(t)\| = c$ حيث $c \in \mathbb{R}$ فإن متجه المماس $\overrightarrow{r'}(t)$ يتعامد على المتجه $\overrightarrow{r}(t)$ لكل t .

البرهان : يكفي إثبات أن $\overrightarrow{r'}(t) \cdot \overrightarrow{r}(t) = 0$

$$\overrightarrow{r}(t) \cdot \overrightarrow{r}(t) = \|\overrightarrow{r}(t)\|^2 = c^2$$

$$D_t\left[\overrightarrow{r}(t) \cdot \overrightarrow{r}(t)\right] = D_t c^2 = 0$$

أي أن $\overrightarrow{r'}(t) \cdot \overrightarrow{r}(t) + \overrightarrow{r}(t) \cdot \overrightarrow{r'}(t) = 0 \implies 2\overrightarrow{r}(t) \cdot \overrightarrow{r'}(t) = 0 \implies \overrightarrow{r'}(t) \cdot \overrightarrow{r}(t) = 0$

تكامل الدالة المتجهية :

إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$ حيث f و g و h دوال قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فإن $\overrightarrow{r}$ قابلة للتكامل على $[a,b]$ و

$$\int_a^b \overrightarrow{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\overrightarrow{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\overrightarrow{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\overrightarrow{k}$$

نظرية :

إذا كانت الدالة المتجهية $\overrightarrow{R}(t)$ هي الدالة الأصلية للدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)$ على الفترة $[a,b]$ فإن

$$\int_a^b \overrightarrow{r}(t)\,dt = \left[\overrightarrow{R}(t)\right]_a^b = \overrightarrow{R}(b) - \overrightarrow{R}(a)$$

البرهان :

لتكن $\overrightarrow{R}(t) = F(t)\overrightarrow{i} + G(t)\overrightarrow{j} + H(t)\overrightarrow{k}$ هي الدالة الأصلية للدالة $\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$

لكل $t \in [a,b]$: $\overrightarrow{R'}(t) = \overrightarrow{r}(t) \implies F'(t) = f(t)\ ,\ G'(t) = g(t)\ ,\ H'(t) = h(t)$

$$\begin{aligned}\int_a^b \overrightarrow{r}(t)\,dt &= \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\overrightarrow{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\overrightarrow{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\overrightarrow{k}\\ &= [F(b)-F(a)]\,\overrightarrow{i} + [G(b)-G(a)]\,\overrightarrow{j} + [H(b)-H(a)]\,\overrightarrow{k}\\ &= \left(F(b)\overrightarrow{i} + G(b)\overrightarrow{j} + H(b)\overrightarrow{k}\right) - \left(F(a)\overrightarrow{i} + G(a)\overrightarrow{j} + H(a)\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{R}(b) - \overrightarrow{R}(a)\end{aligned}$$

مثال : إذا كانت $\overrightarrow{r}(t) = 6t^2\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{t+1}\overrightarrow{j} + 2e^{3t}\overrightarrow{k}$ أحسب $\displaystyle\int_0^1 \overrightarrow{r}(t)\,dt$

الحل :

$$\overrightarrow{R}(t) = 2t^3\overrightarrow{i} + \ln|t+1|\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}e^{3t}\overrightarrow{k}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \overrightarrow{r}(t)\,dt = \overrightarrow{R}(1) - \overrightarrow{R}(0) &= \left(2\overrightarrow{i} + \ln 2\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}e^3\overrightarrow{k}\right) - \left((0)\overrightarrow{i} + \ln 1\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}\overrightarrow{k}\right)\\ &= 2\overrightarrow{i} + \ln 2\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}\left(e^3-1\right)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

تمارين (2.2)

(1) في المسائل التالية أحسب مجال الدالة المتجهية $\vec{r}$ وأحسب $\vec{r'}$ و $\vec{r''}$:

$$(i)\ \vec{r}(t) = \sqrt{t+2}\ \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\vec{j} \qquad (ii)\ \vec{r}(t) = \frac{2}{t-1}\vec{i} + \frac{5}{t^2+25}\vec{j}$$
$$(iii)\ \vec{r}(t) = t^2\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \sqrt[3]{t}\ \vec{k} \qquad (iv)\ \vec{r}(t) = \sin 3t\ \vec{i} + \ln(t+3)\vec{j} + \sqrt{|t|+1}\ \vec{k}$$

(2) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المماس للمنحنى C عند النقطة P في مايلي :

$$C\ :\ x = 3t^2 - 1\ ,\ y = t^2\ ,\ z = t+1\ ;\quad P(2,1,2)\ (i)$$
$$C\ :\ x = e^{2t}\ ,\ y = te^t\ ,\ z = t^3 - 4\ ;\quad P(1,0,-4)\ (ii)$$
$$C\ :\ x = t\ ,\ y = t\ \sin t\ ,\ z = t\ \cos t\ ;\quad P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)\ (iii)$$

(3) أحسب التكاملات التالية :

$$(i)\ \int_0^1 \left(4t^3\vec{i} - 8t\vec{j} + 5\vec{k}\right)dt \qquad (ii)\ \int_1^2 \left(6t^2\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k}\right)dt$$
$$(iii)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \tan t\,\vec{k}\right)dt \qquad (iv)\ \int_0^1 \left(te^{t^2}\vec{i} + t^4\vec{j} + \frac{1}{1+t^2}\vec{k}\right)dt$$

(4) إذا كانت $\vec{r'}(t) = 2t\,\vec{i} + \frac{1}{t+1}\vec{j} + e^t\vec{k}$ وكانت $\vec{r}(0) = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ أوجد $\vec{r}(t)$.

(5) أوجد معادلة السطح الناظمي للمنحنى $C\ :\ x = t^2+1\ ,\ y = e^t\ ,\ z = t\ \sin t$ عند النقطة $P(1,1,0)$

(6) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دالتين متجهتين وكانت نهايتاهما موجودتين عندما $t \to a$ ، أثبت مايلي :

$$\lim_{t\to a}\left[\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)\right] = \lim_{t\to a}\vec{u}(t) \pm \lim_{t\to a}\vec{v}(t)\ (i)$$
$$\lim_{t\to a}\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right] = \left(\lim_{t\to a}\vec{u}(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to a}\vec{v}(t)\right)\ (ii)$$
$$c \in \mathbb{R}\ \text{حيث}\ \lim_{t\to a} c\,\vec{u}(t) = c\lim_{t\to a}\vec{u}(t)\ (iii)$$

(7) إذا كانت f دالة حقيقية قابلة للإشتقاق وكانت $\vec{r}$ دالة متجهية قابلة للاشتقاق فأثبت أن

$$D_t\left[f(t)\vec{r}(t)\right] = f(t)\,\vec{r'}(t) + f'(t)\,\vec{r}(t)$$

(8) إذا كانت $\overrightarrow{r}$ دالة متجهية قابلة للإشتقاق مرتين فأثبت أن $D_t\left[\overrightarrow{r}(t)\times\overrightarrow{r'}(t)\right]=\overrightarrow{r}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)$

(9) إذا كانت $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ دالتين متجهتين قابلتين للتكامل على $[a,b]$ و $c\in\mathbb{R}$ أثبت مايلي :

$$(i)\quad \int_a^b\left[\overrightarrow{u}(t)\pm\overrightarrow{v}(t)\right]\,dt=\int_a^b\overrightarrow{u}(t)\,dt\pm\int_a^b\overrightarrow{v}(t)\,dt$$

$$(ii)\quad \int_a^b c\,\overrightarrow{u}(t)\,dt=c\int_a^b\overrightarrow{u}(t)\,dt$$

(10) إذا كانت $\overrightarrow{u}$ دالة متجهية قابلة للتكامل على $[a,b]$ وكان $\overrightarrow{c}\in\mathbf{V}_3$ فأثبت أن

$$\int_a^b\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{u}(t)\,dt=\overrightarrow{c}\cdot\int_a^b\overrightarrow{u}(t)\,dt$$

3.2 الحركة

تعريف :
إذا كان متجه الموضع لجسيم ما في المستوي الإحداثي يعطى بالدالة المتجهية $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$ حيث t تمثل الزمن ، والدالتان f و g قابلتان للاشتقاق مرتين فإن

(1) السرعة المتجهية (الإزاحة) عند الزمن t هي $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j}$

(2) السرعة عند الزمن t هي $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$

(3) التسارع عند الزمن t هو $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = \dfrac{d^2x}{dx^2}\vec{i} + \dfrac{d^2y}{dy^2}\vec{j} = f''(t)\vec{i} + g''(t)\vec{j}$

تعريف :
إذا كان متجه الموضع لجسيم ما في الفضاء الثلاثي يعطى بالدالة المتجهية $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ حيث t تمثل الزمن ، والدوال f و g و h قابلة للاشتقاق مرتين فإن

(1) السرعة المتجهية (الإزاحة) عند الزمن t هي $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$

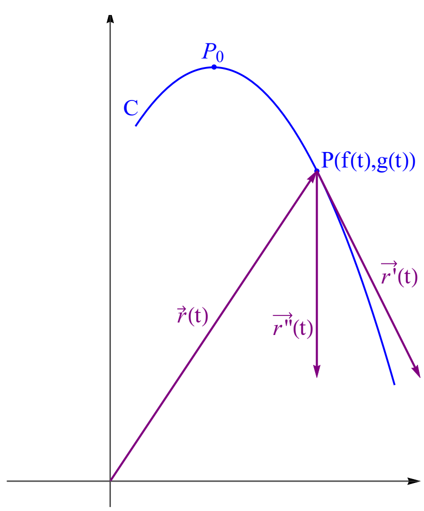
(2) السرعة عند الزمن t هي $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$

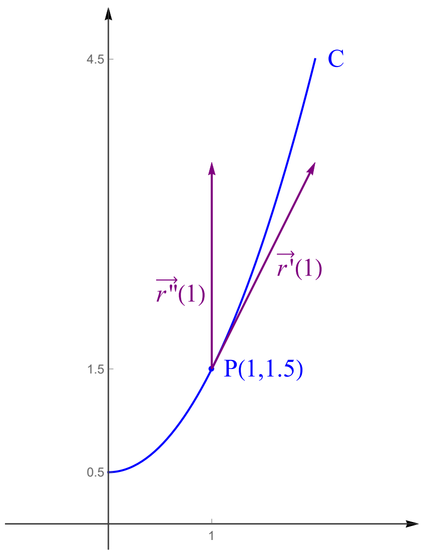
(3) التسارع عند الزمن t هو $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = f''(t)\vec{i} + g''(t)\vec{j} + h''(t)\vec{k}$

ملاحظات :
(1) لتكن P_0 نقطة نهاية متجه الموضع $\vec{r}(t_0)$ عندئذ طول المنحنى C من P_0 إلى P هو

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\|\, du$$

وبالتالي $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$ ، أي أن $\|\vec{r}'(t)\|$ يمثل معدل تغير طول المنحنى (المسافة) بالنسبة للزمن ولذلك يسمى بالسرعة .
(2) يمثل متجه السرعة المتجهية $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ ومتجه التسارع $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$ هندسياً بمتجهين نقطة بدايتهما النقطة P .
(3) يكون اتجاه متجه التسارع $\vec{a}(t)$ باتجاه الجزء المقعر من المنحنى C .





مثال : إذا كان متجه الموضع لجسيم ما يعطى بالدالة المتجهية

$\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i} + \left(t^2 + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{j}$ حيث $0 \le t \le 2$

(1) أوجد السرعة المتجهية والتسارع للجسيم عند الزمن t .

(2) أرسم المنحنى C الذي يمثل مسار الجسيم ومثل المتجهين $\overrightarrow{r}'(1)$ و $\overrightarrow{r}''(1)$ هندسياً .

الحل :

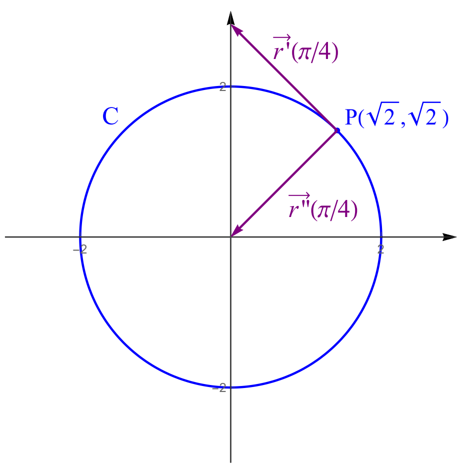
(1) $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r}'(t) = \overrightarrow{i} + 2t\,\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{r}''(t) = (0)\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$

(2) لاحظ أن $x = t$ و $y = t^2 + \frac{1}{2} = x^2 + \frac{1}{2}$ أي أن المنحنى C عبارة عن قطع مكافئ رأسه النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ وفتحته للأعلى ، ويبدأ من النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ وينتهي بالنقطة $\left(2, \frac{9}{2}\right)$

$\overrightarrow{r}'(1) = \overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ أي أن $\overrightarrow{r}'(1)$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ونقطة نهايته $\left(2, \frac{7}{2}\right)$

$\overrightarrow{r}''(1) = (0)\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ أي أن $\overrightarrow{r}'(1)$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ونقطة نهايته $\left(1, \frac{7}{2}\right)$



مثال : إذا كان متجه الموضع لجسيم ما يعطى بالدالة المتجهية

$\overrightarrow{r}(t) = 2\cos t\,\overrightarrow{i} + 2\sin t\,\overrightarrow{j}$ حيث $0 \le t \le 2\pi$

(1) أوجد السرعة المتجهية والتسارع للجسيم عند الزمن t .

(2) أرسم المنحنى C الذي يمثل مسار الجسيم ومثل المتجهين $\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ هندسياً .

(3) بين أن السرعة $v(t)$ ثابتة لكل $0 \le t \le 2\pi$

(4) بين أن اتجاه متجه التسارع $\overrightarrow{a}(t)$ هو عكس اتجاه المتجه $\overrightarrow{r}(t)$

(5) بين أن المتجهين $\overrightarrow{v}(t)$ و $\overrightarrow{a}(t)$ متعامدان لكل $0 \le t \le 2\pi$

الحل :

(1) $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r}'(t) = -2\sin t\,\overrightarrow{i} + 2\cos t\,\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{r}''(t) = -2\cos t\,\overrightarrow{i} - 2\sin t\,\overrightarrow{j}$

(2) لاحظ أن $x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (4\sin t)^2 = 4$ ، وهذه المعادلة تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2

$\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{i} + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{j}$ أي أن $\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ونقطة نهايته $\left(0, 2\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{r}''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{i} - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{j}$ أي أن $\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} - \sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ونقطة نهايته $(0, 0)$

(3) $v(t) = \|\overrightarrow{v}(t)\| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{4} = 2$

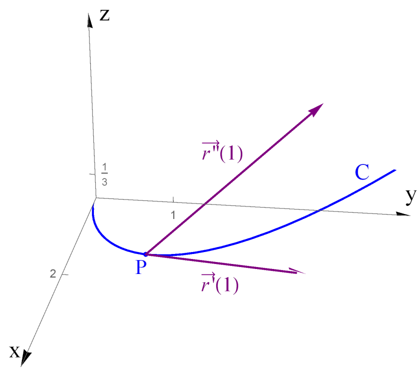
(4) $\overrightarrow{a}(t) = -2\cos t\,\overrightarrow{i} - 2\sin t\,\overrightarrow{j} = -\left(2\cos t\,\overrightarrow{i} + 2\sin t\,\overrightarrow{j}\right) = -\overrightarrow{r}(t)$ لكل $0 \le t \le 2\pi$

أي أن اتجاه متجه التسارع $\overrightarrow{a}(t)$ هو عكس اتجاه المتجه $\overrightarrow{r}(t)$

(5) بما أن $\|\overrightarrow{v}(t)\| = 2$ ثابت لكل $0 \le t \le 2\pi$ فإن المتجهين $\overrightarrow{v}(t)$ و $\overrightarrow{v}'(t) = \overrightarrow{a}(t)$ متعامدان لكل $0 \le t \le 2\pi$

حل آخر : $\overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{a}(t) = \left(-2\sin t\,\overrightarrow{i} + 2\cos t\,\overrightarrow{j}\right)\cdot\left(-2\cos t\,\overrightarrow{i} - 2\sin t\,\overrightarrow{j}\right) = 4\sin t\cos t - 4\sin t\cos t = 0$

أي أن المتجهين $\overrightarrow{v}(t)$ و $\overrightarrow{a}(t)$ متعامدان لكل $0 \le t \le 2\pi$



مثال : إذا كان متجه الموضع لجسيم ما يعطى بالدالة المتجهية

$\overrightarrow{r}(t) = 2t\,\overrightarrow{i} + t^2\,\overrightarrow{j} + \frac{t^3}{3}\,\overrightarrow{k}$ حيث $0 \le t \le 2$

(1) أوجد السرعة المتجهية والتسارع للجسيم عند الزمن t .

(2) مثل المتجهين $\overrightarrow{r}'(1)$ و $\overrightarrow{r}''(1)$ هندسياً .

الحل :

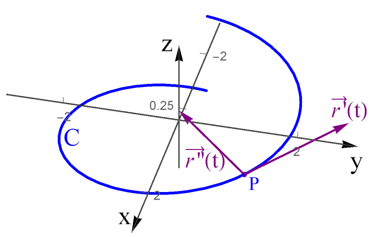
(1) $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r}'(t) = 2\,\overrightarrow{i} + 2t\,\overrightarrow{j} + t^2\,\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{r}''(t) = (0)\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + 2t\,\overrightarrow{k}$

(2) $\overrightarrow{r}'(1) = 2\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ أي أن $\overrightarrow{r}'(1)$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $\left(2, 1, \frac{1}{3}\right)$ ونقطة نهايته $\left(4, 3, \frac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{r}''(1) = (0)\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$ أي أن $\overrightarrow{r}''(1)$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $\left(2, 1, \frac{1}{3}\right)$ ونقطة نهايته $\left(2, 3, \frac{7}{3}\right)$

لاحظ أن المنحنى C هو المنحنى الملتوي التكعيبي .



مثال : إذا كان متجه الموضع لجسيم ما يعطى بالدالة المتجهية

$\overrightarrow{r}(t) = 2\cos t\,\overrightarrow{i} + 2\sin t\,\overrightarrow{j} + \frac{t}{4}\,\overrightarrow{k}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

(1) أوجد السرعة المتجهية والتسارع للجسيم عند الزمن t .

(2) بين أن السرعة $v(t)$ ثابتة لكل $t \in \mathbb{R}$

(3) بين أن المتجهين $\overrightarrow{v}(t)$ و $\overrightarrow{a}(t)$ متعامدان لكل $t \in \mathbb{R}$

الحل :

(1) $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r}'(t) = -2\sin t\,\overrightarrow{i} + 2\cos t\,\overrightarrow{j} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{r}''(t) = -2\cos t\,\overrightarrow{i} - 2\sin t\,\overrightarrow{j} + (0)\,\overrightarrow{k}$

(2) $v(t) = \|\overrightarrow{v}(t)\| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{65}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}$ لكل $t \in \mathbb{R}$

(3) بما أن $\|\overrightarrow{v}(t)\|$ ثابت لكل $t \in \mathbb{R}$ فإن المتجهين $\overrightarrow{v}(t)$ و $\overrightarrow{v}'(t) = \overrightarrow{a}(t)$ متعامدان لكل $t \in \mathbb{R}$

تمارين (3.2)

(1) إذا كان $\overrightarrow{r}(t)$ هو متجه الموضع لجسيم يتحرك في المستوي ، أحسب السرعة المتجهية والسرعة والتسارع لهذا الجسيم عند الزمن t في ما يلي :

$$(i)\ \overrightarrow{r}(t)=\frac{1}{t}\overrightarrow{i}+\frac{2}{t+3}\overrightarrow{j}\ ;\ \ t=2 \qquad (ii)\ \overrightarrow{r}(t)=\sqrt{t+1}\ \overrightarrow{i}+\ln(t+1)\overrightarrow{j}\ ;\ \ t=1$$

$$(iii)\ \overrightarrow{r}(t)=2\cos t\,\overrightarrow{i}+3\sin t\,\overrightarrow{j}\ ;\ \ t=\frac{\pi}{4} \qquad (iv)\ \overrightarrow{r}(t)=2e^{t}\overrightarrow{i}+3e^{-t}\overrightarrow{j}\ ;\ \ t=0$$

(2) إذا كان $\overrightarrow{r}(t)$ هو متجه الموضع لجسيم يتحرك في الفضاء الثلاثي ، أحسب السرعة المتجهية والسرعة والتسارع لهذا الجسيم عند الزمن t في ما يلي :

$$(i)\ \overrightarrow{r}(t)=t^{3}\overrightarrow{i}+2t^{2}\overrightarrow{j}-t\overrightarrow{k}\ ;\ \ t=1$$

$$(ii)\ \overrightarrow{r}(t)=4t\overrightarrow{i}+2\cos t\,\overrightarrow{j}+3\sin t\,\overrightarrow{k}\ ;\ \ t=\pi$$

$$(iii)\ \overrightarrow{r}(t)=t\ \cos t\,\overrightarrow{i}+t\ \sin t\,\overrightarrow{j}+t\overrightarrow{k}\ ;\ \ t=\frac{\pi}{2}$$

(3) إذا كان متجه التسارع لجسم متحرك هو دائماً المتجه الصفري فأثبت أن الجسم يتحرك على خط مستقيم .

(4) إذا كان جسيم ما يتحرك بسرعة ثابتة فأثبت أن متجه السرعة يتعامد مع متجه التسارع.

(5) إذا كان $\overrightarrow{r}(t)=k\ \cos mt\,\overrightarrow{i}+k\ \sin mt\,\overrightarrow{j}$ هو متجه الموضع لجسم يتحرك في المستوي (يتحرك على دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها k) حيث $m>0$ ، وكانت سرعته ثابتة ومقدارها v

(i) أثبت أن اتجاه متجه التسارع عكس اتجاه متجه الموضع .

(ii) أثبت أن طول متجه التسارع يساوي $\frac{v^2}{k}$.

4.2 الانحناء

عندما يتحرك جسيم ما على منحنى C فإنه قد يغير اتجاهه بسرعة أو ببطء وهذا يعتمد على انحناء المنحنى C بشكل حاد أو بشكل تدريجي ، نستخدم الانحناء لقياس معدل التغير في شكل المنحنى ، ولدراسة الانحناء يجب أولاً دراسة نوعين من المتجهات هما متجه الوحدة المماس و متجه الوحدة الناظمي الأساسي .

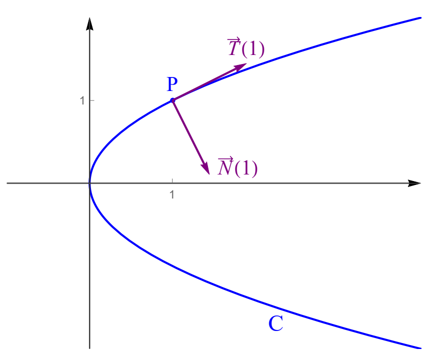
تعريف (متجه الوحدة المماس) :
ليكن C منحنى أملس معطى بالدالة المتجهية القابلة للاشتقاق $\overrightarrow{r}(t)$ وليكن $\overrightarrow{r'}(t) \neq 0$ فإن متجه الوحدة المماس هو $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{r'}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|}$.

ملاحظات :

(1) $\|\overrightarrow{T}(t)\| = 1$ لكل t

(2) إذا كان المتجه $\overrightarrow{T}(t)$ قابلاً للاشتقاق فإن المتجهين $\overrightarrow{T}(t)$ و $\overrightarrow{T'}(t)$ متعامدان لكل t .

تعريف (متجه الوحدة الناظمي الأساسي) :
ليكن C منحنى أملس معطى بالدالة المتجهية القابلة للإشتقاق مرتين $\overrightarrow{r}(t)$ وليكن $\overrightarrow{T'}(t) \neq 0$ فإن متجه الوحدة الناظمي الأساسي هو $\overrightarrow{N}(t) = \dfrac{\overrightarrow{T'}(t)}{\|\overrightarrow{T'}(t)\|}$.



مثال : إذا كان C منحنى معطى بالدالة المتجهية
$\overrightarrow{r}(t) = t^2\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j}$
(1) أحسب المتجهين $\overrightarrow{T}(t)$ و $\overrightarrow{N}(t)$.
(2) أرسم المنحنى C والمتجهين $\overrightarrow{T}(1)$ و $\overrightarrow{N}(1)$
الحل :

(1) $\overrightarrow{r'}(t) = 2t\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + 1^2} = \sqrt{4t^2+1}$$

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{r'}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|} = \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{T'}(t) = \frac{2\sqrt{4t^2+1} - 2t\frac{8t}{\sqrt{4t^2+1}}}{4t^2+1}\overrightarrow{i} - \frac{8t}{2\sqrt{4t^2+1}}\overrightarrow{j} = \frac{2(4t^2+1) - 8t^2}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{i} - \frac{4t}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{T'}(t) = \frac{2}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{i} - \frac{4t}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{j}$$

$$\|\overrightarrow{T'}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{2}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{-4t}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+16t^2}{(4t^2+1)^3}} = 2\sqrt{\frac{4t^2+1}{(4t^2+1)^3}} = \frac{2}{4t^2+1}$$

$$\overrightarrow{N}(t)=\frac{\overrightarrow{T'}(t)}{\|\overrightarrow{T'}(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}\overrightarrow{i}-\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}\overrightarrow{j}$$

(2) $x=t^2\ ,\ y=t \implies x=y^2$ أي أن المنحنى C هو عبارة عن قطع مكتفئ رأسه نقطة الأصل وفتحته إلى اليمين .

$\overrightarrow{r}(1)=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ وبالتالي $P=(1,1)$

$$\overrightarrow{T}(1)=\frac{2}{\sqrt{4(1^2)+1}}\overrightarrow{i}+\frac{1}{\sqrt{4(1^2)+1}}\overrightarrow{j}=\frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}$$

أي أن المتجه $\overrightarrow{T}(1)$ نقطة بدايته هي $P=(1,1)$ ونقطة نهايته هي $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+1,\frac{1}{\sqrt{5}}+1\right)$

$$\overrightarrow{N}(1)=\frac{1}{\sqrt{4(1^2)+1}}\overrightarrow{i}-\frac{2}{\sqrt{4(1^2)+1}}\overrightarrow{j}=\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}$$

أي أن المتجه $\overrightarrow{N}(1)$ نقطة بدايته هي $P=(1,1)$ ونقطة نهايته هي $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+1,\frac{-2}{\sqrt{5}}+1\right)$

مثال : إذا كان C هو اللولب الدائري المعطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)=4\cos t\,\overrightarrow{i}+4\sin t\,\overrightarrow{j}+3t\,\overrightarrow{k}$ حيث $t\geq 0$ ، أحسب $\overrightarrow{T}(t)$ و $\overrightarrow{N}(t)$

الحل :

$$\overrightarrow{r'}(t)=-4\sin t\,\overrightarrow{i}+4\cos t\,\overrightarrow{j}+3\,\overrightarrow{k}$$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\|=\sqrt{(-4\sin t)^2+(4\cos t)^2+(3)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

$$\overrightarrow{T}(t)=\frac{\overrightarrow{r'}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|}=\frac{-4}{5}\sin t\,\overrightarrow{i}+\frac{4}{5}\cos t\,\overrightarrow{j}+\frac{3}{5}\overrightarrow{k}$$

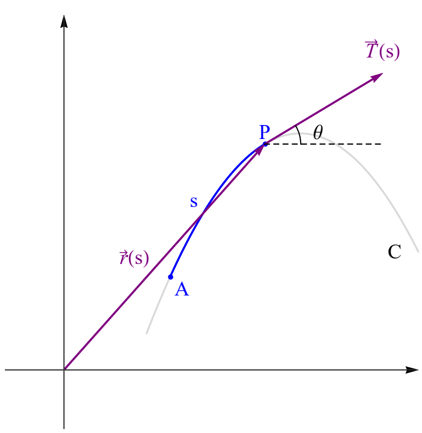
$$\overrightarrow{T'}(t)=\frac{-4}{5}\cos t\,\overrightarrow{i}-\frac{4}{5}\sin t\,\overrightarrow{j}$$

$$\|\overrightarrow{T'}(t)\|=\sqrt{\left(\frac{-4}{5}\cos t\right)^2+\left(\frac{-4}{5}\sin t\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\overrightarrow{N}(t)=\frac{\overrightarrow{T'}(t)}{\|\overrightarrow{T'}(t)\|}=-\cos t\,\overrightarrow{i}-\sin t\,\overrightarrow{j}$$

الانحناء :

لتكن A نقطة مثبتة على المنحنى الأملس C ولتكن $P(x,y)$ نقطة متغيرة على المنحنى C وليكن s طول المنحنى C من النقطة A إلى النقطة $P(x,y)$ ولنفرض أن المنحنى C معطى بالمعادلات الوسيطية $x=f(s)\ ,\ y=g(s)$ ، أي أن كل وسيط s تقابله نقطة $P\left(f(s),g(s)\right)$.



متجه الموضع للنقطة $P(x,y)$ يعطى بالدالة المتجهية

$$\overrightarrow{r}(s)=x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}=f(s)\,\overrightarrow{i}+g(s)\,\overrightarrow{j}$$

وبالتالي $\overrightarrow{r'}(s)=\frac{dx}{ds}\overrightarrow{i}+\frac{dy}{ds}\overrightarrow{j}=f'(s)\,\overrightarrow{i}+g'(s)\,\overrightarrow{j}$

أي أن $\|\overrightarrow{r'}(s)\|=\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{ds}{ds}\right)^2}=1$

أي أن المتجه $\overrightarrow{r'}(s)$ هو متجه وحدة مماس للمنحنى C عند النقطة P ، أي أن $\overrightarrow{T}(s)=\overrightarrow{r'}(s)$

لأي قيمة s لتكن θ هي الزاوية بين المتجه $\overrightarrow{T}(s)$ والمتجه $\overrightarrow{i}$ ، لاحظ أن θ دالة في المتغير s لأن $P(f(s),g(s))$ و $\overrightarrow{T}(s)$ دوال في s ، وبالتالي يمكن تعريف الانحناء بأنه معدل تغير θ بالنسبة للمتغير s أو بمعنى آخر $\dfrac{d\theta}{ds}$.

تعريف (انحناء المنحنى في المستوي) :

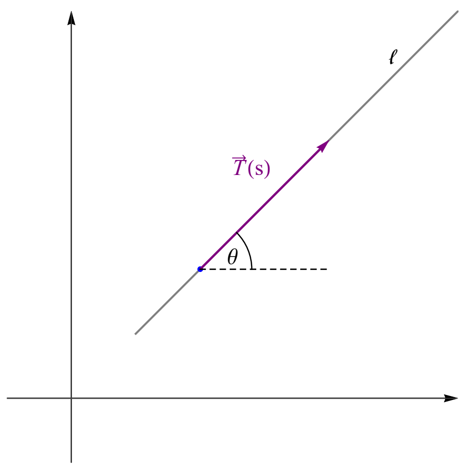
إذا كان C منحنى أملس معرف بالدوال الوسيطية $x=f(s)$ و $y=g(s)$ حيث s هو طول المنحنى C من نقطة مثبتة إلى النقطة $P(x,y)$ ، وكانت θ تمثل الزاوية بين متجه الوحدة المماس $\overrightarrow{T}(s)$ والمتجه $\overrightarrow{i}$ ، فإن انحناء المنحنى C عند النقطة P يرمز له بالرمز K ويعرف بأنه $K=\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|$

مثال : أثبت أن انحناء أي خط مستقيم ℓ يساوي الصفر عند أي نقطة واقعة على ℓ

الحل :

بما أن متجه الوحدة المماس $\overrightarrow{T}(s)$ يقع دائماً على المستقيم ℓ ، عندئذ قيمة θ ثابتة لكل قيمة من قيم s أي أن

$$K=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|=0$$



مثال : أثبت أن الانحناء عند أي نقطة تقع على دائرة نصف قطرها k يساوي $\dfrac{1}{k}$

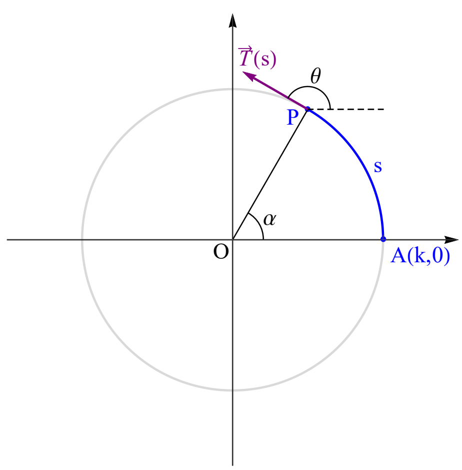
الحل : لنفرض أن الدائرة مركزها نقطة الأصل وأن النقطة P تقع في الربع الأول ، وليكن s طول القوس الواصل بين النقطتين A و P.

لتكن α قياس الزاوية POA عندئذ $s=k\alpha \implies \alpha=\dfrac{s}{k}$

أيضاً $\theta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{s}{k}+\dfrac{\pi}{2}$

أي أن $\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{1}{k}$

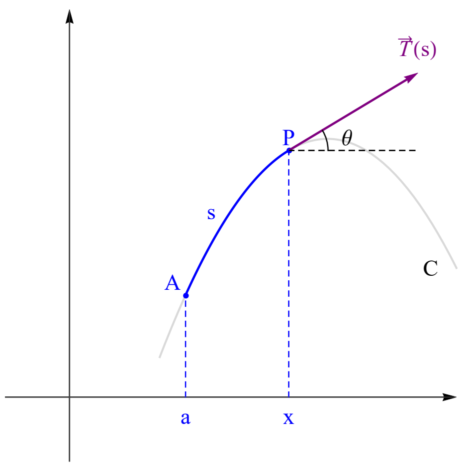
وبالتالي الانحناء $K=\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|=\left|\dfrac{1}{k}\right|=\dfrac{1}{k}$



نظرية :

إذا كان المنحنى C معطى بالدالة $y=f(x)$ حيث f قابلة للاشتقاق مرتين فإن الانحناء K عند أي نقطة $P(x,y)$ تقع على C

هو $K=\dfrac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$



البرهان : لتكن θ و $\vec{T}(s)$ كما في تعريف الانحناء .

بما أن y' هي ميل المماس للمنحنى C عند النقطة P فإن

$\tan\theta=y'$ أو $\theta=\tan^{-1}y'$

أيضاً طول المنحني من النقطة A إلى النقطة P يعطى بالتكامل

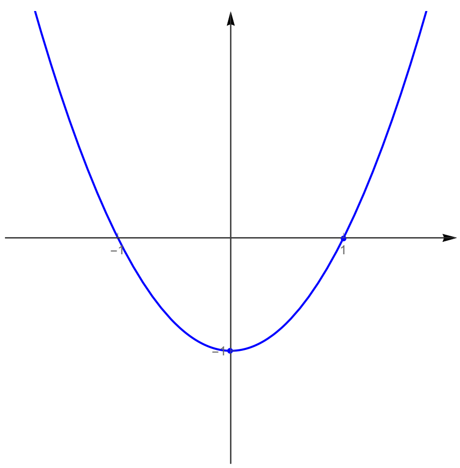
$s(x)=\int_a^x\sqrt{1+(y')^2}\,du$.

من قاعدة السلسلة $\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{d\theta}{ds}\,\dfrac{ds}{dx}$

أي أن $K=\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|=\left|\dfrac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}}\right|$

ولكن $\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{y''}{1+(y')^2}$ و $\dfrac{ds}{dx}=\sqrt{1+(y')^2}$

وبالتالي $K=\left|\dfrac{\frac{y''}{1+(y')^2}}{\sqrt{1+(y')^2}}\right|=\dfrac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$



مثال : أرسم منحنى الدالة $y=x^2-1$ وأحسب الانحناء عند النقاط (x,y) و $(0,-1)$ و $(1,0)$

الحل :

منحنى الدالة هو قطع مكافئ فتحته للأعلى ومركزه النقطة $(0,-1)$

$y'=2x$ و $y''=2$

الانحناء عند النقطة (x,y) هو $K=\dfrac{|2|}{\left[1+(2x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

أي أن $K=\dfrac{2}{\left[1+4x^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

الانحناء عند النقطة $(0,-1)$ هو $K|_{(0,-1)}=\dfrac{2}{[1+0]^{\frac{3}{2}}}=2$

الانحناء عند النقطة $(1,0)$ هو $K|_{(1,0)}=\dfrac{2}{[1+4]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$

لاحظ أن قيمة الانحناء عند رأس القطع المكافئ أكبر من قيمة الانحناء عند النقطة $(1,0)$.

نظرية :

إذا كان المنحنى C معطى بالمعادلات الوسيطية التالية $x=f(t)$ و $y=g(t)$ حيث f و g قابلتان للإشتقاق مرتين ، عندئذ

الانحناء K عند أي نقطة $P(x,y)$ هو $K=\dfrac{\left|f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)\right|}{\left[\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

البرهان : لتكن θ كما في تعريف الانحناء .

بما أن y' هي ميل المماس للمنحنى C عند النقطة P فإن

$$\tan\theta = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$ أو $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)$ حيث $f'(t) \neq 0$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)^2}\ \frac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{\left(f'(t)\right)^2} = \frac{\left(f'(t)\right)^2}{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}\ \frac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{\left(f'(t)\right)^2}$$

أي أن $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}$

أيضاً طول المنحنى من النقطة المثبتة A إلى النقطة P يعطى بالتكامل

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(f'(u)\right)^2+\left(g'(u)\right)^2}\, du \ .$$

وبالتالي $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}$

الانحناء عند أي نقطة $P(x,y)$ هو

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \left|\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right| = \left|\frac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}\ \frac{1}{\sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2}}\right|$$

وبالتالي $K = \dfrac{\left|f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)\right|}{\left[\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

مثال : أثبت أن الانحناء عند أي نقطة تقع على دائرة نصف قطرها k يساوي $\dfrac{1}{k}$

الحل :

المعادلات الوسيطية للدائرة التي نصف قطرها k هي $x(t) = f(t) = k\cos t$ و $y(t) = g(t) = k\sin t$

وبالتالي $f'(t) = -k\sin t\ ,\ f''(t) = -k\cos t$ و $g'(t) = k\cos t\ ,\ g''(t) = -k\sin t$

الانحناء عند أي نقطة هو $K = \dfrac{\left|k^2\sin^2 t-(-k^2\cos^2 t)\right|}{\left[k^2\sin^2 t+k^2\cos^2 t\right]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\left|k^2\right|}{\left(k^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{k^2}{k^3} = \dfrac{1}{k}$

نظرية :

إذا كان المنحنى C معطى بالمعادلة القطبية $r = r(\theta)$ حيث r قابلة للإشتقاق مرتين ، عندئذ الانحناء K عند أي نقطة $P(r,\theta)$

هو $K = \dfrac{\left|2(r')^2 - rr'' + r^2\right|}{\left[(r')^2+r^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

البرهان :

يمكن كتابة الدالة القطبية $r = r(\theta)$ بالدالة الوسيطية $x(\theta) = f(\theta) = r(\theta)\cos\theta$ و $y(\theta) = g(\theta) = r(\theta)\sin\theta$

عندئذ الانحناء عند النقطة $P(r,\theta)$ هو $K = \dfrac{\left|f'(\theta)g''(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)\right|}{\left[\left(f'(\theta)\right)^2+\left(g'(\theta)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$f'(\theta) = r'\cos\theta - r\sin\theta$ و $g'(\theta) = r'\sin\theta + r\cos\theta$

$$f''(\theta) = r''\cos\theta - r'\sin\theta - \left(r'\sin\theta + r\cos\theta\right) = r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta$$

$$g''(\theta) = r''\sin\theta + r'\cos\theta + r'\cos\theta - r\sin\theta = r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta)$$

$$f'(\theta)g''(\theta) - g'(\theta)f''(\theta) = (r'\cos\theta - r\sin\theta)(r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta)$$

$$-(r'\sin\theta + r\cos\theta)(r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta$$

$$= r'r''\sin\theta\cos\theta + 2\left(r'\right)^2\cos^2\theta - rr'\sin\theta\cos\theta - rr''\sin^2\theta - 2rr'\sin\theta\cos\theta + r^2\sin^2\theta$$

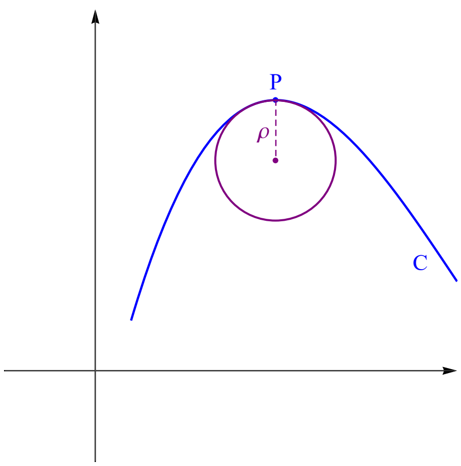
$$-\left(r'r''\sin\theta\cos\theta-2\left(r'\right)^2\sin^2\theta-rr'\sin\theta\cos\theta+rr''\cos^2\theta-2rr'\sin\theta\cos\theta-r^2\cos\theta\right)$$
$$=2\left(r'\right)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-rr''\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+r^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=2\left(r'\right)^2-rr''+r^2$$
$$\left(f'(\theta)\right)^2+\left(g'(\theta)\right)^2=(r'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\cos\theta)^2$$
$$=\left(r'\right)^2\cos^2\theta-2rr'\sin\theta\cos\theta+r^2\sin^2\theta+\left(r'\right)^2\sin^2\theta+2rr'\sin\theta\cos\theta+r^2\cos^2\theta$$
$$=\left(r'\right)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+r^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=\left(r'\right)^2+r^2$$
$$K=\frac{\left|f'(\theta)g''(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)\right|}{\left[\left(f'(\theta)\right)^2+\left(g'(\theta)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|2(r')^2-rr''+r^2\right|}{\left[(r')^2+r^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

مثال : إذا كان $r(\theta)=a\ \cos\theta$ حيث $a>0$ و $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ، فاحسب الانحناء عند أي نقطة $P(r,\theta)$.

الحل : $r'=-a\ \sin\theta$ و $r''=-a\ \cos\theta$

$$K=\frac{\left|2(-a\ \sin\theta)^2-a\ \cos\theta\,(-a\ \cos\theta)+(a\ \cos\theta)^2\right|}{\left[(-a\ \sin\theta)^2+(a\ \cos\theta)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|2a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta+a^2\cos^2\theta\right|}{\left[a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{\left|2a^2\sin^2\theta+2a^2\cos^2\theta\right|}{\left[a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|2a^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\right|}{\left[a^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|2a^2|}{(a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2a^2}{|a|^3}=\frac{2a^2}{a^3}=\frac{2}{a}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)}$$

تذكر أن المنحنى القطبي $r(\theta)=a\ \cos\theta$ حيث $a>0$ و $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ يمثل دائرة نصف قطرها $\frac{a}{2}$.



تعريف :

(1) إذا كان انحناء C عند النقطة $P(x,y)$ هو $K\neq 0$ فإن $\rho=\frac{1}{K}$ يسمى نصف قطر الانحناء .

(2) نسمي الدائرة التي نصف قطرها ρ ومركزها يقع في الجانب المقعر من C وتمر بالنقطة P دائرة الانحناء .

(3) مركز الانحناء هو مركز دائر الانحناء .

نظرية :

إذا كان المنحنى C يعطى بالدالة $y=f(x)$ و كان انحناء C عند النقطة $P\left(x_0,y_0\right)$ هو $K\neq 0$ وكان مركز الانحناء هو النقطة (a,b) فإن $a=x_0-\frac{y'\left[1+\left(y'\right)^2\right]}{y''}$ و $b=y_0+\frac{\left[1+\left(y'\right)^2\right]}{y''}$

البرهان :

دائرة الانحناء مركزها النقطة (a,b) ونصف قطرها ρ وبالتالي معادلتها هي $(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2$

بالإشتقاق بالنسبة للمتغير x نحصل على $x-a+(y-b)y'=0$

بالإشتقاق مرة أخرى نحصل على $1+(y-b)y''+\left(y'\right)^2=0\implies y-b=\frac{-\left[1+\left(y'\right)^2\right]}{y''}$

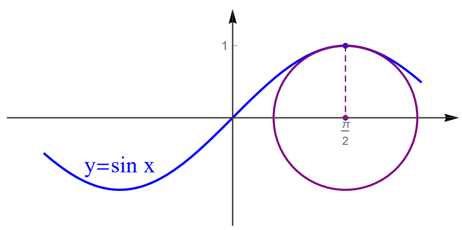
أي أن $b = y + \dfrac{\left[1+(y')^2\right]}{y''}$

بما أن $x-a+(y-b)y' = 0$ إذاً $x-a = -y'(y-b) = \dfrac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}$

أي أن $a = x - \dfrac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}$

بما أن النقطة (x_0, y_0) تقع على دائرة الانحناء فإن :

$a = x_0 - \dfrac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}$ و $b = y_0 + \dfrac{\left[1+(y')^2\right]}{y''}$



مثال : إذا كان C هو منحنى الدالة $y = \sin x$ ، أحسب الانحناء عند $x = \dfrac{\pi}{2}$ وأوجد معادلة دائرة الانحناء و مركز الانحناء .

الحل : $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

$y' = \cos x$ و $y'' = -\sin x$

$K = \dfrac{|-\sin x|}{\left[1+(\cos x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|\sin x|}{\left[1+\cos^2 x\right]^{\frac{3}{2}}}$

الانحناء عند النقطة $P\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ يساوي $K|_{(\frac{\pi}{2},1)} = \dfrac{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}{\left[1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} = 1$

إذاً نصف قطر الانحناء هو $\rho = \dfrac{1}{1} = 1$

لحساب مركز الانحناء : $a = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[1+\left(\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\right)^2\right]}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{0}{-1} = \dfrac{\pi}{2}$

$b = 1 + \dfrac{\left[1+\left(\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\right)^2\right]}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1 + \dfrac{1}{-1} = 1-1 = 0$

أي أن مركز الانحناء هو النقطة $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

معادلة دائرة الانحناء هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2$

أي أن $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \implies \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = 1^2$

الانحناء في الفضاء الثلاثي :

لاحظ أن الانحناء لمنحنى ما في المستوي يعطى بالعلاقة $K = \dfrac{d\theta}{ds}$ حيث θ هي الزاوية بين المتجه $\overrightarrow{T}(s)$ و المتجه $\overrightarrow{i}$ و s يمثل طول المنحنى من نقطة ثابتة إلى النقطة P المراد حساب الانحناء عندها .
لا يمكن تعميم هذا التعريف للمنحنيات في الفضاء الثلاثي نظراً لعدم وجود زاوية واحدة تقابل θ ، لذلك سنعمد إلى استنتاج قاعدة لحساب الانحناء في المستوي بدون المتغير θ ، ليكن $\overrightarrow{T}(s) = \cos(\theta(s))\,\overrightarrow{i} + \sin(\theta(s))\,\overrightarrow{j}$ حيث θ دالة في المتغير s
(لاحظ أن $\overrightarrow{T}(s)\cdot\overrightarrow{i} = \cos(\theta(s))$)، بإشتقاق الطرفين نحصل على $\overrightarrow{T'}(s) = \left(-\sin(\theta(s))\,\dfrac{d\theta}{ds}\right)\overrightarrow{i} + \left(\cos(\theta(s))\,\dfrac{d\theta}{ds}\right)\overrightarrow{j}$

أي أن $\|\overrightarrow{T'}(s)\| = \left|\dfrac{d\theta}{ds}\right| \|-\sin(\theta(s))\,\overrightarrow{i} + \cos(\theta(s))\,\overrightarrow{j}\| = \left|\dfrac{d\theta}{ds}\right| = K$

وبالتالي يمكن تعريف الانحناء في الفضاء الثلاثي بواسطة متجه الوحدة المماس $\overrightarrow{T'}(s)$.

تعاريف :
ليكن C منحنى في الفضاء الثلاثي معطى بالمعادلات الوسيطية التالية $x = f(s)$ و $y = g(s)$ و $z = h(s)$ حيث f و g و h قابلة للاشتقاق مرتين و s طول المنحنى من نقطة ثابتة إلى النقطة $P(x, y, z)$ و كانت $\overrightarrow{r}(s) = f(s)\overrightarrow{i} + g(s)\overrightarrow{j} + h(s)\overrightarrow{k}$ فإن

(1) متجه الوحدة المماس للمنحنى C عند النقطة P هو $\overrightarrow{T}(s) = \dfrac{\overrightarrow{r'}(s)}{\|\overrightarrow{r'}(s)\|}$ حيث $\overrightarrow{r'}(s) \neq 0$

(2) متجه الوحدة الناظمي الأساسي للمنحنى C عند النقطة P هو $\overrightarrow{N}(s) = \dfrac{\overrightarrow{T'}(s)}{\|\overrightarrow{T'}(s)\|}$ حيث $\overrightarrow{T'}(s) \neq 0$

(3) الانحناء عند النقطة P هو $K = \|\overrightarrow{T'}(s)\|$

ملاحظة :

$$\overrightarrow{N}(s) = \frac{\overrightarrow{T'}(s)}{\|\overrightarrow{T'}(s)\|} = \frac{\overrightarrow{T'}(s)}{K} \implies \overrightarrow{T'}(s) = K\,\overrightarrow{N}(s)$$

تمارين (4.2)

(1) أوجد متجه الوحدة المماس $\vec{T}(t)$ ومتجه الوحدة الناظمي الأساسي $\vec{N}(t)$ للمنحنى C المعطى بالدالة $\vec{r}(t)$ ، وأرسمهما عند قيمة t المعطاة في ما يلي :

$(i)\ \vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^3\,\vec{j}\ ;\ \ t = 1$ $\quad (ii)\ \vec{r}(t) = (2-\cos t)\,\vec{i} + (2+\sin t)\,\vec{j}\ ;\ \ t = \frac{\pi}{3}$

$(iii)\ \vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + \frac{t^2}{2}\,\vec{j} + t\,\vec{k}\ ;\ \ t = 1$ $\quad (iv)\ \vec{r}(t) = 3\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 2\sin t\,\vec{k}\ ;\ \ t = \frac{\pi}{4}$

(2) أحسب الانحناء عند النقطة المعطاة P في مايلي :

$(i)\ y = x^3+1\ ;\ P(1,2)$ $\quad (ii)\ y = e^{2x}\ ;\ P(0,1)$

$(iii)\ y = ln(x-2)\ ;\ P(3,0)$ $\quad (iv)\ x = 2t+1\ ,\ y = t^2+4\ ;\ P(1,4)$

$(v)\ x = 3\sin t\ ,\ y = 2\cos t\ ;\ P(0,2)$ $\quad (vi)\ x = \sqrt{t}\ ,\ y = t^2\ ;\ P(1,1)$

(3) أحسب نصف قطر الانحناء ودائرة الانحناء وارسم المنحنى ودائرة الانحناء عند النقطة المعطاة في ما يلي :

$(i)\ y = x^2+2\ ;\ P(0,2)$ $\quad (ii)\ y = \cos x\ ;\ P(0,1)$

$(iii)\ y = \cosh x\ ;\ P(0,1)$ $\quad (iv)\ y = \frac{1}{x}\ ;\ P(1,1)$

(4) أوجد النقاط التي يكون عندها الانحناء مساوياً للصفر في مايلي :

$(i)\ y = x^3+x+3$ $\quad (ii)\ y = x^4-6x^2$

$(iii)\ y = \sinh x$ $\quad (iv)\ y = e^{-x^2}$

(5) أحسب انحناء المنحنى القطبي عند النقطة $P(r,\theta)$ في مايلي :

$(i)\ r = 4\sin\theta$ $\quad (ii) r = 3+3\cos\theta$

(6) (i) بين أن أكبر قيمة لانحناء القطع المكافئ تتحقق عند رأس القطع .

(ii) بين أن أكبر قيمة لانحناء القطع الناقص تتحقق عند نقطتي نهاية المحور الأكبر ، وأقل قيمة للانحناء تتحقق عند نقطتي نهاية المحور الأصغر .

5.2 المركبتان المماسية والناظمية لمتجه التسارع

نظرية :
ليكن متجه الموضع لجسيم ما P في وقت ما t معطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t)$ وليكن C منحنى الدالة $\overrightarrow{r}(t)$ في صيغته الوسيطية بواسطة s حيث s طول المنحنى من نقطة ثابتة إلى أخرى معينة ، إذا كان $\overrightarrow{T}(s)$ و $\overrightarrow{N}(s)$ هما متجه الوحدة المماس ومتجه الوحدة الناظمي الأساسي ، وكانت K تمثل انحناء المنحنى C عند النقطة المعينة فإن

(1) السرعة المتجهية هي $\overrightarrow{v}(t) = \dfrac{ds}{dt}\overrightarrow{T}(s)$

(2) التسارع هو $\overrightarrow{a}(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T}(s) + K\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\overrightarrow{N}(s)$

البرهان :

(1) $\overrightarrow{T}(s) = \dfrac{\overrightarrow{r'}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|}$ وبالتالي $\overrightarrow{r'}(t) = \|\overrightarrow{r'}(t)\|\ \overrightarrow{T}(s)$

بما أن $\overrightarrow{r'}(t) = \overrightarrow{v}(t)$ و $\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \|\overrightarrow{v}(t)\| = \dfrac{ds}{dt}$ فإن $\overrightarrow{v}(t) = \dfrac{ds}{dt}\overrightarrow{T}(s)$

(2) لاحظ أن s دالة في t ، بإشتقاق المعادلة $\overrightarrow{v}(t) = \dfrac{ds}{dt}\overrightarrow{T}(s)$ بالنسبة للمتغير t واستخدام قاعدة السلسلة

$$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{v'}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T}(s) + \frac{ds}{dt}\frac{d}{dt}\overrightarrow{T}(s) = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T}(s) + \frac{ds}{dt}\overrightarrow{T'}(s)\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T}(s) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\overrightarrow{T'}(s)$$

بما أن $\overrightarrow{T'}(s) = K\overrightarrow{N}(s)$ فإن $\overrightarrow{a}(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T}(s) + K\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\overrightarrow{N}(s)$

ملاحظة :
بما أن السرعة $v = \dfrac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{v}(t)\|$ فإن $\overrightarrow{v}(t) = v\ \overrightarrow{T}(s)$ و $\overrightarrow{a}(t) = \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{T}(s) + Kv^2\overrightarrow{N}(s)$

أي أن متجه التسارع يمكن كتابته بواسطة مركبة مماسية a_T و مركبة ناظمية a_N حيث

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{و} \quad a_N = Kv^2 = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

نظرية (المركبة المماسية للتسارع) :

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|}$$

البرهان :

$$\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t) = \overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{a}(t) = \left[\frac{ds}{dt}\overrightarrow{T}(s)\right]\cdot\left[\frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T}(s) + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\overrightarrow{N}(s)\right]$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\left[\overrightarrow{T}(s)\cdot\overrightarrow{T}(s)\right] + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\left[\overrightarrow{T}(s)\cdot\overrightarrow{N}(s)\right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$$

لاحظ أن $\overrightarrow{T}(s)\cdot\overrightarrow{T}(s) = \|\overrightarrow{T}(s)\|^2 = 1$ و $\overrightarrow{T}(s)\cdot\overrightarrow{N} = 0$ لأن $\overrightarrow{T}(s)$ و $\overrightarrow{N}(s)$ متعامدان .

وبالتالي $\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t) = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right) = \|\overrightarrow{r'}(t)\|\ a_T$

إذا كانت $\|\overrightarrow{r'}(t)\| \neq 0$ فإن $a_T = \dfrac{\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|}$

نظرية (المركبة الناظمية للتسارع) :

$$a_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|}$$

البرهان :

$$\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t) = \overrightarrow{v}(t)\times\overrightarrow{a}(t) = \left[\frac{ds}{dt}\overrightarrow{T}(s)\right]\times\left[\frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T}(s) + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\overrightarrow{N}(s)\right]$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\left[\overrightarrow{T}(s)\times\overrightarrow{T}(s)\right] + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\left[\overrightarrow{T}(s)\times\overrightarrow{N}(s)\right]$$

لاحظ أن $\overrightarrow{T}(s)\times\overrightarrow{T}(s) = 0$ ، وبما أن $\overrightarrow{T}(s)$ و $\overrightarrow{N}(s)$ هما متجها وحدة متعامدان فإن $\overrightarrow{T}(s)\times\overrightarrow{N}(s)$ هو أيضاً متجه وحدة ، أي أن $\|\overrightarrow{T}(s)\times\overrightarrow{N}(s)\| = 1$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)\| = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\|\overrightarrow{T}(s)\times\overrightarrow{N}(s)\| = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right) = a_N\|\overrightarrow{r'}(t)\|$$

إذا كانت $\|\overrightarrow{r'}(t)\| \neq 0$ فإن $a_N = \dfrac{\|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|}$

مثال : إذا كان متجه الموضع لجسيم ما يعطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = t\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + t^3\overrightarrow{k}$ حيث t هو الزمن ، أوجد المركبة المماسية والمركبة الناظمية للتسارع عند أي زمن t .

الحل : $\overrightarrow{r'}(t) = \overrightarrow{i} + 2t\overrightarrow{j} + 3t^2\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{r''}(t) = 2\overrightarrow{j} + 6t\overrightarrow{k}$$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t) = 4t + 18t^3$$

المركبة المماسية للتسارع هي $a_T = \dfrac{\overrightarrow{r'}(t)\cdot\overrightarrow{r''}(t)}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|} = \dfrac{4t+18t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$

$$\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{k} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\overrightarrow{i} - 6t\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)\| = \sqrt{(6t^2)^2 + (-6t)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 36t^2 + 36t^4} = 2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}$$

المركبة الناظمية للتسارع هي $a_N = \dfrac{\|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|} = \dfrac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$

نظرية :

$$a_N = \sqrt{\|\overrightarrow{a}\|^2 - a_T^2}$$

البرهان : للاختصار سنستخدم الرموز $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T}(s)$ و $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}(s)$ و $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(t)$

نعلم أن $\overrightarrow{a} = a_T\overrightarrow{T} + a_N\overrightarrow{N}$

تذكر أن $\overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{T} = 1$ و $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N} = 1$ و $\overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{N} = 0$

$$\|\overrightarrow{a}\|^2 = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = \left(a_T\overrightarrow{T} + a_N\overrightarrow{N}\right)\cdot\left(a_T\overrightarrow{T} + a_N\overrightarrow{N}\right)$$

$$= a_T^2\left(\overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{T}\right) + 2a_Ta_N\left(\overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{N}\right) + a_N^2\left(\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N}\right) = a_T^2 + a_N^2$$

أي أن $\|\overrightarrow{a}\|^2 = a_T^2 + a_N^2 \implies a_N = \sqrt{\|\overrightarrow{a}\|^2 - a_T^2}$

مثال : إذا كان جسيم ما يتحرك على منحنى معطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = k\cos mt\,\overrightarrow{i} + k\sin mt\,\overrightarrow{j}$ حيث $m, k > 0$ ، أوجد المركبتين المماسية والناظمية للتسارع .

الحل : $\overrightarrow{r}'(t) = -km\sin mt\,\overrightarrow{i} + km\cos mt\,\overrightarrow{j}$

$$\|\overrightarrow{v}(t)\| = \|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{(-km\sin mt)^2) + (km\cos mt)^2} = \sqrt{k^2m^2} = |km| = km$$

أي أن السرعة ثابتة لكل t وقيمتها km وبالتالي $\dfrac{ds}{dt} = km$

المركبة المماسية للتسارع هي $a_T = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}(km) = 0$

$$\overrightarrow{a}(t) = -km^2\cos mt\,\overrightarrow{i} - km^2\sin mt\,\overrightarrow{j}$$

$$\|\overrightarrow{a}(t)\|^2 = \left(-km^2\cos mt\right)^2 + \left(-km^2\cos t\right)^2 = \left(km^2\right)^2 = k^2m^4$$

المركبة الناظمية للتسارع هي $a_N = \sqrt{\|\overrightarrow{a}\|^2 - a_T^2} = \sqrt{\left(k^2m^4\right) - (0)^2} = km^2$

نظرية :

إذا كان المنحنى C يعطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$ حيث f و g و h دوال قابلة للإشتقاق مرتين فإن الانحناء K عند أي نقطة $P(x, y, z)$ تقع على C هو $K = \dfrac{\|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|^3} = \dfrac{a_N}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|^2}$

البرهان : لاحظ أن $\dfrac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{v}(t)\| = \|\overrightarrow{r}'(t)\|$

بما أن $K\|\overrightarrow{r'}(t)\|^2 = K\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = a_N = \dfrac{\|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|}$ فإن $K = \dfrac{\|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|^3}$

وأيضاً $K = \dfrac{a_N}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|^2}$

مثال : إذا كان المنحنى C يعطى بالدالة المتجهية $\overrightarrow{r}(t) = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + bt\,\overrightarrow{k}$ لكل $t \in \mathbb{R}$ و $a, b > 0$ ، أحسب الانحناء عند كل $t \in \mathbb{R}$

الحل : لاحظ أن المنحنى C هو اللولب الدائري .

$$\overrightarrow{r'}(t) = -a\sin t\,\overrightarrow{i} + a\cos t\,\overrightarrow{j} + b\,\overrightarrow{k}\ ,\ \overrightarrow{r''}(t) = -a\cos t\,\overrightarrow{i} - a\sin t\,\overrightarrow{j}$$

$$\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{k} & \overrightarrow{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t\,\overrightarrow{i} - ab\cos t\,\overrightarrow{j} + a^2\,\overrightarrow{k}$$

$$\|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\| = \sqrt{(ab\sin t)^2 + (-ab\cos t)^2 + (a^2)^2} = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$K = \frac{\|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\|}{\|\overrightarrow{r'}(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

تمارين (5.2)

(1) أوجد المركبتين المماسية والناظمية للتسارع لجسم يتحرك على منحنى معطى بالدالة :

$(i)\ \overrightarrow{r}(t) = (2t^2+1)\overrightarrow{i} + 3t\overrightarrow{j}$ $\quad (ii)\ \overrightarrow{r}(t) = \cosh t\,\overrightarrow{i} + \sinh t\,\overrightarrow{j}$

$(iii)\ \overrightarrow{r}(t) = t\ \cos t\,\overrightarrow{i} + t\ \sin t\,\overrightarrow{j}$ $\quad (iv)\ \overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + t^3\overrightarrow{k}$

$(v)\ \overrightarrow{r}(t) = 3\sin t\,\overrightarrow{i} + t\,\overrightarrow{j} + 3\cos t\,\overrightarrow{k}$ $\quad (iv)\ \overrightarrow{r}(t) = 2\cos t\,\overrightarrow{i} + 3\sin t\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$

(2) يتحرك جسم على طول القطع المكافئ $y = x^2$ بحيث تكون المركبة الأفقية لمتجه السرعة تساوي دائما 3 . أوجد المركبتين المماسية والناظمية لتسارع الجسم عند النقطة $P(1,1)$.

(3) إذا كان جسم يتحرك على طول المنحنى $y = f(x)$ حيث $a \le x \le b$ ، فأثبت أن المركبة الناظمية للتسارع تساوي 0 عند نقاط انقلاب الدالة .

6.2 الإشتقاق الإتجاهي والمستوي المماس لسطح

تعريف (الإشتقاق الإتجاهي في الفضاء الثنائي) :
إذا كانت $w = f(x,y)$ دالة في متغيرين و $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j}$ متجه وحدة ، فإن الإشتقاق الإتجاهي للدالة f عند النقطة $P(x,y)$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{u}$ يرمز له بالرمز $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ يعرف بأنه $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t\,u_1, y+t\,u_2)-f(x,y)}{t}$ متى ما كانت النهاية موجودة .

ملاحظات :
(1) إذا كان $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i}$ فإن $u_1 = 1\ ,\ u_2 = 0$ وبالتالي $D_{\overrightarrow{i}}f(x,y) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} = f_x(x,y)$
(2) إذا كان $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j}$ فإن $u_1 = 0\ ,\ u_2 = 1$ وبالتالي $D_{\overrightarrow{j}}f(x,y) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t} = f_y(x,y)$

تعريف (تدرج الدالة في الفضاء الثنائي) :
إذا كانت f دالة في متغيرين وقابلة للإشتقاق فإن تدرج الدالة f يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\nabla} f$ ويعرف بأنه المتجه
$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = f_x(x,y)\overrightarrow{i} + f_y(x,y)\overrightarrow{j}$$

نظرية :
إذا كانت f دالة في متغيرين وقابلة للاشتقاق وكان $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j}$ متجه وحدة فإن
$$D_{\overrightarrow{u}}f(x,y) = f_x(x,y)\ u_1 + f_y(x,y)\ u_2 = \overrightarrow{\nabla} f(x,y)\cdot\overrightarrow{u}$$
البرهان : لنعرف الدالة $g(t) = f(x+t\,u_1, y+t\,u_2)$ عندئذ
$$g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\,u_1,y+t\,u_2)-f(x,y)}{t} = D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$$
أيضاً $g(t) = f(r,v)$ حيث $r = x+t\,u_1$ و $v = y+t\,u_2$
من قاعدة السلسلة نجد أن $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dt}$
$$g'(t) = f_r(r,v)\ u_1 + f_v(r,v)\ u_2$$
بوضع $t = 0$ نجد أن $r = x$ و $v = y$ وبالتالي $g'(0) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)\ u_2$
أي أن $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y) = f_x(x,y)\ u_1 + f_y(x,y)\ u_2 = \overrightarrow{\nabla} f(x,y)\cdot\overrightarrow{u}$

مثال : إذا كانت $f(x,y) = x^2 + y^2$
(1) أحسب تدرج الدالة f عند أي نقطة $P(x,y)$
(2) احسب الإشتقاق الإتجاهي للدالة f عند النقطة $(2,3)$ في اتجاه $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$
الحل :
(1) $f_x(x,y) = 2x$ و $f_y(x,y) = 2y$ وبالتالي $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = 2x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j}$
(2) $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{i} - \dfrac{4}{5}\overrightarrow{j}$
$f_x(2,3) = 2(2) = 4$ و $f_y(2,3) = 2(3) = 6$
$$D_{\overrightarrow{u}}f(2,3) = 4\left(\frac{3}{5}\right) + 6\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{12}{5} - \frac{24}{5} = -\frac{12}{5}$$

نظرية :

إذا كانت f دالة في متغيرين وقابلة للإشتقاق عند النقطة $P(x,y)$ وكان $\overrightarrow{u}$ متجه وحدة فإن

(1) أعلى قيمة للمقدار $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ عند النقطة $P(x,y)$ هي $\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|$

أدنى قيمة للمقدار $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ عند النقطة $P(x,y)$ هي $-\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|$

(2) أعلى معدل للزيادة في قيمة $f(x,y)$ عند $P(x,y)$ يتحقق في اتجاه $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)$

أدنى معدل للزيادة في قيمة $f(x,y)$ عند $P(x,y)$ يتحقق في عكس اتجاه $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)$

البرهان : لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)$

(1) $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)=\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\cdot\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|\,\|\overrightarrow{u}\|\,\cos\theta$

بما أن $\|\overrightarrow{u}\|=1$ و $-1\le\cos\theta\le 1$ فإن

$-\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|\le D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)=\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|\,\cos\theta\ \le\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|$

(2) معدل الزيادة في قيمة $f(x,y)$ عند النقطة $P(x,y)$ هو $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ ،

من (1) أعلى معدل للزيادة هو $\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|$ ويتحقق عندما $\cos\theta=1$ أي عندما $\theta=0$ أي في نفس اتجاه المتجه $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)$

أدنى معدل للزيادة هو $-\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|$ ويتحقق عندما $\cos\theta=-1$ أي عندما $\theta=\pi$ أي في عكس اتجاه المتجه $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)$

تعريف (الإشتقاق الإتجاهي في الفضاء الثلاثي) :

إذا كانت $w=f(x,y,z)$ دالة في ثلاثة متغيرات و $\overrightarrow{u}=u_1\overrightarrow{i}+u_2\overrightarrow{j}+u_3\overrightarrow{k}$ متجه وحدة ، فإن الإشتقاق الإتجاهي للدالة f عند النقطة $P(x,y,z)$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{u}$ يرمز له بالرمز $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y,z)$ يعرف بأنه

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t\,u_1,y+t\,u_2,z+t\,u_3)-f(x,y,z)}{t}$ متى ما كانت النهاية موجودة .

تعريف (تدرج الدالة في الفضاء الثلاثي) :

إذا كانت f دالة في ثلاثة متغيرات وقابلة للإشتقاق فإن تدرج الدالة f يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\nabla}f$ ويعرف بأنه المتجه

$\overrightarrow{\nabla}f(x,y,z)=f_x(x,y,z)\,\overrightarrow{i}+f_y(x,y,z)\,\overrightarrow{j}+f_z(x,y,z)\,\overrightarrow{k}$

نظرية :

إذا كانت f دالة في ثلاثة متغيرات وقابلة للاشتقاق وكان $\overrightarrow{u}=u_1\overrightarrow{i}+u_2\overrightarrow{j}+u_3\overrightarrow{k}$ متجه وحدة فإن

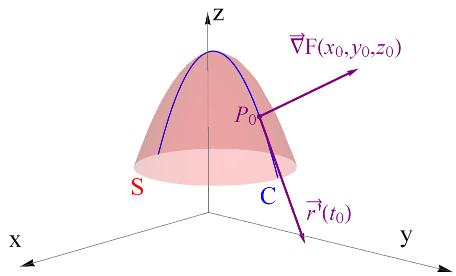
$D_{\overrightarrow{u}}f(x,y,z)=f_x(x,y,z)\,u_1+f_y(x,y,z)\,u_2+f_z(x,y,z)\,u_3=\overrightarrow{\nabla}f(x,y,z)\cdot\overrightarrow{u}$

تعريف (المستوي المماس لسطح) :

ليكن S سطح ما ولتكن P_0 نقطة تقع عليه ، يعرف المستوي المماس للسطح S عند النقطة P_0 بأنه المستوي الذي يحوي المستقيمات المماسة لجميع المنحنيات الواقعة على السطح S وتمر بالنقطة P_0 .

نظرية :

ليكن S سطحاً معطى بالمعادلة $F(x,y,z)=0$ و F لها مشتقات جزئية متصلة و $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ نقطة تقع على السطح S ، إذا كانت F_x و F_y و F_z ليست جميعها أصفاراً عند النقطة P_0 فإن $\overrightarrow{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)$ هو متجه ناظمي للمستوي المماس للسطح S عند النقطة P_0.



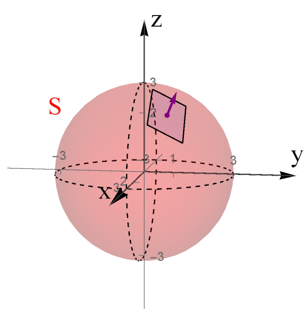
البرهان : ليكن C أي منحنى يقع على السطح S ويمر بالنقطة P_0.
ولنفرض أن المنحنى C معطى بالمعادلات الوسيطية التالية :
$t \in \mathbb{R}$ حيث $C\,:\; x = f(t)\;,\; y = g(t)\;,\; z = h(t)$
بما أن P_0 تقع على S إذاً يوجد t_0 بحيث $P_0 = \big(f(t_0), g(t_0), h(t_0)\big)$
لتكن $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ الدالة المتجهية التي بيانها المنحنى C .
نريد إثبات أن $\vec{\nabla}F\big(x_0, y_0, z_0\big)$ يتعامد على المستقيم المماس للمنحنى C عند P_0 أو ما يكافئه أن $\vec{\nabla}F\big(x_0, y_0, z_0\big)$ يتعامد على المتجه المماس $\vec{r'}(t_0)$.
بما أن المنحنى C يقع على السطح S فإن $F\big(f(t), g(t), h(t)\big) = 0$ لكل $t \in \mathbb{R}$ ، باستخدام قاعدة السلسلة نجد أن :

$$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} \implies F_x(x,y,z)\; f'(t) + F_y\; g'(t) + F_z(x,y,z)\; h'(t) = 0$$

أي أن $\vec{\nabla}F(x,y,z)\cdot\vec{r'}(t) = 0$ ، وعندما $t = t_0$ نجد أن $\vec{\nabla}F\big(x_0, y_0, z_0\big)\cdot\vec{r'}(t_0) = 0$
وبالتالي $\vec{\nabla}F\big(x_0, y_0, z_0\big)$ هو متجه ناظمي للمستوي المماس للسطح S عند النقطة P_0 .

نتيجة :
إذا كان S سطحاً معطى بالمعادلة $F(x,y,z) = 0$ حيث F لها مشتقات جزئية متصلة فإن معادلة المستوي المماس للسطح S عند النقطة $P_0\big(x_0, y_0, z_0\big)$ هي $F_x\big(x_0, y_0, z_0\big)(x - x_0) + F_y\big(x_0, y_0, z_0\big)(y - y_0) + F_z\big(x_0, y_0, z_0\big)(z - z_0) = 0$

مثال :
أوجد معادلة المستوي المماس للسطح S المعطى بالمعادلة
$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ عند النقطة $(2,1,2)$

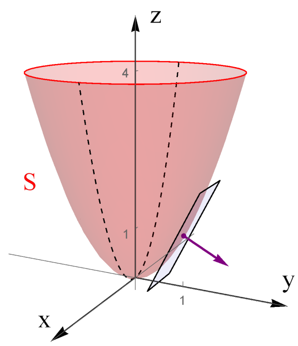


الحل :
ضع $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$
عندئذ $F(x,y,z) = 0$
$F_x(x,y,z) = 2x$ وبالتالي $F_x(2,1,2) = 4$
$F_y(x,y,z) = 2y$ وبالتالي $F_y(2,1,2) = 2$
$F_z(x,y,z) = 2z$ وبالتالي $F_z(2,1,2) = 4$
معادلة المستوي المماس للسطح S عند النقطة $(2,1,2)$ هي معادلة المستوي المار بالنقطة $(2,1,2)$ ومتجهه الناظمي $\langle 4,2,4\rangle$ وهي

$$4(x-2) + 2(y-1) + 4(z-2) = 0$$
$$2(x-2) + (y-1) + 2(z-2) = 0$$
$$2x - 4 + y - 1 + 2z - 4 = 0$$
$$2x + y + 2z = 9$$

نتيجة :
إذا كان S سطحاً معطى بالمعادلة $z = f(x,y)$ حيث f لها مشتقات جزئية متصلة فإن معادلة المستوي المماس للسطح S عند النقطة $P_0\big(x_0, y_0, z_0\big)$ هي $z - z_0 = f_x\big(x_0, y_0\big)(x - x_0) + f_y\big(x_0, y_0\big)(y - y_0)$

مثال :
أوجد معادلة المستوي المماس للسطح S المعطى بالمعادلة
$z = x^2 + y^2$ عند النقطة $(0,1,1)$



الحل :
ضع $f(x,y) = x^2 + y^2$
$f_x(x,y) = 2x$ وبالتالي $f_x(0,1) = 0$
$f_y(x,y) = 2y$ وبالتالي $f_y(0,1) = 2$
معادلة المستوي المماس للسطح S عند النقطة $(0,1,1)$ هي
$z - 1 = 0(x-0) + 2(y-1)$
$z - 1 = 2(y-1) = 2y - 2$
$-2y + z + 1 = 0$

ملاحظة :
إذا كان S سطحاً معطى بالمعادلة $F(x,y,z) = 0$ حيث F لها مشتقات جزئية متصلة وكانت $P_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة تقع على S فإن الخط المستقيم الناظمي للمستوي المماس للسطح S عند النقطة P_0 يوازي المتجه $\vec{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)$ وبالتالي فإن معادلاته الوسيطية هي

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,F_x(x_0,y_0,z_0) \\ y = y_0 + t\,F_y(x_0,y_0,z_0) \\ z = z_0 + t\,F_z(x_0,y_0,z_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - x_0 = t\,F_x(x_0,y_0,z_0) \\ y - y_0 = t\,F_y(x_0,y_0,z_0) \\ z - z_0 = t\,F_z(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$$

تمارين (6.2)

(1) احسب الإشتقاق الإتجاهي للدالة f عند النقطة P في اتجاه المتجه $\overrightarrow{a}$ فيما يلي :

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 \ , \ P(-1,2) \ , \ \overrightarrow{a} = \langle 3,-1 \rangle \quad (i)$$

$$f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y \ , \ P(2,-2) \ , \ \overrightarrow{a} = \langle 4,-3 \rangle \quad (ii)$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \ , \ P(1,-1,1) \ , \ \overrightarrow{a} = \langle -2,1,-2 \rangle \quad (iii)$$

(2) أوجد معادلة المستوي المماس للسطح المعطى بالمعادلة $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ عند النقطة $P(-2,0,0)$

(3) أوجد معادلة المستوي المماس للسطح المعطى بالمعادلة $z = 9 - x^2 - y^2$ عند النقطة $P(2,2,1)$

(4) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المستقيم الناظمي للمستوي المماس للسطح المعطى بالمعادلة $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ عند النقطة $P(-1,2,-2)$

(5) أوجد النقاط على السطح المعطى بالمعادلة $z = x^2 + y^2 + 2$ التي يكون عندها المستوي المماس موازياً للمستوي xy .

(6) أثبت أن معادلة المستوي المماس للسطح المعطى بالمعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ عند أي نقطة $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ تقع عليه هي $\frac{x\, x_0}{a^2} + \frac{y\, y_0}{b^2} + \frac{z\, z_0}{c^2} = 1$

باب 3

حساب المتجهات

1.3 حقول المتجهات

تعريف :

(1) حقل المتجهات في المستوي هو دالة متجهية $\overrightarrow{F}$ مجالها $D \subset \mathbb{R}^2$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbf{V}_2$.

إذا كانت $(x, y) \in D$ فإن $\overrightarrow{F}(x, y) = M(x, y)\overrightarrow{i} + N(x, y)\overrightarrow{j}$ حيث M و N دوال حقيقية في المتغيرين x و y .

(2) حقل المتجهات في الفضاء الثلاثي هو دالة متجهية $\overrightarrow{F}$ مجالها $D \subset \mathbb{R}^3$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbf{V}_3$.

إذا كانت $(x, y, z) \in D$ فإن $\overrightarrow{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\overrightarrow{i} + N(x, y, z)\overrightarrow{j} + P(x, y, z)\overrightarrow{k}$ حيث M و N و P دوال حقيقية في المتغيرات x و y و z .

ملاحظة :

(1) إذا كانت $K(x, y) \in D$ فإن المتجه $\overrightarrow{F}(x, y)$ يمثل هندسياً بالمتجه الذي نقطة بدايته $K(x, y)$.

(2) إذا كانت $K(x, y, z) \in D$ فإن المتجه $\overrightarrow{F}(x, y, z)$ يمثل هندسياً بالمتجه الذي نقطة بدايته $K(x, y, z)$.

مثال :

(1) صف حقل المتجهات الناتج عن الدالة المتجهية
$\overrightarrow{F}(x, y) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$

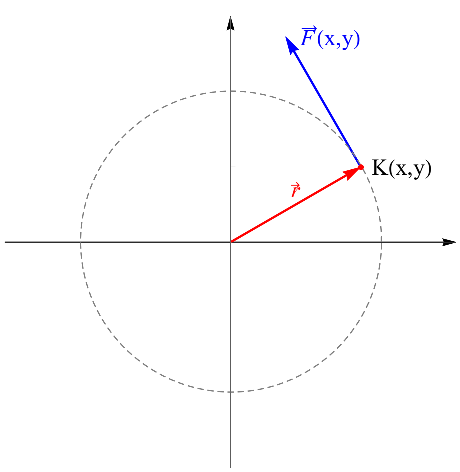
(2) أرسم المتجهات $\overrightarrow{F}(1,1)$ و $\overrightarrow{F}(-1,1)$ و $\overrightarrow{F}(-1,-1)$ و $\overrightarrow{F}(1,-1)$

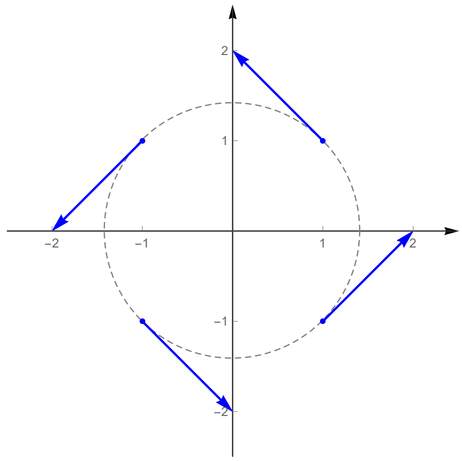
الحل :

(1) لتكن $K(x, y) \in \mathbb{R}^2$ وليكن $\overrightarrow{r}(x, y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

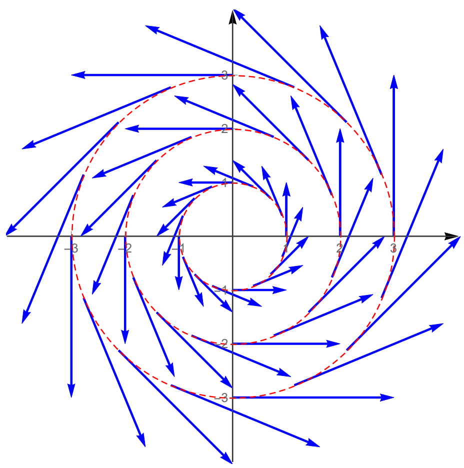
لاحظ أن $\overrightarrow{F}(x, y) \cdot \overrightarrow{r} = -xy + xy = 0$ ، أي أن المتجهين $\overrightarrow{F}(x, y)$ و $\overrightarrow{r}$ متعامدان لكل $K(x, y) \in \mathbb{R}^2$

أيضاً $\|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\overrightarrow{F}(x, y)\|$





(2) $\overrightarrow{F}(1,1) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ ، وبالتالي $\overrightarrow{F}(1,1)$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $(1,1)$ ونقطة نهايته $(0,2)$
$\overrightarrow{F}(-1,1) = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ ، وبالتالي $\overrightarrow{F}(-1,1)$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $(-1,1)$ ونقطة نهايته $(-2,0)$
$\overrightarrow{F}(-1,-1) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ ، وبالتالي $\overrightarrow{F}(-1,-1)$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $(-1,-1)$ ونقطة نهايته $(0,-2)$
$\overrightarrow{F}(1,-1) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ ، وبالتالي $\overrightarrow{F}(1,-1)$ هو المتجه الذي نقطة بدايته $(1,-1)$ ونقطة نهايته $(2,0)$



الشكل المقابل يمثل بعض المتجهات من حقل المتجهات الناتج عن $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ ، ولاحظ أن $\|\overrightarrow{F}(x,y)\|$ تزداد بازدياد قيمة $\overrightarrow{r}$.
حقل المتجهات في هذا المثال يمثل حقل متجهات السرعة الناتجة عن حركة العجلة .
يلاحظ أنه كلما كان قطر العجلة أكبر كلما كانت سرعة العجلة أكبر.

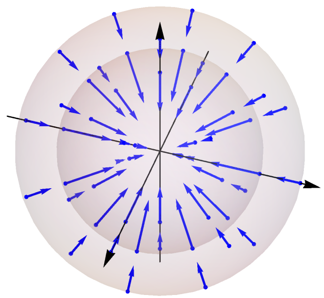
تعريف :
إذا كان $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ هو متجه الموضع للنقطة $K(x,y,z)$ فإن حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ يسمى حقلاً تربيعياً عكسياً إذا كان $F(x,y,z) = \dfrac{c}{\|\overrightarrow{r}\|^2}\overrightarrow{u}$ حيث $c \in \mathbb{R}$ و $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|}$ هو متجه الوحدة في نفس اتجاه $\overrightarrow{r}$.

مثال : صف حقل المتجهات التربيعي العكسي المعطى بالدالة $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \dfrac{-x\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} - z\,\overrightarrow{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

الحل :
ليكن $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$

$$F(x,y,z) = \frac{-x\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} - z\,\overrightarrow{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^3} = \left(\frac{-1}{\|\overrightarrow{r}\|^3}\right)\overrightarrow{r}$$

أي أن اتجاه المتجه $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ هو عكس اتجاه المتجه $\overrightarrow{r}$ لكل $K(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
أيضاً $\dfrac{1}{\|\overrightarrow{r}\|^2} = \dfrac{\|\overrightarrow{r}\|}{\|\overrightarrow{r}\|^3} = \|\overrightarrow{F}(x,y,z)\|$ ، أي أن طول المتجه $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ يتناسب عكسياً مع مربع طول المتجه $\overrightarrow{r}$



الشكل المقابل يمثل بعض المتجهات من حقل المتجهات الناتج عن الدالة $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\dfrac{-x\,\overrightarrow{i}-y\,\overrightarrow{j}-z\,\overrightarrow{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

هذا المثال يمثل حقل متجهات قوة الجذب لشحنة مثبتة على نقطة الأصل لشحنات أخرى مختلفة عنها .

نلاحظ أن قوة الجذب تكون أكبر للشحنات القريبة من الشحنة المثبتة على نقطة الأصل ، وتقل قوة الجذب كلما ابتعدت الشحنة عن الشحنة المثبتة على نقطة الأصل .

تعريف :
إذا كانت $w=f(x,y,z)$ والمشتقات الجزئية f_x و f_y و f_z موجودة فإن تدرج الدالة w يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\nabla} w$ ويعرف بأنه حقل المتجهات المعطى بالدالة $\overrightarrow{\nabla} w=f_x(x,y,z)\,\overrightarrow{i}+f_y(x,y,z)\,\overrightarrow{j}+f_z(x,y,z)\,\overrightarrow{k}$

تعريف :
نقول أن $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات محافظ إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z)$ لكل $(x,y,z)\in D$ حيث f دالة حقيقية مجالها $D\subset\mathbb{R}^3$ ، وتسمى f دالة الجهد لحقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ ، وتسمى $f(x,y,z)$ الجهد عند النقطة $K(x,y,z)$

مثال : أوجد حقلاً محافظاً دالة الجهد له هي $f(x,y,z)=x\tan^{-1}(yz)$

الحل :
$f_x(x,y,z)=\tan^{-1}(yz)$ و $f_y(x,y,z)=\dfrac{xz}{1+y^2z^2}$ و $f_z(x,y,z)=\dfrac{xy}{1+y^2z^2}$

وبالتالي حقل المتجهات المحافظ هو $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\tan^{-1}(yz)\,\overrightarrow{i}+\dfrac{xz}{1+y^2z^2}\,\overrightarrow{j}+\dfrac{xy}{1+y^2z^2}\,\overrightarrow{k}$

نظرية : أي حقل متجهات تربيعي عكسي هو حقل محافظ .

البرهان : ليكن $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ حقلاً تربيعياً عكسياً
عندئذ $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\dfrac{cx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\overrightarrow{i}+\dfrac{cy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\overrightarrow{j}+\dfrac{cz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\overrightarrow{k}$ حيث $c\in\mathbb{R}$

بوضع $f(x,y,z)=\dfrac{-c}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-c\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_x=(-c)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2x)=\frac{cx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

أيضاً $f_y=(-c)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2y)=\dfrac{cy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

أيضاً $f_z=(-c)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2z)=\dfrac{cz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

أي أن $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\overrightarrow{i} + f_y(x,y,z)\overrightarrow{j} + f_z(x,y,z)\overrightarrow{k}$
وبالتالي حقل المتجهات التربيعي العكسي $\overrightarrow{F}$ هو حقل محافظ .

ملاحظة :
في الفضاء الثلاثي نكتب المؤثر التفاضلي $\overrightarrow{\nabla}$ على الشكل $\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}$
وبالتالي إذا كانت f دالة في الفضاء الثلاثي فإن $\overrightarrow{\mathbf{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}$

تعريف :
إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\overrightarrow{i} + N(x,y,z)\overrightarrow{j} + P(x,y,z)\overrightarrow{k}$ حقل متجهات ، والدوال الحقيقية M و N و P لها مشتقات جزئية في منطقة ما ، عندئذ نرمز لدوران حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ بالرمز $\mathbf{curl}\overrightarrow{F}$ ويعرف كالتالي

$$\mathbf{curl}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

أي أن
$$\mathbf{curl}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

تعريف :
إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\overrightarrow{i} + N(x,y,z)\overrightarrow{j} + P(x,y,z)\overrightarrow{k}$ حقل متجهات ، والدوال الحقيقية M و N و P لها مشتقات جزئية في منطقة ما ، عندئذ نرمز لتباعد حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ بالرمز $\mathbf{div}\overrightarrow{F}$ ويعرف كالتالي

$$\mathbf{div}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

مثال : إذا كانت $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^3yz^2\overrightarrow{i} + xz\sin y\overrightarrow{j} + x^2y^3e^z\overrightarrow{k}$
أحسب $\mathbf{curl}\overrightarrow{F}$ و $\mathbf{div}\overrightarrow{F}$
الحل :

$$\mathbf{curl}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3yz^2 & xz\sin y & x^2y^3e^z \end{vmatrix}$$
$$= \left(3x^2y^2e^z - x\sin y\right)\overrightarrow{i} + \left(2x^3yz - 2xy^3e^z\right)\overrightarrow{j} + \left(z\sin y - x^3z^2\right)\overrightarrow{k}$$
$$\mathbf{div}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3yz^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(xz\sin y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y^3e^z\right) = 3x^2yz^2 + xz\cos y + x^2y^3e^z$$

مثال : لتكن f دالة حقيقية و $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات ، ولتكن المشتقات الجزئية موجودة ، أثبت أن
$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\left[f\overrightarrow{F}\right] = f\left[\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F}\right] + \left[\overrightarrow{\nabla}f\right]\cdot\overrightarrow{F}$$
الحل :
لتكن $\overrightarrow{F} = M\overrightarrow{i} + N\overrightarrow{j} + P\overrightarrow{k}$ حيث M و N و P دوال حقيقية في المتغيرات x و y و z ومشتقاتها الجزئية موجودة .
ولنفرض أن المشتقات الجزئية للدالة f موجودة .
$$f\overrightarrow{F} = (fM)\overrightarrow{i} + (fN)\overrightarrow{j} + (fP)\overrightarrow{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\left[f\vec{F}\right] &= \frac{\partial}{\partial x}(fM)+\frac{\partial}{\partial y}(fN)+\frac{\partial}{\partial z}(fP)\\
&= f\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}M+f\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}N+f\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}P\\
&= f\left[\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial x}M+\frac{\partial f}{\partial y}N+\frac{\partial f}{\partial z}P\right]\\
&= f\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right]+\left[\vec{\nabla}f\right]\cdot\vec{F}
\end{aligned}$$

تمارين (1.3)

(1) أرسم بعضاً من متجهات حقل المتجهات الناتج عن ما يلي :

$(i)\ \vec{F}(x,y) = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$ $\quad (ii)\ \vec{F}(x,y) = \dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (iii)\ \vec{F}(x,y) = 4\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

$(iv)\ \vec{F}(x,y,z) = -x\,\vec{i} - y\,\vec{j} - z\,\vec{k}$ $\quad (v)\ \vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

(2) في ما يلي أوجد حقل المتجهات المحافظ الذي دالة الجهد له معطاة بالدالة :

$(i)\ f(x,y) = x^2e^{3x}$ $\quad (ii)\ f(x,y) = \tan^{-1}(xy)$

$(iii)\ f(x,y,z) = x^3 + 4y^2 + z^4$ $\quad (iv)\ f(x,y,z) = \cos(x^2+y^2+z^2)$

(3) أحسب $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ و $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ في مايلي :

$(i)\ \vec{F}(x,y,z) = xz^2\,\vec{i} + x\sin y\,\vec{j} + ye^{3x}\,\vec{k}$ $\quad (ii)\ \vec{F}(x,y,z) = z\ln x\ \vec{i} - xe^{-y}\,\vec{j} + (y+z^2)\,\vec{k}$

(4) إذا كان $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ فأثبت أن :

$(i)\ \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$ $\quad (ii)\ \vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$ $\quad (iii)\ \vec{\nabla}\|\vec{r}\| = \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$

(5) إذا كان $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ وكان $\vec{a}$ متجهاً ثابتاً فأثبت أن :

$(i)\ \operatorname{curl}\left(\vec{a} \times \vec{r}\right) = 2\vec{a}$ $\quad (ii)\ \operatorname{div}\left(\vec{a} \times \vec{r}\right) = 0$

(6) إذا كان $\vec{F}$ حقل متجهات محافظ فأثبت أن $\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{0}$.

(7) إذا كان $\vec{F}$ حقل متجهات تربيعي عكسي فأثبت أن $\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{0}$ و $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

(8) إذا كان $\vec{F}$ و $\vec{G}$ حقلي متجهات و f دالة حقيقية ، فأثبت ما يلي :

$(i)\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$

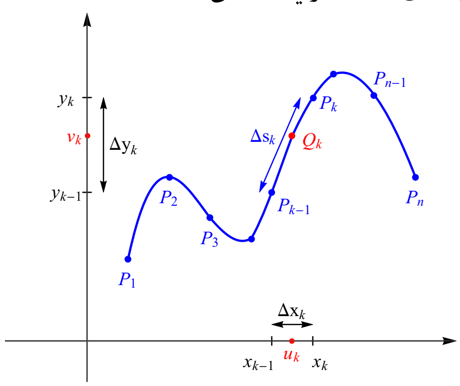
$(ii)\ \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$

$(iii)\ \vec{\nabla} \times \left(f\,\vec{F}\right) = f\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) + \left(\vec{\nabla} f\right) \times \vec{F}$

2.3 التكامل على منحنى

التكامل على منحنى في المستوي :

ليكن C سطحاً ناعماً معطى بالمعادلات الوسيطية $x = g(t)\ ,\ y = h(t),\ \ a \le t \le b$ حيث g' و h' دالتان متصلتان ولاتساويان الصفر معاً على الفترة $[a,b]$ ، ولتكن f دالة في المتغيرين x و y متصلة في نطاق ما D يحوي المنحنى C .



بتجزئة الفترة $[a,b]$ إلى فترات جزئية كالتالي

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$

وليكن $\|\Delta\| = \max|t_k - t_{k-1}|$ حيث $1 \le k \le n$

إذا كانت $P(x_k, y_k)$ هي النقطة الواقعة على C والمقابلة لقيمة الوسيط t_k فإن النقاط $P_1, P_2, \cdots, P_n$ تجزئ المنحنى C إلى n أقواس جزئية $\widehat{P_{k-1}P_k}$ لكل $1 \le k \le n$.

لتكن $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ و $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ و Δs_k هو طول القوس الجزئي $\widehat{P_{k-1}P_k}$.

لكل k لتكن $Q(u_k, v_k)$ نقطة واقعة على القوس الجزئي $\widehat{P_{k-1}P_k}$ وناتجة عن اختيار عدد ما في الفترة الجزئية $[t_{k-1}, t_k]$

إذا كانت النهايات $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_k f(u_k, v_k)\ \Delta s_k$ و $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_k f(u_k, v_k)\ \Delta x_k$ و $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_k f(u_k, v_k)\ \Delta y_k$ موجودة فإن تكامل الدالة f على المنحنى C بالنسبة للمتغيرات s و x و y على الترتيب هو :

$$(1)\quad \int_C f(x,y)\ ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta s_k$$

$$(2)\quad \int_C f(x,y)\ dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta x_k$$

$$(3)\quad \int_C f(x,y)\ dy = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta y_k$$

نظرية :

إذا كان C منحنى ناعم معطى بالمعادلات الوسيطية $x = g(t)\ ,\ y = h(t)\ ,\ a \le t \le b$ وكانت f دالة في المتغيرين x و y متصلة على نطاق ما D يحوي المنحنى C فإن :

$$(1)\quad \int_c f(x,y)\ ds = \int_a^b f\left(g(t), h(t)\right)\ \sqrt{\left[g'(t)\right]^2 + [h'(t)]^2}\ dt$$

$$(2)\quad \int_c f(x,y)\ dx = \int_a^b f\left(g(t), h(t)\right)\ g'(t)\ dt$$

$$(3)\quad \int_c f(x,y)\ dy = \int_a^b f\left(g(t), h(t)\right)\ h'(t)\ dt$$

البرهان :

لاحظ أن $x = g(t)$ و $y = h(t)$

$$(1)\quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = \sqrt{\left[g'(t)\right]^2 + [h'(t)]^2}\ dt \quad \text{حيث } a \le t \le b$$

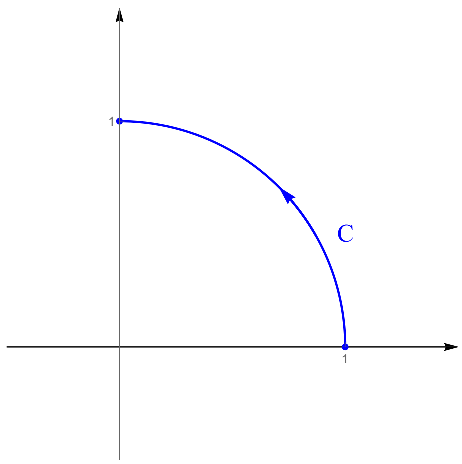
وبالتالي $\displaystyle\int_c f(x,y)\ ds = \int_a^b f\left(g(t), h(t)\right)\ \sqrt{\left[g'(t)\right]^2 + [h'(t)]^2}\ dt$

(2) $x = g(t) \implies dx = g'(t)\ dt$ حيث $a \le t \le b$

وبالتالي $\displaystyle\int_c f(x,y)\ dx = \int_a^b f\left(g(t), h(t)\right)\ g'(t)\ dt$

(3) $dy = h'(t)\,dt \implies y = h(t)$ حيث $a \le t \le b$

وبالتالي $\int_c f(x,y)\,dy = \int_a^b f\big(g(t),h(t)\big)\,h'(t)\,dt$



مثال :

إذا كان C هو المنحنى المعطى بالمعادلات الوسيطية :

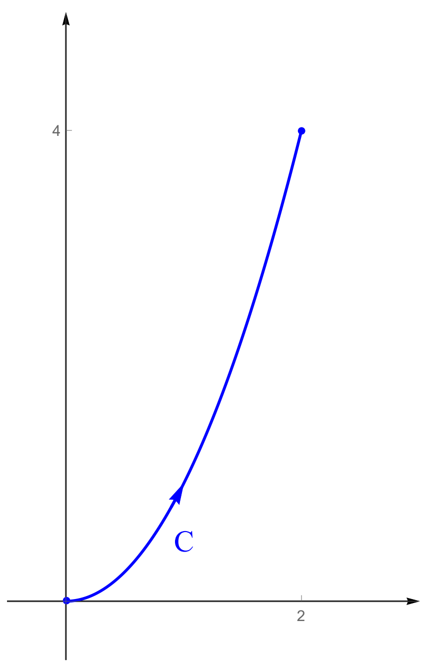
$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ ، $x = \cos t\,,\ y = \sin t\,,$ أحسب $\int_C xy^2\,ds$

الحل : لاحظ أن C هو الربع الأول من دائرة الوحدة .

$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(\sin t)^2 \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\,\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\cos t\,dt = \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$



مثال :

إذا كان المنحنى C هو القطع المكافئ $y = x^2$ من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(2,4)$ ، أحسب $\int_C xy^2\,dx$ و $\int_C xy^2\,dy$

الحل : المنحنى C يمكن كتابته بالمعادلات الوسيطية التالية :

$x = t\,,\ y = t^2\,,\ 0 \le t \le 2$

في هذه الحالة $dx = dt \implies x = t$ و $dy = 2t\,dt \implies y = t^2$

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^2 t(t^2)^2 dt = \int_0^2 t^5\,dt$$

$$= \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^2 = \frac{2^6}{6} - 0 = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^2 t(t^2)^2(2t)\,dt = \int_0^2 2t^6\,dt$$

$$= \left[\frac{2t^7}{7}\right]_0^2 = \frac{2(2^7)}{7} - 0 = \frac{2^8}{7} = \frac{256}{7}$$

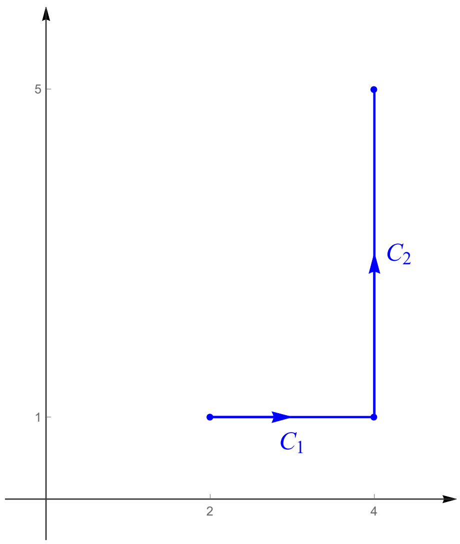
ملاحظة :

إذا كان المنحنى C معطى بالدالة $y = g(x)$ حيث $a \le x \le b$ فإن المعادلات الوسيطية للمنحنى C هي

$x = t\,,\ y = g(t)\,,\ a \le t \le b$ وفي هذه الحالة $\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f\big(t,g(t)\big)\,dt = \int_a^b f\big(x,g(x)\big)\,dx$

وأيضاً $\int_c f(x,y)\ dy = \int_a^b f\left(t, g(t)\right)\ g'(t)\ dt = \int_a^b f\left(x, g(x)\right)\ g'(x)\ dx$

مثال : أحسب $\int_C xy\ dx + x^2\ dy$ إذا كان



(1) المنحنى C يتكون من القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(2,1)$ و $(4,1)$ والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(4,1)$ و $(4,5)$

الحل :

ليكن C_1 القطعة المستقيمة الواصلة بين $(2,1)$ و $(4,1)$ عندئذ
$x = t\ ,\ y = 1\ ,\ 2 \le t \le 4$ وبالتالي $dx = dt$ و $dy = 0$

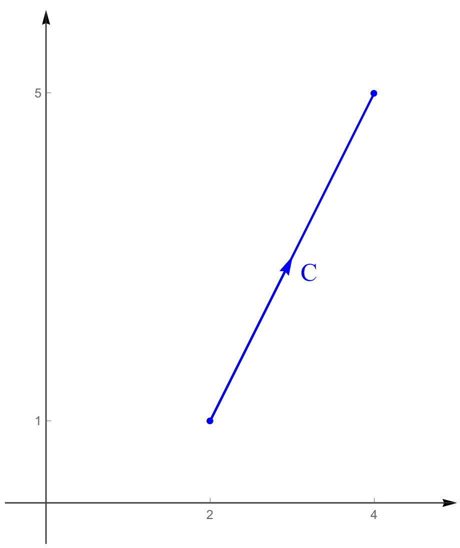
ليكن C_2 القطعة المستقيمة الواصلة بين $(4,1)$ و $(4,5)$ عندئذ
$x = 4\ ,\ y = t\ ,\ 1 \le t \le 5$ وبالتالي $dx = 0$ و $dy = dt$

$$\int_C xy\ dx + x^2\ dy = \int_{C_1} xy\ dx + x^2\ dy + \int_{C_2} xy\ dx + x^2\ dy$$

$$\int_{C_1} xy\ dx + x^2\ dy = \int_2^4 t(1)\ dt + 0 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_2^4 = 8 - 2 = 6$$

$$\int_{C_2} xy\ dx + x^2\ dy = \int_1^5 0 + 16\ dt = [16t]_1^5 = 80 - 16 = 64$$

وبالتالي $\int_C xy\ dx + x^2\ dy = 6 + 64 = 70$



(2) المنحنى C هو الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(2,1)$ و $(4,5)$

الحل :

معادلة الخط المستقيم هي $y = 2x - 3$ حيث $2 \le x \le 4$

في هذه الحالة $dy = 2dx$

$$\int_C xy\ dx + x^2\ dy = \int_2^4 x(2x-3)\ dx + x^2\ 2dx$$

$$= \int_2^4 (2x^2 - 3x + 2x^2)\ dx = \int_2^4 (4x^2 - 3x)\ dx$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 = \left(\frac{4(4^3)}{3} - \frac{3(4^2)}{2}\right) - \left(\frac{4(2^3)}{3} - \frac{3(2^2)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{256}{3} - 24\right) - \left(\frac{32}{3} - 6\right) = \frac{170}{3}$$

ملاحظة :

لاحظ أن قيمة التكامل اختلفت باختلاف المسار بين النقطتين .

التكامل على منحنى في الفضاء الثلاثي :

إذا كان C منحنى ناعم معطى بالمعادلات الوسيطية $x = g(t)\ ,\ y = h(t)\ ,\ z = k(t),\ a \le t \le b$ وكانت f دالة في المتغيرات

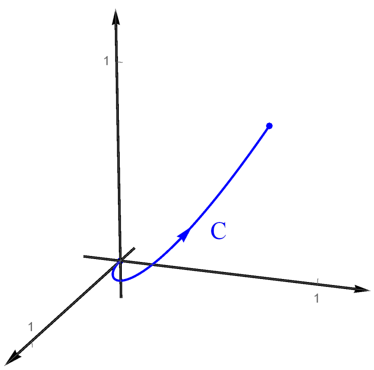
x و y و z متصلة على نطاق ما D يحوي المنحنى C فإن :

$$\int_c f(x,y,z)\ ds = \int_a^b f\left(g(t),h(t),k(t)\right)\ \sqrt{[g'(t)]^2+[h'(t)]^2+[k'(t)]^2}\ dt \quad (1)$$

$$\int_c f(x,y,z)\ dx = \int_a^b f\left(g(t),h(t),k(t)\right)\ g'(t)\ dt \quad (2)$$

$$\int_c f(x,y,z)\ dy = \int_a^b f\left(g(t),h(t),k(t)\right)\ h'(t)\ dt \quad (3)$$

$$\int_c f(x,y,z)\ dz = \int_a^b f\left(g(t),h(t),k(t)\right)\ k'(t)\ dt \quad (4)$$



مثال : أحسب $\int_C yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz$

إذا كان C هو المنحنى المعطى بالمعادلات الوسيطية

$x = t\ ,\ y = t^2\ ,\ z = t^3\ ,\ \ 0 \le t \le 1$

الحل :

لاحظ أن C هو المنحنى الملتوي التكعيبي .

$dx = dt$ و $dy = 2t\ dt$ و $dz = 3t^2\ dt$

$$\int_C yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz = \int_0^1 t^5\ dt + t^4(2t\ dt) + t^3(3t^2\ dt)$$

$$= \int_0^1 (t^5 + 2t^5 + 3t^5)\ dt = \int_0^1 6t^5\ dt = \left[t^6\right]_0^1 = 1$$

الشغل المبذول بواسطة حقل متجهات القوة على طول منحنى :

في الدرس الثالث من الفصل الأول درسنا كيفية حساب الشغل المبذول الناتج عن قوة ثابتة نقطة تطبيقها تتحرك على طول الخط المستقيم .

الآن ، ندرس كيفية حساب الشغل المبذول الناتج عن حقل متجهات القوة (بقوة متغيرة) نقطة تطبيقها تتحرك على طول المنحنى في الفضاء الثلاثي أو في المستوي .

ليكن $\overrightarrow{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\overrightarrow{i} + N(x,y,z)\overrightarrow{j} + P(x,y,z)\overrightarrow{k}$ حقل متجهات القوة ، حيث M و N و P دوال متصلة وليكن المنحنى C معطى بالمعادلات الوسيطية $x = g(t)\ ,\ y = h(t)\ ,\ z = k(t)\ ,\ a \le t \le b$. نقسم المنحنى C باستخدام النقاط $P_0, P_1, \cdots P_n$ حيث إحداثيات النقطة P_k هي $\left(x_k, y_k, z_k\right)$ لكل $0 \le k \le n$ ، نختار $\|\Delta\|$ صغيرة بما يكفي لتكون P_k قريبة جداً من P_{k+1} لكل k ، عندئذ الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على طول القوس $\widehat{P_kP_{k+1}}$ هو بالتقريب الشغل المبذول الناتج عن القوة الثابتة $\overrightarrow{F}\left(x_k, y_k, z_k\right)$ على طول القوس ds باتجاه متجه الوحدة المماس $\overrightarrow{T}$.

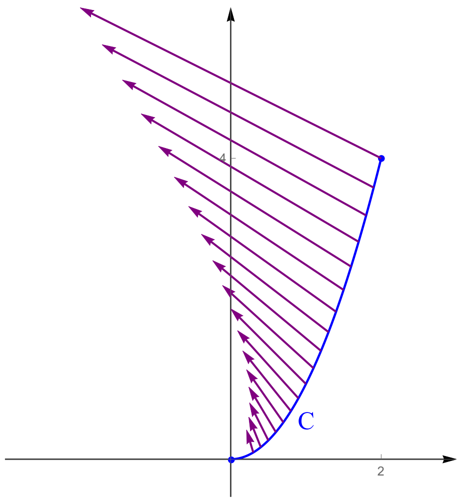
أي أن الشغل المبذول الناتج عن $\overrightarrow{F}$ على طول المنحنى C هو $\mathrm{W} = \int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{T}\ ds$

بما أن $\overrightarrow{r}(t) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ و $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{d}{ds}\overrightarrow{r}(t) = \dfrac{dx}{ds}\overrightarrow{i} + \dfrac{dy}{ds}\overrightarrow{j} + \dfrac{dz}{ds}\overrightarrow{k}$ فإن $\overrightarrow{T}\ ds = dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j} + dz\overrightarrow{k} = d\overrightarrow{r}$

وبالتالي $\mathrm{W} = \int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{T}\ ds = \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$

وبما أن $\overrightarrow{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\overrightarrow{i} + N(x,y,z)\,\overrightarrow{j} + P(x,y,z)\,\overrightarrow{k}$ فإن $W = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$

أي أن $W = \int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{T}\,ds = \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$



مثال : إذا كان المنحنى C هو القطع المكافئ الواصل بين النقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$ وكانت $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ ، أحسب الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على طول المنحنى C .

الحل : المعادلات الوسيطية للمنحنى C هي $x = t\ ,\ y = t^2\ ,\ 0 \le t \le 2$

لاحظ أن $M(x,y) = -y$ و $N(x,y) = x$

$$W = \int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \int_C -y\,dx + x\,dy$$

$$= \int_0^2 -t^2\,dt + t(2t)\,dt = \int_0^2 (-t^2 + 2t^2)\,dt$$

$$= \int_0^2 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

مثال :

إذا كان C هو المنحنى الملتوي التكعيبي المعطى بالمعادلات الوسيطية $x = t\ ,\ y = t^2\ ,\ z = t^3\ ,\ 0 \le t \le 2$ وكانت $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y^2\,\overrightarrow{i} + z\,\overrightarrow{j} + x^2\,\overrightarrow{k}$ أحسب الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على طول المنحنى C .

الحل :

لاحظ أن $M(x,y,z) = y^2$ و $N(x,y,z) = z$ و $P(x,y,z) = x^2$

أيضاً $dx = dt$ و $dy = 2t\,dt$ و $dz = 3t^2\,dt$

$$W = \int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz = \int_C y^2 dx + z\,dy + x^2\,dz$$

$$= \int_0^2 (t^2)^2\,dt + t^3(2t)\,dt + t^2(3t^2)\,dt = \int_0^2 (t^4 + 2t^4 + 3t^4)\,dt = \int_0^2 6t^4\,dt = \left[\frac{6t^5}{5}\right]_0^2 = \frac{6(32)}{5} = \frac{192}{5}$$

تمارين (2.3)

(1) أحسب $\int_C f(x,y)\ ds$ و $\int_C f(x,y)\ dx$ و $\int_C f(x,y)\ dy$ في مايلي :

$f(x,y) = x^3 - y\ ;\ \ C:\ x = 2t\ ,\ y = t^3\ ;\ 0 \le t \le 1$ (i)

$f(x,y) = x^{\frac{2}{5}} y\ ;\ \ C:\ x = t^{\frac{5}{2}}\ ,\ y = \dfrac{t}{2}\ ;\ 0 \le t \le 1$ (ii)

(2) أحسب $\int_C (x+y)\ dx + x\ dy$ حيث C منحنى الدالة $y = x^2 + x$ من $(0,0)$ إلى $(2,6)$.

(3) أحسب $\int_C y\ dx + (x-y)\ dy$ حيث C منحنى الدالة $x = y^2$ من $(1,-1)$ إلى $(1,1)$.

(4) أحسب $\int_C (x-y)\ dx + xy\ dy$ حيث C هو :

(i) الخط المستقيم المار بالنقطة $(0,0)$ ثم $(1,0)$ ثم $(1,3)$.

(ii) الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(0,0)$ و $(1,3)$.

(iii) منحنى الدالة $y = 3x^2$ من $(0,0)$ إلى $(1,3)$.

(5) أحسب $\int_C xy\ dx + z\ dy + x\ dz$ حيث $C\ :\ x = e^t\ ,\ y = e^{-t}\ ,\ z = e^{2t}\ ;\ \ 0 \le t \le 1$.

(6) أحسب $\int_C z\ dx - x\ dy + y\ dz$ حيث $C\ :\ x = \sin t\ ,\ y = 3\sin t\ ,\ z = \sin^2 t\ ;\ \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

(7) (i) أحسب الشغل المبذول بالدالة $\overrightarrow{F}(x,y) = x^2 y\,\overrightarrow{i} + xy\,\overrightarrow{j}$ على طول المنحنى C المعرف بالدالة $y = x^3$ من $(0,0)$ إلى $(2,8)$.

(ii) أحسب الشغل المبذول بالدالة $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ على النصف العلوي للدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ من $(-a,0)$ إلى $(a,0)$.

(8) إذا كان جسم ما يتحرك خلال حقل متجهات قوة $\overrightarrow{F}$ بحيث يكون متجه السرعة يتعامد مع المتجه $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ عند كل نقطة (x,y,z) ، أثبت أن الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على الجسم يساوي الصفر .

3.3 الاستقلالية عن المسار (عدم الاعتماد على المسار)

في هذا الدرس سنعتبر المنطقة $D\subset\mathbb{R}^2$ مفتوحة ومترابطة . ونقصد بأن D مفتوحة أي أن لكل نقطة $A\in D$ يوجد قرص مركزه النقطة A ويقع بالكامل داخل المنطقة D ، ونقصد بأن D مترابطة إذا أمكن وصل أي نقطتين في D بمنحنى ناعم قطعة بقطعة ويقع بالكامل داخل المنطقة D .

لتكن (x_0,y_0) و (x_1,y_1) نقطتين مختلفتين في المنطقة المفتوحة والمترابطة D و C منحنى يقع في D ويصل بين النقطتين (x_0,y_0) و (x_1,y_1) ، نقول أن التكامل $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ لا يعتمد على المسار إذا كان $\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ حيث C_1 و C_2 أي منحنيين يقعان في D ويصلان بين النقطتين (x_0,y_0) و (x_1,y_1) .

وفي هذه الحالة نكتب $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

نظرية :

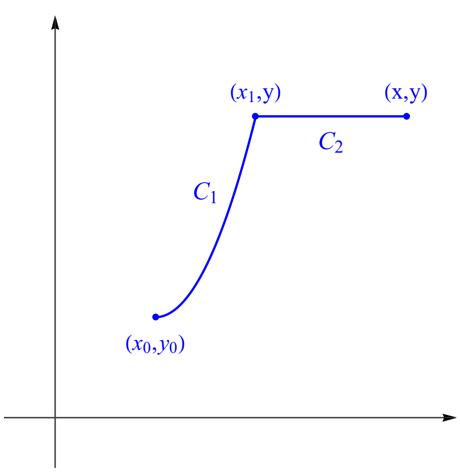
إذا كانت $\vec{F}(x,y)=M(x,y)\vec{i}+N(x,y)\vec{j}$ دالة متجهية متصلة على منطقة مفتوحة ومترابطة D ، عندئذ التكامل $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ لا يعتمد على المسار إذا وفقط إذا كانت $\vec{F}(x,y)=\vec{\nabla}f(x,y)$ حيث f دالة حقيقية في المتغيرين x و y .

البرهان :

$(\Longleftarrow)$ لنفرض أن التكامل لا يعتمد على المسار في D . إذا كانت (x_0,y_0) نقطة مثبتة في D نعرف الدالة الحقيقية

$f(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ لكل $(x,y)\in D$

نختار $x\neq x_1$ ، وليكن C_1 أي منحنى يقع في D ويصل بين النقطتين (x_0,y_0) و (x_1,y) ، و المنحنى C_2 هو الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (x_1,y) و (x,y) عندئذ



$$f(x,y)=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y)}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{(x_1,y)}^{(x,y)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

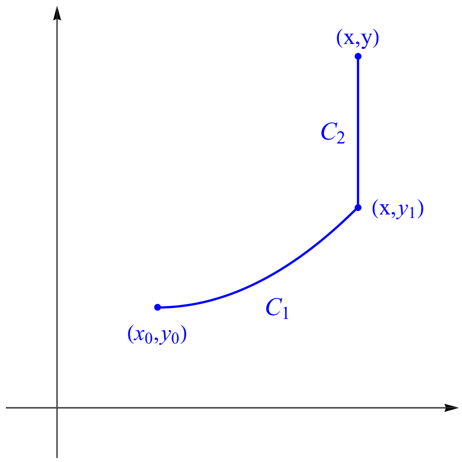
بما أن التكامل الأول لا يعتمد على x فإن

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0+\frac{\partial}{\partial x}\int_{(x_1,y)}^{(x,y)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

وبما أن $\vec{F}\cdot d\vec{r}=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$ و y ثابتة على C_2 فإن $dy=0$ وبالتالي $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_{(x_1,y)}^{(x,y)}M(u,y)\,du$

بما أن y ثابتة على C_2 فيمكننا اعتبار الدالة $M(x,y)$ دالة في المتغير x فقط

وبالتالي $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=M(x,y)$



نختار $y \neq y_1$ ، وليكن C_1 أي منحنى يقع في D ويصل بين النقطتين (x_0, y_0) و (x, y_1) ، و المنحنى C_2 هو الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (x, y_1) و (x, y) عندئذ

$$f(x,y) = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{(x,y_1)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

بما أن التكامل الأول لا يعتمد على y فإن

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial y}\int_{(x,y_1)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

وبما أن $\vec{F}\cdot d\vec{r} = M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy$ و x ثابتة على C_2 فإن $dx = 0$ وبالتالي $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{(x,y_1)}^{(x,y)} N(x,v)\ dv$

بما أن x ثابتة على C_2 فيمكننا اعتبار الدالة $N(x,y)$ دالة في المتغير y فقط

وبالتالي $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = N(x,y)$

أي أن $\vec{\nabla} f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j} = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j} = \vec{F}(x,y)$

لاحظ أن $\vec{F}$ في هذه الحالة هو حقل متجهات محافظ .

$(\Longrightarrow)$ لنفرض أن $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y)$ أي أن $M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j} = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$

لتكن $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ أي نقطتين مختلفتين في D وليكن C أي منحنى ناعم قطعة بقطعة يقع في المنطقة D ويصل بين النقطتين A و B ولنفرض أن المعادلات الوسيطية للمنحنى C هي $x = g(t)\ ,\ y = h(t)\ , t_1 \le t \le t_2$ ، عندئذ

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = \int_C f_x(x,y)\ dx + f_y(x,y)\ dy$$

بما أن $f(x,y) = f\left(g(t), h(t)\right)$ فمن قاعدة السلسلة $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

وبالتالي $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} f_x\left(g(t),h(t)\right)g'(t)\ dt + f_y\left(g(t),h(t)\right)h'(t)\ dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[f_x\left(g(t),h(t)\right)g'(t) + f_y\left(g(t),h(t)\right)h'(t)\right]\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[f\left(g(t),h(t)\right)\right]\ dt$$
$$= f\left(g(t_2), h(t_2)\right) - f\left(g(t_1), h(t_1)\right) = f\left(x_2,y_2\right) - f\left(x_1,y_1\right)$$

أي أن التكامل يعتمد فقط على النقطتين A و B ولا يعتمد على المسار الواصل بينهما .

ملاحظة : يمكن تعميم النظرية السابقة للمنحنيات الناعمة قطعة بقطعة ، وذلك بتجزئ أي منحنى إلى عدد منته من المنحنيات الناعمة .

نتيجة :

(1) لتكن $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ دالة متجهية متصلة على منطقة مفتوحة ومترابطة D ، وليكن C أي منحنى ناعم قطعة بقطعة يقع في D ويصل بين النقطتين $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ ، إذا كانت $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y)$ فإن

$$\int_C M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left[f(x,y)\right]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = f\left(x_2,y_2\right) - f\left(x_1,y_1\right)$$

(2) إذا كان $\vec{F}$ حقل متجهات قوى محافظ فإن الشغل المبذول على أي مسار C يصل النقطتين A و B يساوي الفرق في قيمة دالة الجهد عند النقطتين A و B .

تعريف : نقول أن المنطقة D بسيطة الترابط إذا كانت النقاط المحصورة داخل أي منحنى مغلق C تقع جميعها في المنطقة D أي أن المنطقة ليس بها ثقوب .

نظرية :
إذا كانت $M(x,y)$ و $N(x,y)$ لهما مشتقات جزئية متصلة على منطقة D بسيطة الترابط فإن التكامل $\int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ لا يعتمد على المسار في D إذا وفقط إذا كانت $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

البرهان :
($\Longleftarrow$) لنفرض أن التكامل $\int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ لا يعتمد على المسار عندئذ توجد دالة $f(x,y)$ بحيث

$$M(x,y) = f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \text{ و } N(x,y) = f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

وبالتالي $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ و $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

بما أن M و N لهما مشتقات جزئية متصلة فإن f لها مشتقات جزئية من الرتبة الثانية ومتصلة أي أن $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ومنها نحصل على $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

($\Longrightarrow$) البرهان صعب ويمكن للطالب الرجوع إلى كتب مقررات التحليل في عدة متغيرات للإطلاع عليه .

نظرية :
إذا كانت $M(x,y,z)$ و $N(x,y,z)$ و $P(x,y,z)$ لها مشتقات جزئية متصلة على منطقة $D \subset \mathbb{R}^3$ بسيطة الترابط فإن التكامل $\int_C M(x,y,z)\,dx + N(x,y,z)\,dy + P(x,y,z)\,dz$ لا يعتمد على المسار في D إذا وفقط إذا كانت

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ و } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \text{ و } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}$$

او ما يكافئه
$$\operatorname{curl}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$$

نتيجة :
إذا كان $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات قوى محافظ معرف على منطقة بسيطة الترابط D وكان C أي منحنى مغلق يقع في D فإن الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على المسار المغلق C يساوي الصفر .

مثال : حدد ما إذا كان التكامل $\int_C x^2 y\,dx + 3xy^2\,dy$ يعتمد على المسار .
الحل : لاحظ أن $M(x,y) = x^2 y$ و $N(x,y) = 3xy^2$
$\dfrac{\partial M}{\partial y} = x^2$ و $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$ أي أن $\dfrac{\partial N}{\partial x} \neq \dfrac{\partial M}{\partial y}$ أي أن التكامل يعتمد على المسار .

مثال : إذا كانت $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x+y^3)\overrightarrow{i} + (3xy^2+4)\overrightarrow{j}$
(1) بين أن التكامل $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ لا يعتمد على المسار .
(2) أوجد دالة الجهد f للدالة $\overrightarrow{F}$

(3) أحسب التكامل $\int_{(0,1)}^{(2,3)} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$

الحل :

(1) $M(x,y)=2x+y^3$ و $N(x,y)=3xy^2+4$

بما أن $\dfrac{\partial N}{\partial x}=3y^2=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ فإن $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ لا يعتمد على المسار .

(2) دالة الجهد f تحقق $f_x(x,y)=M(x,y)$ و $f_y(x,y)=N(x,y)$

$f_x(x,y)=M(x,y)=2x+y^3 \implies f(x,y)=x^2+xy^3+g(y)$ (بإجراء التكامل بالنسبة للمتغير x)

$f_y(x,y)=N(x,y)=2x+y^3 \implies 3xy^2+g'(y)=3xy^2+4$ (بالإشتقاق بالنسبة للمتغير y)

أي أن $g'(y)=4 \implies g(y)=4y+c$ (بإجراء التكامل بالنسبة للمتغير y)

وبالتالي دالة الجهد هي $f(x,y)=x^2+xy^3+4y+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

(3) $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (2x+y^3)dx+(3xy^2)dy=\left[x^2+xy^3+4y\right]_{(0,1)}^{(2,3)}=(4+54+12)-4=66$

مثال : إذا كانت $\overrightarrow{F}(x,y,z)=y^2\cos x\,\overrightarrow{i}+(2y\sin x+e^{2z})\overrightarrow{j}+2ye^{2z}\overrightarrow{k}$

(1) بين أن التكامل $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ لا يعتمد على المسار .

(2) أوجد دالة الجهد f للدالة $\overrightarrow{F}$

(3) إذا كان $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات قوة فأوجد الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على طول المنحنى C الواصل بين النقطتين $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2},3,2\right)$

الحل : لاحظ أن $M(x,y,z)=y^2\cos x$ و $N(x,y,z)=2y\sin x+e^{2z}$ و $P(x,y,z)=2ye^{2z}$

(1) $$\operatorname{curl}\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos x & 2y\sin x+e^{2z} & 2ye^{2z} \end{vmatrix}=\left(2e^{2z}-2e^{2z}\right)\overrightarrow{i}-(0-0)\overrightarrow{j}+(2y\cos x-2y\cos x)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}$$

أي أن التكامل $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ لا يعتمد على المسار .

(2) دالة الجهد f تحقق $f_x(x,y,z)=M(x,y,z)$ و $f_y(x,y,z)=N(x,y,z)$ و $f_z(x,y,z)=P(x,y,z)$.

$f_x(x,y,z)=y^2\cos x \implies f(x,y,z)=y^2\sin x+g(y,z)$ (بإجراء التكامل بالنسبة للمتغير x)

$f_y(x,y,z)=2y\sin x+g_y(y,z)=2y\sin x+e^{2z} \implies g_y(y,z)=e^{2z}$ (بإجراء الإشتقاق بالنسبة للمتغير y)

$g(y,z)=ye^{2z}+h(z)$ (بإجراء التكامل بالنسبة للمتغير y)

أي أن $f(x,y,z)=y^2\sin x+ye^{2z}+h(z)$

$f_z(x,y,z)=2y^{2z}+h'(z)=2y^{2z} \implies h'(z)=0 \implies h(z)=c$ (بإجراء الإشتقاق بالنسبة للمتغير z)

أي أن دالة الجهد هي $f(x,y,z)=y^2\sin x+ye^{2z}+c$

(3) $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\left[y^2\sin x_+ye^{2z}\right]_{(0,1,\frac{1}{2})}^{(\frac{\pi}{2},3,2)}=\left(9+3e^4\right)-(0+e)=9+3e^4-e$

تعريف : إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ حقل متجهات محافظ و f هي دالة الجهد له فإن طاقة الجهد $p(x,y,z)$ للجسيم عند النقطة (x,y,z) هي $p(x,y,z)=-f(x,y,z)$ وأيضاً $\overrightarrow{F}(x,y,z)=-\overrightarrow{\nabla}p(x,y,z)$.

إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين و C هو المنحنى الواصل بينهما فإن الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على طول المنحنى C هو

$$\mathrm{W}=\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\left[-p(x,y,z)\right]_A^B=p(A)-p(B)$$

تمارين (3.3)

(1) حدد في مايلي ما إذا كان $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ يعتمد على المسار أم لا ، وفي حالة عدم اعتماده على المسار أحسب دالة الجهد f للدالة $\overrightarrow{F}$:

(i) $\overrightarrow{F}(x,y)=(2xy+1)\overrightarrow{i}+(x^2+y^3)\overrightarrow{j}$ $\quad$ (ii) $\overrightarrow{F}(x,y)=(e^{2x}\cos y-1)\overrightarrow{i}+(1+e^x\sin y)\overrightarrow{j}$

(iii) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(2y\sec^2 x+ze^x)\overrightarrow{i}+2\tan x\overrightarrow{j}+e^x\overrightarrow{k}$ $\quad$ (iv) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=e^z\overrightarrow{i}+4y\overrightarrow{j}-x\,e^z\overrightarrow{k}$

(2) بين أن التكاملين التاليين لا يعتمدان على المسار وأحسب قيمتيهما :

(i) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x\cos y\,dx-e^x\sin y\,dy$

(ii) $\displaystyle\int_{(1,0,1)}^{(2,3,1)} (2xy^3+z^2)\,dx+3x^2y^2\,dy+(2zx-5)\,dz$

(3) إذا كان متجه القوة $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ في اتجاه نقطة الأصل وطوله يتناسب عكسياً مع البعد عن نقطة الأصل ، فأثبت أن $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات محافظ ، وأوجد دالة الجهد له .

(4) إذا كانت $\overrightarrow{F}$ قوة ثابتة ، أثبت أن الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على طول أي منحنى نقطة بدايته P ونقطة نهايته Q يساوي $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$.

(5) لتكن $\overrightarrow{F}(x,y)=M(x,y)\overrightarrow{i}+N(x,y)\overrightarrow{j}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$ و D مجال الدالة $\overrightarrow{F}$:

(i) بين أن $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ لكل نقطة (x,y) تقع في D .

(ii) بين أن $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ يعتمد على المسار في D .

(6) ليكن $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات تربيعي عكسي بحيث $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\dfrac{c\left(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ و $c\in\mathbb{R}$ ، ولتكن P_1 و P_2 أي نقطتين في الفضاءالثلاثي بعديهما عن نقطة الأصل d_1 و d_2 على الترتيب ، أحسب الشغل المبذول بواسطة $\overrightarrow{F}$ على طول أي منحنى ناعم قطعة بقطعة يصل بين النقطتين P_1 و P_2 بدلالة d_1 و d_2 .

4.3 نظرية جرين

ليكن C منحنى ناعم في المستوي و معطى بالمعادلات الوسيطية $x = g(t)\ ,\ y = h(t)\ ,\ a \le t \le b$
(1) إذا كانت $A = \big(g(a), h(a)\big) = \big(g(b), h(b)\big) = B$ فإن C يسمى منحنى ناعم مغلق
(2) إذا كان C لايتقاطع مع نفسه فيسمى منحنى بسيط .

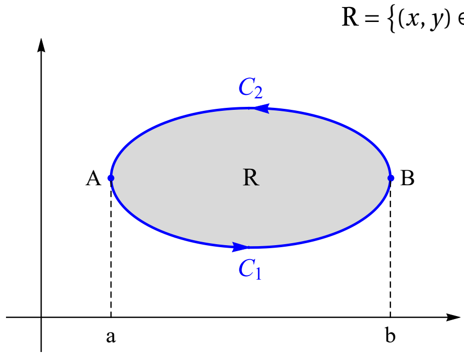
ملاحظات :
(1) نستخدم الرمز $\oint_C M\, dx + N\, dy$ للدلالة على التكامل على منحنى بسيط مغلق في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) ولمرة واحدة .
(2) نظرية جرين توضح العلاقة بين التكامل على منحنى C والتكامل الثنائي على R ، حيث R تتكون من المنحنى C ونقاطه الداخلية .

نظرية (نظرية جرين) :
ليكن C منحنى ناعم قطعة بقطعة و بسيط ومغلق ، ولتكن R هي المنطقة المكونة من المنحنى C ونقاطه الداخلية ، إذا كانت M و N متصلتين ولهما مشتقات جزئية متصلة على منطقة مفتوحة D تحوي R فإن

$$\oint_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} M(x, y)\right) dA$$

وتكتب بصورة مختصرة على الشكل $\displaystyle \oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$

البرهان :
يكفي إثبات أن $\displaystyle \oint_C M\, dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA$ و $\displaystyle \oint_C N\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dA$
يقتصر البرهان على الحالة الخاصة $\mathrm{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b\ ,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$



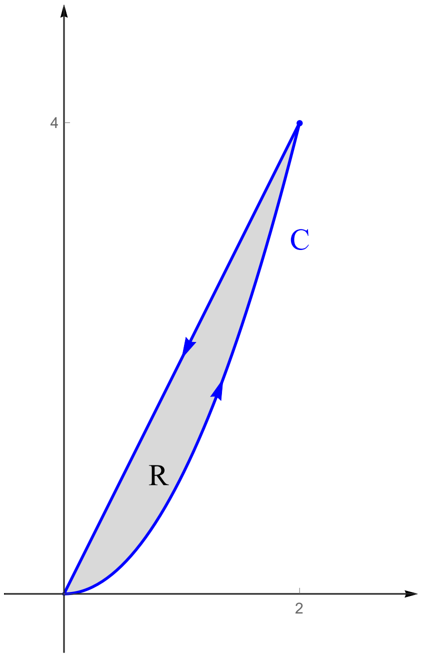
لاحظ أن المنحنى C يتكون من منحنيين C_1 معطى بالمعادلة $y = g_1(x)$ و C_2 معطى بالمعادلة $y = g_2(x)$ ، وبالتالي

$$\oint_C M\, dx = \int_{C_1} M\, dx + \int_{C_2} M\, dx$$
$$= \int_a^b M\big(x, g_1(x)\big)\, dx + \int_b^a M\big(x, g_2(x)\big)\, dx$$
$$= \int_a^b M\big(x, g_1(x)\big)\, dx - \int_a^b M\big(x, g_2(x)\big)\, dx \longrightarrow (1)$$

الآن ، حساب التكامل الثنائي على المنطقة R

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx = \int_a^b [M(x, y)]_{g_1(x)}^{g_2(x)}\, dx$$
$$= \int_a^b \big[M\big(x, g_2(x)\big) - M\big(x, g_1 x\big)\big]\, dx = \int_a^b M\big(x, g_2(x)\big)\, dx - \int_a^b M\big(x, g_1 x\big)\, dx \longrightarrow (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد أن : $\displaystyle \oint_C M\, dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA$
بطريقة مشابهة تماماً يمكن إثبات أن : $\displaystyle \oint_C N\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dA$



مثال : استخدم نظرية جرين لحساب التكامل $\oint_C 5xy\,dx + x^3 dy$ ، حيث C هو المنحنى البسيط المغلق المكون من الدالتين $y = x^2$ و $y = 2x$ من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(2,4)$.

الحل : $M(x,y) = 5xy$ و $N(x,y) = x^3$

$$\oint_C 5xy\,dx + x^3\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(5xy)\right] dA$$

$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x)dy\,dx = \int_0^2 \left[3x^2 y - 5xy\right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[(6x^3 - 10x^2) - (3x^4 - 5x^3)\right] dx$$

$$= \int_0^2 (-3x^4 + 11x^3 - 10x^2)\,dx = \left[-\frac{3x^5}{5} + \frac{11x^4}{4} - \frac{10x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= -\frac{96}{5} + \frac{176}{4} - \frac{80}{3} = -\frac{28}{15}$$

ملاحظة : يمكن حل $\oint_C 5xy\,dx + x^3 dy$ بطريقة مباشرة .

بوضع $C_1 : y = x^2 ; 0 \le x \le 2$ ، وبالتالي $dy = 2x\,dx$

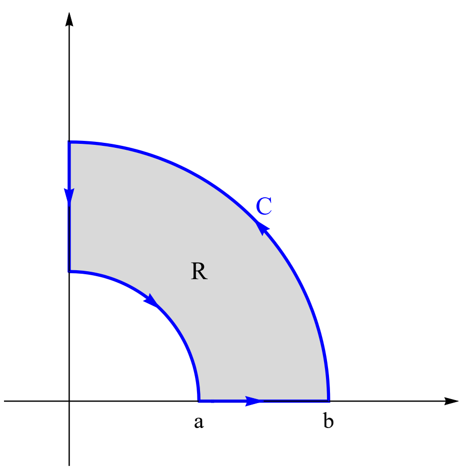
و $C_2 : y = 2x ; 0 \le x \le 2$ ، وبالتالي $dy = 2\,dx$

$$\int_{C_1} 5xy\,dx + x^3 dy = \int_0^2 \left(5x^3 + 2x^4\right) dx = \left[5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 5\left(\frac{16}{4}\right) + 2\left(\frac{32}{5}\right) = 20 + \frac{64}{5}$$

$$\int_{C_2} 5xy\,dx + x^3 dy = \int_0^2 (10x^2 + 2x^3)\,dx = \left[10\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2}\right]_0^2 = 10\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{16}{2} = \frac{80}{3} + 8$$

لاحظ أن $\oint_C 5xy\,dx + x^3 dy = \int_{C_1} 5xy\,dx + x^3 dy - \int_{C_2} 5xy\,dx + x^3 dy$

$$= 20 + \frac{64}{5} - \left(\frac{80}{3} + 8\right) = 12 + \frac{64}{5} - \frac{80}{3} = \frac{180 + 192 - 400}{15} = -\frac{28}{15}$$



مثال : أحسب $\oint_C \left(4 + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (\sin y + 3x^2)dy$ ، إذا كان C يمثل حدود المنطقة في الشكل المقابل .

الحل : $R = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : a \le r \le b\ ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$

$M(x,y) = 4 + e^{\sqrt{x}}$ و $N(x,y) = \sin y + 3x^2$

لاحظ أن $\frac{\partial}{\partial x}(\sin y + 3x^2) = 6x$ و $\frac{\partial}{\partial y}\left(4 + e^{\sqrt{x}}\right) = 0$ وبالتالي

$$\oint_C \left(4 + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (\sin y + 3x^2)dy = \iint_R (6x - 0)\,dA$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b (6r\cos\theta)\ r\ dr\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b 6r^2 \cos\theta\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^3 \cos\theta\right]_a^b d\theta = 2(b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ d\theta$$

$$= 2(b^3 - a^3)\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(b^3 - a^3)(1 - 0) = 2(b^3 - a^3)$$

تطبيقات نظرية جرين في حساب المساحات :

نظرية :

إذا كانت R منطقة في المستوي محدودة بالمنحنى C البسيط والمغلق والناعم قطعة بقطعة فإن مساحة المنطقة R هي

$$\mathrm{A}=\iint_R dA=\oint_C x\,dy=-\oint_C y\,dx=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$$

البرهان :

(1) بوضع $M=0$ و $N=x$ ، من نظرية جرين نحصل على $\mathrm{A}=\iint_R dA=\oint_C x\,dy$

(2) بوضع $M=-y$ و $N=0$ ، من نظرية جرين نحصل على $\mathrm{A}=\iint_R dA=-\oint_C y\,dx$

(3) بوضع $M=-y$ و $N=x$ ، من نظرية جرين نحصل على $2\iint_R dA=\oint_C x\,dy-y\,dx$

أي أن $\mathrm{A}=\iint_R dA=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$

مثال : أحسب مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

الحل : ليكن المنحنى C هو القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

المعادلات الوسيطية للمنحنى C هي $x=a\cos t\,,\ y=b\sin t\,,\ 0\le t\le 2\pi$

في هذه الحالة $dx=-a\sin t\,dt$ و $dy=b\cos t\,dt$

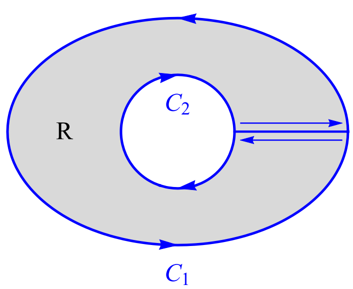
$$\mathrm{A}=\iint_R dA=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\oint_0^{2\pi}(a\cos t)(b\cos t)\,dt-(b\sin t)(-a\sin t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\oint_0^{2\pi}ab\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\,dt=\frac{ab}{2}\oint_0^{2\pi}dt=\frac{ab}{2}[t]_0^{2\pi}=\frac{ab}{2}(2\pi-0)=\pi\,ab$$

ملاحظة هامة : يمكن تعميم نظرية جرين على أي منطقة مثقوبة .

لتكن R منطقة مثقوبة و C_1 و C_2 تمثلان منحنيان يحدان المنطقة R (انظر الشكل) ، بوضع شق على شكل قطعة مستقيمة تصل بين C_1 و C_2

لاحظ أن مجموع التكاملين على القطعة المستقيمة في الاتجاهين المختلفين يساوي صفر . ولاحظ أيضاً أن اتجاه المنحنى C_2 مع عقارب الساعة (اتجاه سالب) . وبالتالي

$$\oint_{C_1}M\,dx+N\,dy-\oint_{C_2}M\,dx+N\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$



مثال : إذا كان C_1 منحنى بسيط مغلق وناعم ويحوي نقطة الأصل داخله وكان C_2 منحنى بسيط مغلق وناعم ويحوي المنحنى C_1 وكانت $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ فأثبت أن $\oint_{C_1}M\,dx+N\,dy=\oint_{C_2}M\,dx+N\,dy$

الحل : باستخدام تعميم نظرية جرين للمنطقة المثقوبة R والمحصورة بين المنحيين فإن

$$\oint_{C_1}M\,dx+N\,dy-\oint_{C_2}M\,dx+N\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\right)dA=\iint_R 0\,dA=0$$

وبالتالي $\oint_{C_1}M\,dx+N\,dy=\oint_{C_2}M\,dx+N\,dy$

مثال : إذا كان C أي منحنى بسيط ومغلق وناعم قطعة بقطعة ويحوي نقطة الأصل بداخلة ، وكانت $\vec{F}(x,y)=\dfrac{-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}}{x^2+y^2}$

فأثبت أن $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=2\pi$

الحل :

$M(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ و $N(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

لاحظ أن $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{-(x^2+y^2)-(-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

وأيضاً $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{(x^2+y^2)-x(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ، أي أن $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

ليكن المنحنى C_1 هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a حيث $a>0$ وصغيرة بما يكفي لجعل المنحنى C_1 يقع داخل المنحنى C ، من المثال السابق $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_1} M\,dx+N\,dy$

لاحظ أن المعادلات الوسيطية للمنحنى C_1 هي $x=a\cos t\,,\ y=a\sin t\,,\ 0\le t\le 2\pi$

وأيضاً $dx=-a\sin t\,dt$ و $dy=a\cos t\,dt$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_1}\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin t}{a^2}\,(-a\sin t)\,dt+\frac{a\cos t}{a^2}\,(a\cos t)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}{a^2}\,dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

الصيغة المتجهية لنظرية جرين :

نظرية :

ليكن C منحنى ناعم قطعة بقطعة و بسيط ومغلق ، ولتكن R هي المنطقة المكونة من المنحنى C ونقاطه الداخلية ، إذا كانت M و N متصلتين ولهما مشتقات جزئية متصلة على منطقة مفتوحة D تحوي R و $\vec{F}(x,y)=M(x,y)\,\vec{i}+N(x,y)\,\vec{j}$ فإن

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds=\iint_R\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{k}\,dA$$

البرهان :

يمكن كتابة الدالة $\vec{F}$ على الشكل $\vec{F}(x,y)=M(x,y)\,\vec{i}+N(x,y)\,\vec{j}+0\,\vec{k}$

أيضاً $\vec{T}=\dfrac{dx}{ds}\vec{i}+\dfrac{dy}{ds}\vec{j}+\dfrac{dz}{ds}\vec{k}$ وبالتالي $\vec{T}\,ds=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$

أي أن $\vec{F}\cdot\vec{T}\,ds=M\,dx+N\,dy$ وبالتالي $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds=\oint_C M\,dx+N\,dy$

لدينا $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ M & N & 0\end{vmatrix}=0\,\vec{i}+0\,\vec{j}+\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$

أي أن $\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{k}=\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}$ وبالتالي $\iint_R\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{k}\,dA=\iint_R\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)dA$

وأخيراً $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds=\oint_C M\,dx+N\,dy=\iint_R\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)dA=\iint_R\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{k}\,dA$

تمارين (4.3)

(1) استخدم نظرية جرين لحساب التكاملات التالية :

(i) $\oint_C (x+y)\,dx + xy\,dy$ حيث C المنحنى المغلق المعطى بالدالتين $y^2 = x$ و $y = -x$ من $(0,0)$ إلى $(1,-1)$

(ii) $\oint_C (xy^2)\,dx + (x^2+y)\,dy$ حيث C المربع الذي رؤوسه $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(1,1)$ و $(0,1)$

(iii) $\oint_C (1+xy)\,dx + (x-2y)\,dy$ حيث C هي دائرة الوحدة .

(iv) $\oint_C xy\,dx + \cos y\,dy$ حيث C المثلث الذي رؤوسه $(1,1)$ و $(2,2)$ و $(3,0)$

(v) $\oint_C (x^3+y)\,dx + (x^2-y)\,dy$ حيث C حدود المنطقة الواقعة بين $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=1$

(2) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى :

(i) $C:\ x = a + c\,\cos t\,,\ y = b + c\,\sin t\,;\ 0 \le t \le 2\pi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $c > 0$.

(ii) $C:\ x = a\,\cos^3 t\,,\ y = a\,\sin^3 t\,;\ 0 \le t \le 2\pi$ حيث $a > 0$.

(3) إذا كان $\vec{F}(x,y)$ حقل متجهات في المستوي وكان $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ لا يعتمد على المسار في المنطقة D ، استخدم نظرية جرين لإثبات أن $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ لأي منحنى بسيط مغلق ناعم قطعة بقطعة يقع في D .

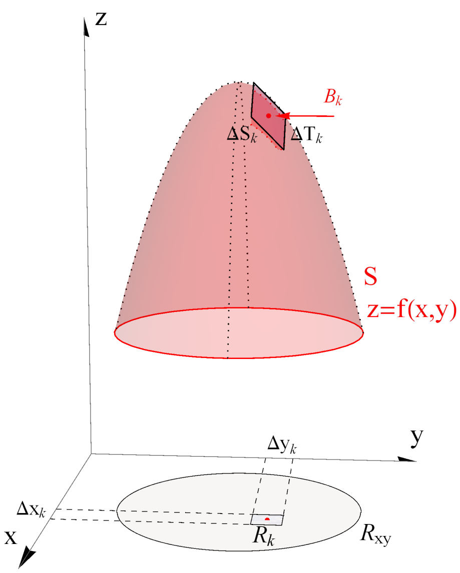
(4) إذا كانت f و g دالتين في متغير واحد و قابلتين للاشتقاق ، فأثبت أن

$\oint_c f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$ حيث C منحنى بسيط مغلق وناعم قطعة بقطعة .

(5) إذا كان $\vec{F}(x,y)$ له مشتقات جزئية متصلة في منطقة بسيطة الترابط R وكان $\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{0}$ في R ،

أثبت أن $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ لأي منحنى بسيط مغلق ناعم قطعة بقطعة يقع في R .

5.3 التكامل على سطح



ليكن S سطح معطى بالمعادلة $z = f(x,y)$ حيث الدالة f لها مشتقات جزئية متصلة ، ولتكن R_{xy} هي إسقاط السطح S على المستوي xy .
بنفس الطريقة المستخدمة لحساب مساحة السطح ، نقسم المنطقة R_{xy} إلى مستطيلات جزئية ، إذا كانت $B_k\left(x_k,y_k,z_k\right)$ نقطة على السطح S وكان R_k هو المستطيل الجزئي الذي يحوي النقطة $\left(x_k,y_k,0\right)$ ، وأبعاد المستطيل R_k هي Δx_k و Δy_k ، فإن ΔS_k هي مساحة صورة المنطقة R_k بواسطة الدالة f وأيضاً ΔT_k هي مساحة الجزء من المستوي المماس للسطح S عند النقطة B_k ، لاحظ أن ΔS_k تساوي تقريباً ΔT_k كلما صغرنا قيمة $\|\Delta\| = \min\limits_k \sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$ وبالتالي إذا كانت $g(x,y,z)$ دالة متصلة على منطقة تحوي السطح S فإن تكامل الدالة g على السطح S يعطى بالعلاقة $\iint_S g(x,y,z)\, dS = \lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sum\limits_k g\left(x_k,y_k,z_k\right)\, \Delta T_k$

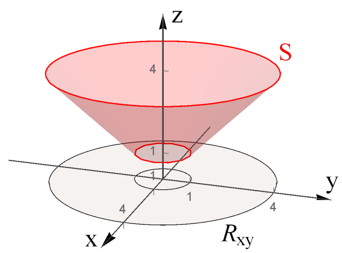
وبما أن $\Delta T_k = \sqrt{\left[f_x\left(x_k,y_k\right)\right]^2+\left[f_y\left(x_k,y_k\right)\right]^2+1}\, \Delta x_k\, \Delta y_k$ فإن

$$\iint_S g(x,y,z)\, dS = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k g\left(x_k,y_k,z_k\right)\, \sqrt{\left[f_x\left(x_k,y_k\right)\right]^2+\left[f_y\left(x_k,y_k\right)\right]^2+1}\Delta x_k\, \Delta y_k$$

وبالتالي
$$\iint_S g(x,y,z)\, dS = \iint_{R_{xy}} g(x,y,z)\sqrt{\left[f_x(x,y)\right]^2+\left[f_y(x,y)\right]^2+1}\, dA$$

ملاحظات :
(1) إذا كان S سطح معطى بالمعادلة $y = h(x,z)$ حيث h لها مشتقات جزئية متصلة ، وكانت R_{xz} هي إسقاط السطح S على المستوي xz وكانت g دالة متصلة على منطقة تحوي السطح S فإن
$$\iint_S g(x,y,z)\, dS = \iint_{R_{xz}} g(x,y,z)\sqrt{[h_x(x,z)]^2+1+[h_z(x,z)]^2}\, dA$$
(2) إذا كان S سطح معطى بالمعادلة $x = k(y,z)$ حيث k لها مشتقات جزئية متصلة ، وكانت R_{yz} هي إسقاط السطح S على المستوي yz وكانت g دالة متصلة على منطقة تحوي السطح S فإن
$$\iint_S g(x,y,z)\, dS = \iint_{R_{yz}} g(x,y,z)\sqrt{1+\left[k_y(y,z)\right]^2+\left[k_z(y,z)\right]^2}\, dA$$
(3) إذا كانت $g = 1$ فإن $\iint_S dS = \iint_S g(x,y,z)\, dS$ يمثل مساحة السطح S

مثال :
أحسب $\iint_S x^2 z\, dS$ حيث S هو السطح المحصور بين $z^2 = x^2+y^2$ والمستويين $z=1$ و $z=4$.
الحل :
السطح S هو عبارة عن جزء من المخروط الدائري المحصور بين المستويين $z=1$ و $z=4$.
أي أن $R_{x,y} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 16\}$ هي المنطقة المحصورة بين الدائرتين متحدتي المركز (نقطة الأصل) ونصفي قطريهما 4 و 1 .



$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ وبالتالي

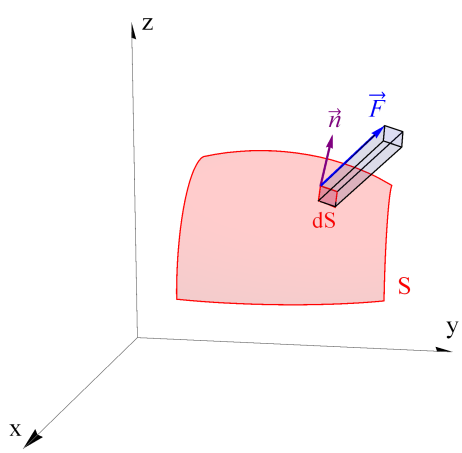
$f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و $f_y(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \iint_{R_{xy}} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\, dA$$
$$= \iint_{R_{xy}} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\, dA$$

لاحظ أن $R_{xy} = \{(r,\theta) : 1 \le r \le 4 \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \int_0^{2\pi}\int_1^4 (r\ \cos\theta)^2\ r\ \sqrt{2}\ r\ dr\ d\theta$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^4\ \cos^2\theta\ dr\ d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^4 \cos^2\theta\ d\theta = \sqrt{2}\left(\frac{1024-1}{5}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\ d\theta$$
$$= \frac{1023\sqrt{2}}{10}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1023\sqrt{2}}{10}\ (2\pi-0) = \frac{1023\sqrt{2}\ \pi}{5}$$

تدفق حقل متجهات عبر سطح ما :



ليكن S سطحاً يمثل غشاء رقيقاً مغموساً في سائل ، وليكن $\vec{F}$ هو حقل متجهات السرعة لهذا السائل ، في الشكل المقابل المتجه الأزرق يمثل متجه السرعة للسائل عند النقطة على الغشاء .

إذا كان حقل المتجهات $\vec{F}$ متصلاً فإن قيمته تكاد تكون ثابتة على المنطقة dS حيث dS تمثل جزءاً صغيراً من مساحة المنطقة S .

كمية السائل التي تمر من خلال dS لكل وحدة زمن يمكن تقريبها بحجم المنشور الذي قاعدته dS وارتفاعه $\vec{F}\cdot\vec{n}$ حيث $\vec{n}$ هو متجه الوحدة الناظم عند النقطة على السطح S .

إذا كان dV يمثل حجم المنشور فإن $dV = \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS$

التدفق هو مجموع أحجام المنشورات dV التي قواعدها تقسم السطح S .

أي أن التدفق هو $\text{Flux} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS$

أي أن التدفق يحسب حجم السائل المار خلال السطح S لكل وحدة زمن .

ملاحظات :

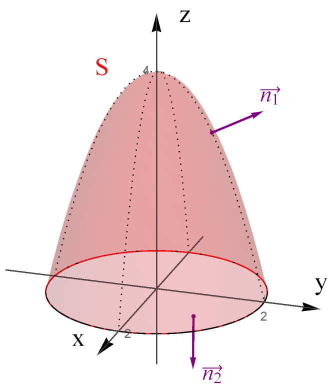
(1) إذا كان السطح S معطى بالدالة $z = f(x,y)$ ، فبوضع $g(x,y,z) = z - f(x,y)$ فإن السطح S يعطى بالمعادلة $g(x,y,z) = 0$ ومنها يمكن حساب متجه الوحدة الناظم $\vec{n}$ عند أي نقطة (x,y,z) كالتالي :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\, g(x,y,z)}{\|\vec{\nabla}\, g(x,y,z)\|} = \frac{-f_x(x,y)\ \vec{i} - f_y(x,y)\ \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f(x,y)]^2 + 1}}$$

$\vec{n}$ يسمى متجه الوحدة الناظم الخارجي للسطح S .

(2) $-\vec{n}$ يسمى متجه الوحدة الناظم الداخلي للسطح S .

(3) إذا كان متجه الوحدة الناظم $\vec{n}$ موجوداً عند كل نقطة داخلية (x,y,z) واقعة على السطح S فإن S يسمى سطحاً موجهاً .



مثال : أحسب تدفق حقل المتجهات $\overrightarrow{F}(x,y,z) = 3x\overrightarrow{i} + 3y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ عبر السطح المغلق S المعطى بالمعادلتين $z = 4 - x^2 - y^2$ حيث $z > 0$ و القرص الذي مركزه نقطة الأصل ونصف قطره 2 .

الحل : السطح S هو عبارة عن اتحاد السطحين S_1 و S_2 ، حيث

S_1 معطى بالمعادلة $z = 4 - x^2 - y^2$ و $z > 0$

S_2 هو القرص $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$

أولاً - على السطح S_1 : $g(x,y,z) = z - 4 + x^2 + y^2$

$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y,z) = 2x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

$$\|\overrightarrow{\nabla} g(x,y,z)\| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

متجه الوحدة الناظم الخارجي هو $\overrightarrow{n_1} = \dfrac{2x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1} = \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

أيضاً $dS = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$

التدفق عبر السطح S_1 هو $\displaystyle\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = \iint_{R_{xy}} \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$

$$= \iint_{R_{xy}} \left[6x^2 + 6y^2 + (4 - x^2 - y^2)\right] dA = \iint_{R_{xy}} (5x^2 + 5y^2 + 4)\, dA = \iint_{R_{xy}} \left[5(x^2 + y^2) + 4\right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (5r^2 + 4) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (5r^3 + 4r)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{5r^4}{4} + 2r^2\right]_0^2 d\theta$$

$$= \left[\frac{5(2^4)}{4} + 2(2^2)\right] \int_0^{2\pi} d\theta = (20 + 8)(2\pi - 0) = 56\pi$$

ثانياً - على السطح S_2 متجه الوحدة الناظمي هو $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{k}$ و $\overrightarrow{F}(x,y,z) = 3x\overrightarrow{i} + 3y\overrightarrow{j}$ لأن $z = 0$

وبالتالي $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ (لاحظ أن المتجهين متعامدان) .

أي أن التدفق عبر السطح S_2 هو $\displaystyle\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\, dS = 0$

أي أن التدفق عبر السطح S هو $\displaystyle \text{Flux} = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\, dS = 56\pi + 0 = 56\pi$

تمارين (5.3)

(1) أحسب $\iint_S g(x,y,z)\ dS$ في مايلي :

(i) $g(x,y,z)=y^2$ و S النصف العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(ii) $g(x,y,z)=x-y$ و S الجزء من المستوي $x+y+z=2$ الواقع في الثمن الأول .

(iii) $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ و S الجزء من السطح المكافئ $2z=x^2+y^2$ الواقع داخل الأسطوانة $x^2+y^2=4$.

(2) إذا كان S هو الجزء من المستوي $3x+4y+2z=12$ الواقع في الثمن الأول ، أكتب التكامل المستخدم لحساب $\iint_S x^2yz^2\ dS$ وذلك بإسقاط S على :

(i) المستوي yz ، (ii) المستوي xz .

(3) في مايلي أحسب $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS$ حيث $\overrightarrow{n}$ متجه الوحدة الناظم العلوي :

(i) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$ و S النصف العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$

(ii) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=5x\overrightarrow{i}+2y\overrightarrow{j}+4z\overrightarrow{k}$ و S المخروط الدائري $z=\sqrt{x^2+y^2}$ الواقع داخل الأسطوانة $x^2+y^2=1$.

(4) أحسب تدفق حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ خلال السطح S في ما يلي :

(i) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$ و S الجزء من المستوي $3x+2y+z=6$ الواقع في الثمن الأول .

(ii) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=y\overrightarrow{i}-x\overrightarrow{j}+(x^2+y^2+3z)\overrightarrow{k}$ و S هو السطح المكافئ $z=x^2+y^2$ الواقع في الثمن الأول والمحدود من أعلى بالسطح $z=1$

(5) أحسب تدفق حقل المتجهات $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x+y)\overrightarrow{i}+z\overrightarrow{j}+(y+z)\overrightarrow{k}$ و S هو سطح المكعب الذي رؤوسه $(\pm1,\pm1,\pm1)$ (استخدم متجه الوحدة الناظم الخارجي) .

(6) إذا كان السطح S معطى بالمعادلة $x=k(y,z)$ وكان $\overrightarrow{F}=M\overrightarrow{i}+N\overrightarrow{j}+P\overrightarrow{k}$ ، فأثبت أن

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ ds=\iint_{R_{yz}}\left[M-N\,k_y(y,z)-P\,k_z(y,z)\right]\ dy\,dz$$

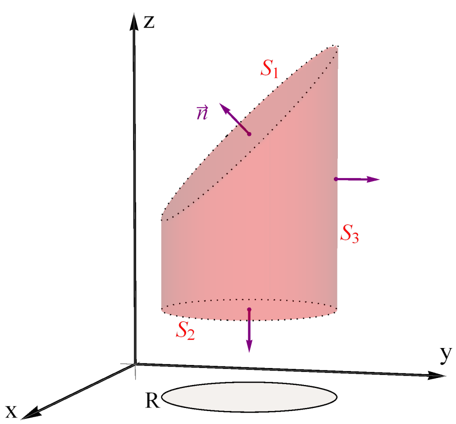
6.3 نظرية التباعد

نظرية (نظرية التباعد):
إذا كانت Q منطقة في الفضاء الثلاثي محدودة بالسطح المغلق S وكان $\vec{n}$ يمثل متجه الوحدة الناظمي الخارجي للسطح S عند النقطة (x,y,z) وكانت $\vec{F}$ دالة متجهية لها مشتقات جزئية متصلة على Q فإن $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV$

البرهان:
لتكن $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\vec{i} + N(x,y,z)\,\vec{j} + P(x,y,z)\,\vec{k}$ عندئذ من خواص الضرب الداخلي فإن

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = M\vec{i}\cdot\vec{n} + N\vec{j}\cdot\vec{n} + P\vec{k}\cdot\vec{n}$$

أي أن المطلوب إثباته $\iint_S \left(M\vec{i}\cdot\vec{n} + N\vec{j}\cdot\vec{n} + P\vec{k}\cdot\vec{n}\right)\,dS = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\,dV$



يكفي إثبات أن $\iint_S M\vec{i}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x}\,dV$

و $\iint_S N\vec{j}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y}\,dV$ و $\iint_S P\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\,dV$

سنكتفي ببرهان الحالة الأخيرة (ويمكن برهان الحالتين الأخريين بطريقة مشابهة).

ليكن $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ حيث S_1 هو السطح العلوي المعطى بالدالة $z = u(x,y)$ و S_2 هو السطح السفلي المعطى بالدالة $z = v(x,y)$ و S_3 هو السطح الجانبي. المنطقة R هي إسقاط السطح S على المستوي xy.

على المركبة S_3 المتجه $\vec{k}$ للمتجه $\vec{n}$ تساوي الصفر وبالتالي $\iint_{S_3} P\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = 0$

وبالتالي $\iint_S P\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} P\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} P\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS$

على السطح S_1: بوضع $g_1(x,y,z) = z - u(x,y)$ نحصل على

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} g_1(x,y,z)}{\|\vec{\nabla} g_1(x,y,z)\|} = \frac{-u_x(x,y)\,\vec{i} - u_y(x,y)\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{[u_x(x,y)]^2 + [u_y(x,y)]^2 + 1}}$$

أي أن $\vec{k}\cdot\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{[u_x(x,y)]^2 + [u_y(x,y)]^2 + 1}}$

$$\iint_{S_1} P\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_R \frac{P(x,y,u(x,y))}{\sqrt{[u_x(x,y)]^2 + [u_y(x,y)]^2 + 1}}\sqrt{[u_x(x,y)]^2 + [u_y(x,y)]^2 + 1}\,dA$$

$$= \iint_R P(x,y,u(x,y))\,dA$$

على السطح S_2: بوضع $g_2(x,y,z) = z - v(x,y)$ نحصل على

$$\vec{n} = \frac{-\vec{\nabla} g_2(x,y,z)}{\|\vec{\nabla} g_2(x,y,z)\|} = \frac{v_x(x,y)\,\vec{i} + v_y(x,y)\,\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{[v_x(x,y)]^2 + [v_y(x,y)]^2 + 1}}$$

لاحظ أن متجه الوحدة الناظمي الخارجي في هذه الحالة هو $-\vec{n}$

أي أن $\vec{k}\cdot\vec{n} = \dfrac{-1}{\sqrt{[v_x(x,y)]^2 + [v_y(x,y)]^2 + 1}}$

$$\iint_{S_2} P\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_R \frac{-P(x,y,v(x,y))}{\sqrt{[v_x(x,y)]^2 + [v_y(x,y)]^2 + 1}}\sqrt{[v_x(x,y)]^2 + [v_y(x,y)]^2 + 1}\,dA$$

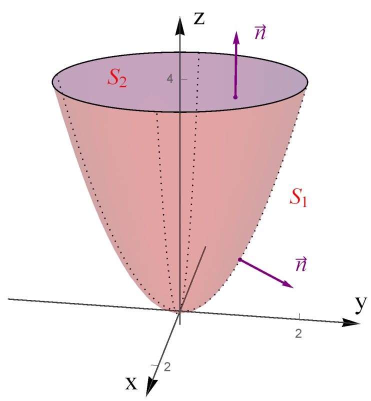
$$= -\iint_R P(x,y,u(x,y))\,dA$$

$$\iint_S P\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} P\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} P\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_R \left[P(x,y,u(x,y)) - P(x,y,v(x,y))\right]\,dA$$

$$= \iint_R \left[\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right]\,dA = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\,dV$$

ملاحظة : نظرية التباعد تنص على أن تدفق حقل المتجهات $\vec{F}$ عبر السطح المغلق S يساوي التكامل الثلاثي لتباعد حقل المتجهات $\vec{F}$ على المنطقة Q في الفضاء الثلاثي (التي حدودها السطح المغلق S) .

مثال : تحقق من نظرية التباعد وذلك بحساب التكامل الثلاثي والتكامل السطحي لحقل المتجهات $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ و Q منطقة في الفضاء الثلاثي محدودة بالسطحين $z = x^2+y^2$ و $z = 4$.



الحل : ليكن $S = S_1 \cup S_2$ ، حيث S_1 السطح المعطى بالدالة $z = x^2+y^2$ و S_2 القرص الذي مركزه $(0,0,4)$ ونصف قطره 2

أولاً - حساب التكامل $\iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\,dV$

لدينا $M(x,y,z) = x$ و $N(x,y,z) = -y$ و $P(x,y,z) = z$

$\frac{\partial M}{\partial x} = 1$ و $\frac{\partial N}{\partial y} = -1$ و $\frac{\partial P}{\partial z} = 1$

$$\iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\,dV = \iiint_Q (1-1+1)\,dV = \iiint_Q dV$$

باستخدام الإحداثيات الأسطوانية حيث :

$0 \le r \le 2$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ و $r^2 \le z \le 4$

$$\iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 [rz]_{r^2}^4\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r - r^3)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}(8-4)\,d\theta = 4\,[\theta]_0^{2\pi} = 4(2\pi - 0) = 8\pi$$

ثانياً - حساب التكامل $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

على السطح S_1 : بوضع $g_1(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ نحصل على $\vec{n} = \frac{-\vec{\nabla} g_1(x,y,z)}{\|\vec{\nabla} g_1(x,y,z)\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

لاحظ أن متجه الوحدة الناظمي موجه للأسفل .

إسقاط السطح S_1 على المستوي xy هو المنطقة $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \le 4\}$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \frac{2x^2 - 2y^2 - z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,dS = \iint_R \frac{2x^2 - 2y^2 - (x^2+y^2)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA$$

$$= \iint_R (x^2 - 3y^2)\,dA = \iint_R (x^2+y^2-4y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2 - 4r^2\sin^2\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(1 - 4\sin^2\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,[1 - 2(1-\cos 2\theta)]\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(-1+2\cos 2\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \;[-\theta + \sin 2\theta]_0^{2\pi} = \left(\frac{16}{4}\right)\;[-2\pi - 0] = -8\pi$$

على السطح S_2 : $\vec{n} = \vec{k}$

لاحظ أن متجه الوحدة الناظمي موجه للأعلى .

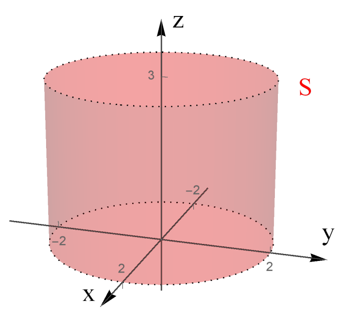
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 4\}$

لاحظ أن $\vec{F}\cdot\vec{n} = \left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right)\cdot\vec{k} = z = 4$

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_R 4\,dA = 4\iint_R dA = 4(\pi(2^2)) = 16\pi$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -8\pi + 16\pi = 8\pi$$

مثال : لتكن Q منطقة في الفضاء الثلاثي محدودة بالسطوح $x^2+y^2=4$ و $z=0$ و $z=3$ ، وليكن S السطح المغلق الذي يحد المنطقة Q ، إذا كانت $\vec{F}(x,y,z) = x^3\,\vec{i} + y^3\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}$ ، استخدم نظرية التباعد لحساب $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$



الحل : $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 3x^2+3y^2+3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 3\iiint_Q (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

باستخدام الإحداثيات الأسطوانية :

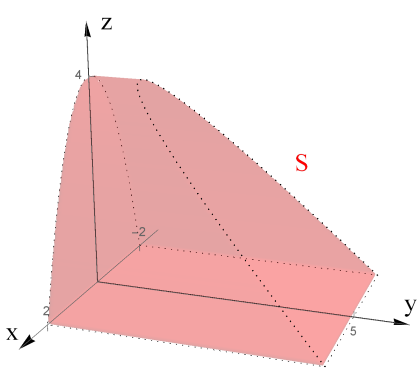
$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 (r^2+z^2)r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[r^2z+\frac{z^3}{3}\right]_0^3 r\,dr\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r^2+9)r\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (3r^3+9r)\,dr\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\left[\frac{3r^4}{4}+\frac{9r^2}{2}\right]_0^2 d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (12+18)\,d\theta = 3(30)(2\pi-0) = 180\pi$$

مثال : لتكن Q منطقة في الفضاء الثلاثي محدودة بالسطح $z=4-x^2$ والسطح $y+z=5$ والمستوي xy والمستوي xz ، وليكن S السطح المغلق الذي يحد المنطقة Q ، إذا كانت $\vec{F}(x,y,z) = (x^3+\sin z)\,\vec{i} + (x^2y+\cos z)\,\vec{j} + e^{x^2+y^2}\,\vec{k}$ ، استخدم نظرية التباعد لحساب $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$



الحل : $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 3x^2+x^2+0 = 4x^2$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q 4x^2\,dV$$

باستخدام الإحداثيات الكارتيزية :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{-2}^2\int_0^{4-x^2}\int_0^{5-z} 4x^2\,dy\,dz\,dx$$

$$= \int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} 4x^2(5-z)\,dz\,dx = \int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} (20x^2-4x^2z)\,dz\,dx$$

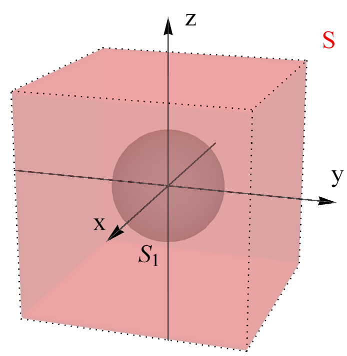
$$= \int_{-2}^2 \left[20x^2z-2x^2z^2\right]_0^{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^2 \left[20x^2(4-x^2)-2x^2(4-x^2)^2\right] dx$$

$$= \int_{-2}^2 \left[80x^2-20x^4-2x^2(16-8x^2+x^4)\right] dx = \int_{-2}^2 \left(80x^2-20x^4-32x^2+16x^4-2x^6\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(48x^2 - 4x^4 - 2x^6\right)\, dx = \left[16x^3 - \frac{4x^5}{5} - \frac{2x^7}{7}\right]_{-2}^{2} = \frac{4608}{35}$$

مثال : لتكن Q منطقة في الفضاء الثلاثي وتحوي نقطة الأصل (كنقطة داخلية) وكان S هو السطح الذي يحد المنطقة Q ، وكان $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{q\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ حيث $q \in \mathbb{R}$ ، بين أن تدفق $\vec{F}$ عبر السطح S هو $4\pi q$



الحل : لاحظ أن $\vec{F}$ حقل متجهات تربيعي عكسي .
لاحظ أن $\vec{F}$ غير متصلة عند نقطة الأصل وبالتالي لا يمكن استخدام نظرية التباعد.
لتكن S_1 كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a وتقع بالكامل داخل السطح S ، ولتكن Q_1 المنطقة في الفضاء الثلاثي التي تقع داخل المنحنى S وخارج المنحنى S_1 ، عندئذ $\vec{F}$ متصلة على المنطقة Q_1 ، وبالتالي يمكن تطبيق نظرية التباعد على المنطقة Q_1 ، أي أن

$$\iiint_{Q_1} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

حساب قيمة التكامل $\iiint_{Q_1} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV$

لتكن $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\vec{i} + N(x,y,z)\,\vec{j} + P(x,y,z)\,\vec{k}$

عندئذ $M(x,y,z) = \dfrac{qx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ و $N(x,y,z) = \dfrac{qy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ و $P(x,y,z) = \dfrac{qz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = q\left(\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - x\,\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)$$

$$= q\left(\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\left[(x^2+y^2+z^2) - 3x^2\right]}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right) = \frac{q(-2x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

بنفس الطريقة $\dfrac{\partial N}{\partial y} = \dfrac{q(x^2-2y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$ و $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{q(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

أي أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0$ وبالتالي $\iiint_{Q_1} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = 0$

ومنه $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = 0$ أي أن تدفق $\vec{F}$ عبر S هو $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = -\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$

لاحظ أن متجه الوحدة الناظمي على S_1 يكون باتجاه خارج المنطقة Q_1 أي باتجاه نقطة الأصل

أي أن $\vec{n} = \dfrac{-x\,\vec{i} - y\,\vec{j} - z\,\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ ومنه $\vec{F}\cdot\vec{n} = \dfrac{q(-x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \dfrac{-q}{x^2+y^2+y^2} = \dfrac{-q}{a^2}$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = -\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = -\iint_{S_1} \frac{-q}{a^2}\, dS = \frac{q}{a^2}\iint_{S_1} dS = \frac{q}{a^2}(4\pi\, a^2) = 4\pi\, q$$

تمارين (6.3)

(1) استخدم نظرية التباعد لحساب $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS$ في مايلي :

(i) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=y^2\sin x\,\overrightarrow{i}+yz\,\overrightarrow{j}+(2x+4z)\,\overrightarrow{k}$ و S المنطقة المحصورة بالمستويات $x=\pm1$ و $y=\pm1$ و $z=\pm1$

(ii) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x^2+\cos z)\,\overrightarrow{i}+\left(y+ze^x\right)\overrightarrow{j}+(x+z^2)\,\overrightarrow{k}$ و S المنطقة المحصورة بالسطوح $x^2+y^2=4$ و $x+z=2$ و $z=0$

(iii) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=2xz\,\overrightarrow{i}+x\sin z\,\overrightarrow{j}+(z^2+\cos y)\,\overrightarrow{k}$ و S المنطقة المحصورة بالسطحين $z=x^2+y^2$ و $z=1$

(2) استخدم نظرية التباعد لحساب تدفق حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ خلال السطح S في مايلي :

(i) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(3x+y)\,\overrightarrow{i}+2xz\,\overrightarrow{j}+(z^2+y)\,\overrightarrow{k}$ و S سطح المنطقة المحصورة بين $z=4-x^2-y^2$ والمستوي xy .

(ii) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=xz^2\,\overrightarrow{i}+yx^2\,\overrightarrow{j}+y^2z\,\overrightarrow{k}$ و S سطح المنطقة المحصورة بين الأسطوانتين $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ وبين المستويين $z=0$ و $z=3$

(3) بافتراض أن S و Q تحققان شروط نظرية التباعد :

(i) إذا كان $\overrightarrow{a}$ متجهاً ثابتاً فأثبت أن $\iint_S \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}\;dS=0$

(ii) إذا كان $\overrightarrow{r}=x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}+z\,\overrightarrow{k}$ وكان V هو حجم المنطقة Q فأثبت أن $V=\dfrac{1}{3}\iint_S \overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n}\;dS$

(iii) إذا كان $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات محافظ ودالة جهده هي f وكان $\operatorname{div}\overrightarrow{F}=0$ فأثبت أن $\iiint_Q \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{F}\;dV=\iint_S f\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS$

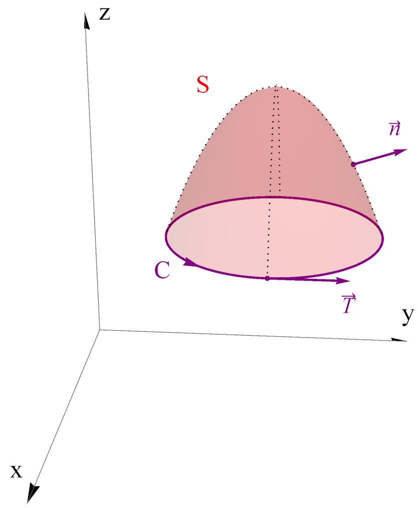
(iv) إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لحقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ متصلة فأثبت أن $\iint_S \operatorname{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS=0$

(4) إذا كانت Q منطقة في الفضاء الثلاثي محدودة بالسطح المغلق S وكان $\overrightarrow{n}$ يمثل متجه الوحدة الناظمي الخارجي للسطح S عند النقطة (x,y,z) وكان $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ حقل متجهات دالة جهده $f(x,y,z)$ لها مشتقات جزئية متصلة على Q

(i) إذا كانت f تحقق $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ ، احسب تدفق حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ خلال السطح المغلق S .

(ii) إذا كانت f تحقق $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=c$ حيث $c>0$ ، احسب تدفق حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ خلال سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$ حيث $a>0$.

7.3 نظرية ستوكس



نظرية (نظرية ستوكس):
ليكن S سطحاً موجهاً وناعماً قطعة بقطعة و $\vec{n}$ هو متجه الوحدة الناظمي على S وحد السطح S هو المنحنى C البسيط والمغلق والناعم قطعة بقطعة وليكن $\vec{F}(x,y,z)$ حقل متجهات ذو مركبات مشتقاتها الجزئية متصلة فإن

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \iint_S \left(\text{curl}\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

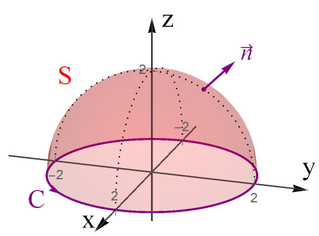
أو بصيغة أخرى $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS$

أي أن تكامل المركبة المماسية لحقل المتجات $\vec{F}$ على طول المنحنى C (لمرة واحدة في الاتجاه الموجب) يساوي التكامل السطحي للمركبة الناظمية لدوران حقل المتجهات $\vec{F}$ على السطح S.

إذا كان F هو حقل متجهات القوة فإن الشغل المبذول بواسطة $\vec{F}$ على طول المنحنى C يساوي تدفق دوران حقل المتجهات $\vec{F}$ عبر السطح S.

مثال : تحقق من نظرية ستوكس لحقل المتجهات $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ حيث السطح S يمثل النصف العلوي للكرة $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

الحل :



أولاً - حساب التكامل $\iint_S \left(\text{curl}\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS$

$$\text{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

بوضع $g(x,y,z) = z-\sqrt{4-x^2-y^2}$

$$g_x = \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \text{ و } g_y = \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \text{ و } g_z = 1$$

$$\text{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{\nabla}g(x,y,z)\|}\left(\frac{x+y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+1\right)$$

إسقاط السطح S على المستوي xy هو المنطقة $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2\le 4\}$ ،
أو بالإحداثيات القطبية $0\le r\le 2$, $0\le\theta\le 2\pi$

$$\iint_S \left(\text{curl}\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS = \iint_R \frac{1}{\|\vec{\nabla}g(x,y,z)\|}\left(\frac{x+y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+1\right)\|\vec{\nabla}g(x,y,z)\|\,dA = \iint_R\left(\frac{x+y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+1\right)dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{\sqrt{4-r^2}}+1\right)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\frac{r^2(\cos\theta+\sin\theta)}{\sqrt{4-r^2}}\right)dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^2 [\sin\theta-\cos\theta]_0^{2\pi}\frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\,dr + \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\theta = 0+\left(\frac{4}{2}-0\right)(2\pi-0) = 4\pi$$

ثانياً - حساب التكامل $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$\vec{F}\cdot d\vec{r} = z\,dx + x\,dy + y\,dz$

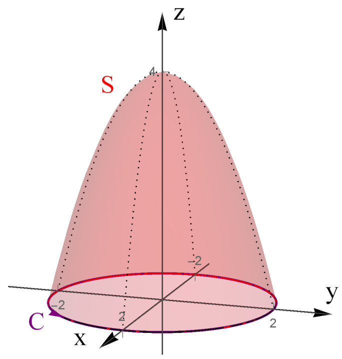
المنحنى C هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 ، ومعادلاتها الوسيطية هي

$x = 2\cos t\,,\ y = 2\sin t\,,\ z = 0$ وبالتالي $dx = -2\sin t\,dt\,,\ dy = 2\cos t\,dt\,,\ dz = 0$

أي أن $\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 + 4\cos^2 t\,dt + 0 = 2(1+\cos 2t)\,dt$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 2(1+\cos 2t)\,dt = 2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\left[(2\pi+0)-(0+0)\right] = 4\pi$$

مثال : أحسب التكامل $\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS$ حيث $\vec{F}(x,y,z) = e^{z^2}\,\vec{i} + (4z-y)\,\vec{j} + 8x\sin y\,\vec{k}$ و S السطح المكافئ الدائري المعطى بالدالة $z = 4 - x^2 - y^2$ والمحدود من أسفل بالمستوي xy ، ومتجه الوحدة الناظمي $\vec{n}$ موجهاً خارج S .



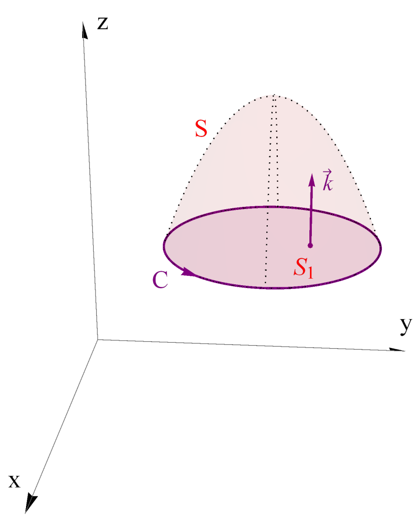
الحل : من نظرية ستوكس $\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$= \int_C e^{z^2}\,dx + (4z-y)\,dy + 8x\sin y\,dz$$

المنحنى C هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 ، ومعادلاتها الوسيطية هي $x = 2\cos t\,,\ y = 2\sin t\,,\ z = 0$

وبالتالي $dx = -2\sin t\,dt\,,\ dy = 2\cos t\,dt\,,\ dz = 0$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left[e^0(-2\sin t) + (0-2\sin t)(2\cos t) + 0\right]\,dt$$
$$= (-2\sin t - 4\sin t\cos t)\,dt = 2(-\sin t - \sin 2t)\,dt$$
$$\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^{2\pi} 2(-\sin t - \sin 2t)\,dt$$
$$= 2\left[\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\left[\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\right)\right] = 0$$



حالة خاصة :

ليكن S و C كما هي في نص نظرية ستوكس ، إذا كان C يقع في مستو يوازي المستوي xy وكان S_1 هو الجزء من المستوي المحصور داخل المنحنى C فمن نظرية ستوكس نجد أن

$$\iint_S \left(\mathrm{curl}\,\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\,ds = \iint_{S_1} \left(\mathrm{curl}\,\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

على السطح S_1 نلاحظ أن $\vec{n} = \vec{k}$.

إذا كان $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\vec{i} + N(x,y,z)\,\vec{j} + P(x,y,z)\,\vec{k}$

فإن $\left(\mathrm{curl}\,\vec{F}\right)\cdot\vec{n} = \left[\left(N_x(x,y,z) - M_y(x,y,z)\right)\cdot\vec{k}\right]\cdot\vec{k} = N_x - M_y$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\,ds = \iint_{S_1} \left(N_x(x,y,z) - M_y(x,y,z)\right)\,dS$$

بالرجوع للمثال الأول حيث $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$ و S يمثل النصف العلوي للكرة $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ ، نجد أن المنحنى C هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 وتقع بالكامل في المستوي xy .

لاحظ أن S_1 هو القرص الدائري $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 4\ ,\ z=0\}$

$$\iint_S \left(\operatorname{curl}\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\ dS = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\ ds = \iint_{S_1}\left(\operatorname{curl}\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\ dS$$

$$= \iint_{S_1}\left(N_x(x,y,z)-M_y(x,y,z)\right)\ dS = \iint_{S_1}(1-0)\,dS = \iint_{S_1} dS = \pi(2^2) = 4\pi$$

لاحظ أن $\iint_{S_1} dS$ يمثل مساحة القرص S_1 .

ملاحظات : ليكن $\vec{F}$ حقل متجهات ذو مركبات مشتقاتها الجزئية متصلة على المنطقة D

(1) إذا كان $\vec{F}$ حقل متجهات السرعة فإن $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\ ds$ يقيس دوران حقل المتجهات $\vec{F}$ حول المنحنى C .

(2) إذا كان $\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{0}$ على المنطقة D فإن $\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = 0$ وبالتالي حقل المتجهات $\vec{F}$ ليس دورانياً .

(3) إذا كان $\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} > 0$ على المنطقة D فإن حقل المتجهات $\vec{F}$ دوراني ، ويدور باتجاه عكس عقارب الساعة .

(4) إذا كان $\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} < 0$ على المنطقة D فإن حقل المتجهات $\vec{F}$ دوراني ، ويدور باتجاه عقارب الساعة .

مثال : إذا كان $\vec{F}(x,y,z) = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ حيث a,b,c ثوابت حقيقية ، بين أن حقل المتجهات $\vec{F}$ ليس دورانياً .

الحل :

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = \vec{0}$$

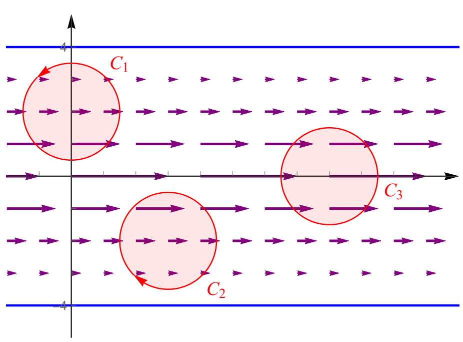
أي أن حقل المتجهات $\vec{F}$ ليس دورانياً .

مثال : ليكن $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{3}{y^2+1}\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ حيث $|y| \le 4$

(1) صف حقل متجهات السرعة $\vec{F}$ في المستوي xy حيث $|y| \le 4$.

(2) ناقش دوران حقل المتجهات $\vec{F}$ في المستوي xy حيث $|y| \le 4$.

الحل :



(1) لاحظ أن المقدار $\dfrac{3}{y^2+1}$ يكون أكبر ما يمكن عندما يكون y^2+1 أصغر ما يمكن أي عندما $y=0$ ، وبالتالي سرعة حقل المتجهات $\|\vec{F}\|$ تكون أقصى مايمكن على طول محور x وتقل هذه السرعة عندما تقترب النقطة (x,y) من أحد المستقيمين $y = \pm 4$.

(2) $\operatorname{curl}\vec{F} = \dfrac{6y}{(y^2+1)^2}\,\vec{k}$

وبما أن $\vec{n} = \vec{k}$ فإن $\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = \dfrac{6y}{(y^2+1)^2}$

أي أن $\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}$ يكون موجباً لجميع النقاط التي تقع فوق محور x ، ويكون سالباً لجميع النقاط التي تقع تحت محور x ، ويساوي الصفر على طول محور x .

ليكن C_1 هو القرص الذي يقع فوق محور x نلاحظ أن سرعة متجهات الحقل التي تؤثر على النصف السفلي من القرص أكبر من سرعة المتجهات التي تؤثر على النصف العلوي مما يحرك القرص باتجاه عكس عقارب الساعة وهذا ما يفسر كون $\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} > 0$ على القرص C_1.

ليكن C_2 هو القرص الذي يقع تحت محور x نلاحظ أن سرعة متجهات الحقل التي تؤثر على النصف السفلي من القرص أقل من سرعة المتجهات التي تؤثر على النصف العلوي مما يحرك القرص باتجاه عقارب الساعة وهذا ما يفسر كون $\text{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}<0$ على القرص C_2.
بينما على القرص C_3 والذي مركزه يقع على محور x نلاحظ أن سرعة المتجهات التي تؤثر على النصف السفلي للقرص مساوياً لسرعة المتجهات التي تؤثر على النصف العلوي وبالتالي لا يدور القرص C_3 .

نظرية :
إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ حقل متجهات له مشتقات جزئية متصلة على منطقة بسيطة الترابط D فإن $\text{curl}\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$ على D إذا وفقط إذا كان $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=0$ لكل منحنى بسيط مغلق C يقع في D .
البرهان :
($\Longleftarrow$) لنفرض أن $\text{curl}\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$ عندئذ $\text{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}=0$
من نظرية ستوكس $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\iint_S \text{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS=0$
($\Longrightarrow$) لنفرض أن $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=0$ لكل منحنى بسيط مغلق C يقع في D .
لنفرض أن $\text{curl}\overrightarrow{F}\neq\overrightarrow{0}$ عند نقطة ما $P\in D$ من اتصال المشتقات الجزئية يوجد منطقة جزئية من D بحيث يكون $\text{curl}\overrightarrow{F}\neq\overrightarrow{0}$ في هذ المنطقة الجزئية ، وبالإمكان اختيار قرص دائري S حدوده المنحنى C بحيث يكون $\text{curl}\overrightarrow{F}$ موازياً لمتجه الوحدة الناظمي $\overrightarrow{n}$ (وفي نفس اتجاهه) ، عندئذ $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\iint_S \text{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS>0$ وهذا تناقض ، أي أن $\text{curl}\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$ على D .

نتيجة :
إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ حقل متجهات له مشتقات جزئية متصلة على منطقة بسيطة الترابط D فإن العبارات التالية متكافئة :
(1) $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات محافظ .
(2) $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ لا يعتمد على المسار في D .
(3) $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=0$ لكل منحنى بسيط مغلق C في المنطقة D .
(4) حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ ليس دورانياً ، أي أن $\text{curl}\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$.

مثال : أثبت أن $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(3x^2+y^2)\overrightarrow{i}+2xy\overrightarrow{j}-3z^2\overrightarrow{k}$ حقل متجهات محافظ .
الحل : لاحظ أن $\overrightarrow{F}$ له مشتقات جزئية متصلة لكل (x,y,z)

$$\text{curl}\overrightarrow{F}=\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2+y^2 & 2xy & -3z^2\end{vmatrix}=(0-0)\overrightarrow{i}-(0-0)\overrightarrow{j}+(2y-2y)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}$$

أي أن $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات محافظ .

تمارين (7.3)

(1) استخدم نظرية ستوكس لحساب $\iint_S \text{curl}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS$ في مايلي :

(i) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x+z)\overrightarrow{i}+(x-y)\overrightarrow{j}+x\overrightarrow{k}$ و S سطح المجسم المحصور بين $z=5-x^2-4y^2$ و $z=1$

(ii) $\overrightarrow{F}(x,y,z)=x^2\overrightarrow{i}+(z+2y)\overrightarrow{j}+\cos z\overrightarrow{k}$ و S سطح المجسم المحصور بين $z=x^2+y^2$ و $z=4$

(2) بين أن حقل المتجهات $\overrightarrow{F}(x,y,z)=3x^2y\overrightarrow{i}+(x^3+2e^z)\overrightarrow{j}+(-3+2ye^z)\overrightarrow{k}$ ليس دورانياً .

(3) أثبت أن $\oint_C yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0$ لكل منحنى بسيط مغلق وناعم C .

(4) ليكن $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(y^2-2y)\overrightarrow{i}+0\overrightarrow{j}+0\overrightarrow{k}$ حيث $0\le y\le 2$:

(i) صف حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ في المستوي xy حيث $0\le y\le 2$.

(ii) ناقش دوران حقل المتجهات $\overrightarrow{F}$ في المستوي xy حيث $0\le y\le 2$.

(5) بفرض أن S و C يحققان شروط نظرية ستوكس ، أثبت مايلي :

(i) $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{T}\ ds=0$ حيث $\overrightarrow{F}$ حقل متجهات ثابت .

(ii) $\oint_C f\overrightarrow{\nabla}g\cdot d\overrightarrow{r}=\iint_S\left(\overrightarrow{\nabla}f\times\overrightarrow{\nabla}g\right)\cdot\overrightarrow{n}\ dS$ حيث f و g دالتان حقيقيتان .

(6) إذا كانت M و N و P دوال في المتغيرات x و y و z ومشتقاتها الجزئية متصلة على منطقة بسيطة الترابط D ، وليكن C أي منحنى يقع في D ، أثبت أن $\int_C M(x,y,z)\ dx+N(x,y,z)\ dy+P(x,y,z)\ dz$ لا يعتمد على المسار إذا وفقط إذا كانت $\dfrac{\partial N}{\partial z}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial M}{\partial z}=\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

(7) إذا كان $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(y+2z)\overrightarrow{i}+(x+2z)\overrightarrow{j}+(x+2y)\overrightarrow{k}$ والمنحنى C هو تقاطع الكرة $x^2+y^2+z^2=1$ مع المستوي $x+2y+z=0$ ، احسب $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$

(8) استخدم نظرية ستوكس لحساب $\oint_C (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$ ، والمنحنى C هو المثلث الذي رؤوسه $A(2,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $D(0,0,2)$.