

Improper Integrals  
التكاملات المعتلة  
Math 111  
Lecture 22

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University  
Department of Mathematics

2016

## التكاملات المعتلة

Improper Integrals:

## التكاملات المعتلة

Improper Integrals:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات التكاملات المعتلة والتي قد تكون على الصورة

## التكاملات المعتلة

Improper Integrals:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات التكاملات المعتلة والتي قد تكون على الصورة

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

الحالة الاولى:

حالة الفترة غير المحدودة:

١٢) اذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $[a, \infty)$  . نعرف التكامل المعتل

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

الحالة الاولى:

حالة الفترة غير المحدودة:

١) اذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $[a, \infty)$  . نعرف التكامل المعتل

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

٢) اذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $(-\infty, b]$  . نعرف التكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

الحالة الاولى:

حالة الفترة غير المحدودة:

١) اذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $[a, \infty)$  . نعرف التكامل المعتل

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

٢) اذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $(-\infty, b]$  . نعرف التكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

يكون كل من التكاملين السابقين تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت  $\pm\infty$  فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) بالنسبة للتكامل المعتل  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  فيمكننا تعريفها كالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx.$$



مثال : أحسب التكامل التالي:

$$(1) \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx.$$

مثال : أحسب التكامل التالي :

$$(1) \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx.$$

$$(2) \int_{-\infty}^1 e^{2x} dx.$$

مثال : أحسب التكامل التالي :

$$(1) \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx.$$

$$(2) \int_{-\infty}^1 e^{2x} dx.$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

الحالة الثانية :

حالة الدالة غير المحدودة :

(١) إذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b)$  وكانت

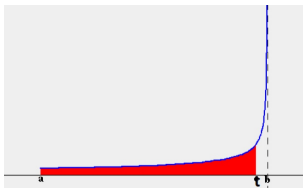
الحالة الثانية :

حالة الدالة غير المحدودة :

(١) إذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b)$  وكانت

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجور  $b$  كما في الشكل التالي



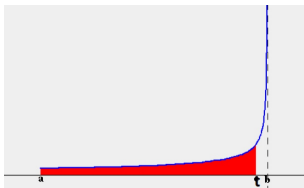
الحالة الثانية :

حالة الدالة غير المحدودة :

(١) إذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b)$  وكانت

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$$

اي غير محددة بجور  $b$  كما في الشكل التالي



فيكون التكامل المعتل على الصورة التالية:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx.$$

(٢) إذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $(a, b]$  وكانت

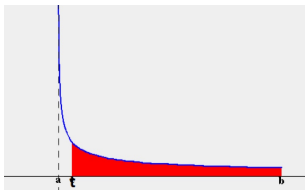
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجور  $a$  كما في الشكل التالي

(٢) إذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $(a, b]$  وكانت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجور  $a$  كما في الشكل التالي

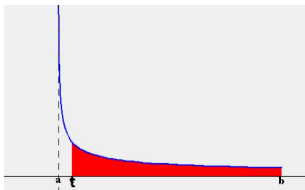




(٢) إذا كانت  $f$  متصلة على الفترة  $(a, b]$  وكانت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجور  $a$  كما في الشكل التالي



فيكون التكامل المعتل على الصورة التالية:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت  $\pm\infty$  فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت  $\pm\infty$  فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) اذا كانت الدالة  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b]$  ما عدا عند النقطة  $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$$

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت  $\pm\infty$  فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) اذا كانت الدالة  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b]$  ما عدا عند النقطة  $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$$

فان التكامل المعتل هو

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت  $\pm\infty$  فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) اذا كانت الدالة  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b]$  ما عدا عند النقطة  $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

فان التكامل المعتل هو

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

يكون كل من التكاملين السابقين ( الحالتين ١ و ٢ ) تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت  $\pm\infty$  فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) اذا كانت الدالة  $f$  متصلة على الفترة  $[a, b]$  ما عدا عند النقطة  $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

فان التكامل المعتل هو

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

وبالمثل يكون التكامل تقاربياً اذا كان كل من التكاملين في الطرف الايمن تقاربياً ويكون تباعدياً اذا كان أحدهما تباعدياً او كلاهما.

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx.$$

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx.$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx.$$



مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx.$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx.$$

$$(3) \int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2} dx.$$

## Exercises

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

## Exercises

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

$$(4) \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

$$(4) \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

$$(4) \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(4 + x^2)} dx.$$

*Thanks for listening.*