# المحاضرة (10، 11) – 4 ساعة

# التجارب العاملية

## الأهداف:

1- اكساب الطالب معرفة مزايا وعيوب التجارب العاملية
2- اكساب الطالب معرفة تكوين المعالجات من العوامل تحت الدراسة واستكشاف التفاعلات.
3 − اكساب الطالب مهارة إجراء التجربة العاملية وفقا للتصاميم السابقة واكتشاف التفاعلات.

## المحتويات

1- مقدمة:
2- تعريف التجربة العملية.
3- مزايا وعيوب التجارب العاملية.
4- تركيب المعالجات من مستويات العوامل.
5- تقدير الآثار البسيطة والرئيسية للعامل.
6- تقدير أثر التفاعل.
7- العرض البياني لخطوط متوسطات المعالجات واستكشاف التفاعل.
8- الاستدلال الإحصائي في حالة تجربة عاملية ذات عاملين:
9- النموذج الخطي في حالة تصميم تام التعشية وكذلك قطاعات عشوائية كاملة وافتراضاته.
10- جدول تحليل التباين.
11- اختبار معنوية الآثار الرئيسية والتفاعل.

**مقدمة:**

التجربة العاملية هي تجربة تشمل عاملين أو أكثر، وتتكون المعالجات فيها من كل التوليفات الممكنة لمستويات العوامل محل الدراسة، وتتيح لنا التجارب العاملية دراسة الآتي:

ومثال على ذلك، دراسة تجربة عاملية مكونة من 3 عوامل (متغيرات مستقلة وصفية) في حالة زراعة نوع جديد من الذرة، وهذه العوامل هي:

$A$ : كمية التقاوي للهكتار ، وتتكون من ثلاث مستويات $a=3$ هي $(A: A_1, A_2, A_3)$،

$B$ : كمية السماد ، وتتكون من مستويين $b=2$ هما $(B: B_1, B_2)$

$C$: نوعية التربة وتتكون من مستويين $C=2$ هما $(C: C_1, C_2)$

يكون عدد المعالجات $t=abc=3\times2\times2=12$ معالجة هي:

| | $A_1$ | | $A_2$ | | $A_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_1$ | $B_2$ |
| $C_1$ | $A_1B_1C_1$ | $A_1B_2C_1$ | $A_2B_1C_1$ | $A_2B_2C_1$ | $A_3B_1C_1$ | $A_3B_2C_1$ |
| $C_2$ | $A_1B_1C_2$ | $A_1B_2C_2$ | $A_2B_1C_2$ | $A_2B_2C_2$ | $A_3B_1C_2$ | $A_3B_2C_2$ |

وبعد تكوين المعالجات يتم تحديد التصميم المستخدم استنادا على أسس التصميم التي سبق دراستها، وهي: عدد التكرارات لكل معالجة $r$، ومن ثم عدد الوحدات التجريبية، وخصائصها، والتعشية، والنموذج الرياضي المستخدم، ونوعه (ثابت ، أم عشوائي).

**مزايا تطبيق التجارب العاملية**

- تقليل التكلفة والوقت، فإذا استخدمنا تجربة لكل عامل على حدة ،سنحتاج ضعف عدد الوحدات التجريبية التي تستخدم في حالة التجارب العاملية للحصول على نفس الدقة المطلوبة.
- اكتشاف التفاعلات وتقديرها.

**عيوب استخدام التجارب العاملية**

- يكبر حجم التجربة بازدياد عدد العوامل ومستوياتها، مما يجعل إجراء التجربة وفقا لتصميم معين مكلف.
- يصعب تفسير التفاعلات ذات الدرجات العليا.
- يصعب تطبيق التجارب العاملية الكبيرة في الحقل أو المعمل.

**متوسطات المعالجات**

للتعرف على متوسطات المعالجات وكيفية استخدامها في حساب الآثار الرئيسية وكذلك آثار التفاعلات سوف نفترض أن التجربة تتكون من عاملين ، العامل $A$ وله مستويان $(A: A_1, A_2)$ أي أن $a = 2$، والعامل $B$ وله ثلاث مستويات $(B: B_1, B_2, B_3)$ أي أن $b = 3$، فإن متوسط الصفة (المتغير التابع) $\mu_{ij}$ يمكن تعريفه على أنه متوسط الاستجابة تحت تأثير المعالجة التي تتألف من المستوى $i$ للعامل $A$ والمستوى $j$ للعامل $B$. وبفرض أن لدينا البيانات التالية عن متوسطات الاستجابة للمعالجات:

جدول (1) : متوسطات معالجات تتولف من مستويي العاملين $A$ و $B$

| | | العامل $A$ | | $Mean$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | |
| العامل $B$ | $B_1$ | 5.44 $(\mu_{11})$ | 9.42 $(\mu_{21})$ | 7.43 $(\mu_{\cdot 1})$ |
| | $B_2$ | 7.94 $(\mu_{12})$ | 11.76 $(\mu_{22})$ | 9.85 $(\mu_{\cdot 2})$ |
| | $B_3$ | 8.90 $(\mu_{13})$ | 14.34 $(\mu_{23})$ | 11.62 $(\mu_{\cdot 3})$ |
| $Mean$ | | 7.43 $(\mu_{1\cdot})$ | 11.84 $(\mu_{2\cdot})$ | **9.633** $(\mu_{\cdot\cdot})$ |

المصدر: حسبت من بيانات افتراضية

حيث أن:

أ- التأثيرات الرئيسية للعامل $A$ : يحسب الأثر الرئيسي للعامل $A$ في المستوى $i$ بإيجاد الفرق بين متوسط الصفة للمستوى $i$ للعامل $A$ $(\mu_i.)$ والمتوسط الكلي $(\mu..)$، ومن البيانات أعلاه يمكن حساب هذه التأثيرات كالتالي:

- التأثير الرئيسي للعامل $A$ في مستواه الأول.

$$\alpha_1 = \mu_1. - \mu.. = (7.43 - 9.63) = \text{-}2.21$$

- التأثير الرئيسي للعامل $A$ في مستواه الثاني:

$$\alpha_2 = \mu_2. - \mu.. = (11.84 - 9.63) = 2.21$$

ب- التأثيرات الرئيسية للعامل $B$ : يمكن حسابه بنفس الطريقة أعلاه، حيث أن الأثر الرئيسي للعامل $B$ في المستوى $j$ يحسب بإيجاد الفرق $(\beta_j = \mu._j - \mu..)$، وبالتطبيق على البيانات أعلاه نجد أن:

- التأثير الرئيسي للعامل $B$ في مستواه الأول.

$$\beta_1 = \mu._1 - \mu.. = (7.43 \text{-} 9.63) = \text{-}2.20$$

- التأثير الرئيسي للعامل $B$ في مستواه الثاني.

$$\beta_2 = \mu._2 - \mu.. = (9.85 - 9.63) = 0.22$$

- التأثير الرئيسي للعامل $B$ في مستواه الثالث.

$$\beta_3 = \mu._3 - \mu.. = (11.62 - 9.63) = 1.99$$

أما المتوسطات $(\mu.., \mu._j, \mu_i.)$ فقد تم حسابها بتطبيق المعادلات التالية:

$$\mu_i. = \frac{\sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}}{b}, \quad \mu._j = \frac{\sum_{i=1}^{a} \mu_{ij}}{a}, \quad \mu.. = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}}{ab} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \mu_i.}{a} = \frac{\sum_{j=1}^{b} \mu._j}{b} \qquad (1)$$

ج- تأثيرات العامل التجميعية: وهي التي تمكننا من الحصول على متوسط المعالجة التي تتألف من المستوى $i$ للعامل $A$ والمستوى $j$ للعامل $B$ والتي يرمز لها بالرمز $\mu_{ij}$، ويتم ذلك بإضافة الآثار الرئيسية لكلا العاملين بالمتوسط العام. ومن ثم تطبق المعادلة التالية:

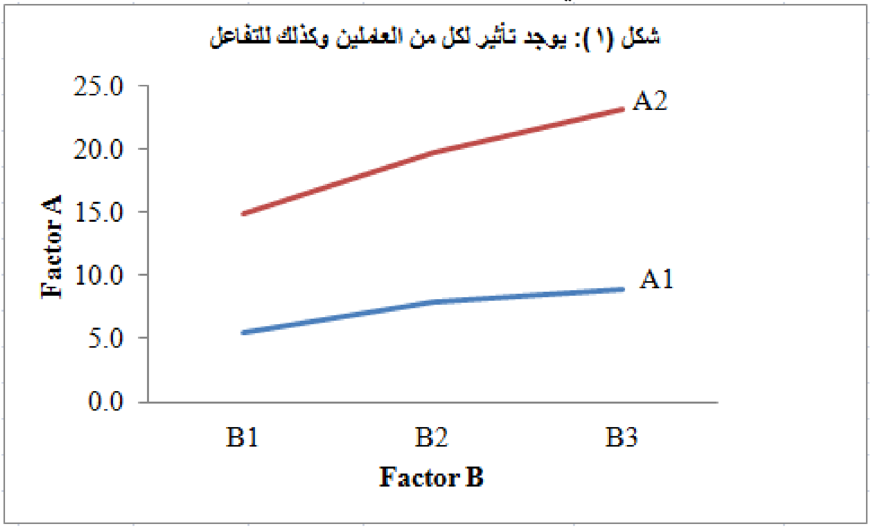
$$\mu_{ij} = \mu.. + \alpha_i + \beta_j, \qquad i = 1,2,..., a, \; j = 1,2,..., b \qquad (2)$$

- إذا تم حساب كل متوسط من المتوسطات $\mu_{ij}$، $j = 1,2,..., b, \; i = 1,2,..., a$ بالمعادلة (2) دل ذلك على أن تأثيرات العامل تجميعية وأن العوامل لا تتفاعل، أو لا يوجد تفاعلات عوامل، ومن ثم يمكن وصف تأثيرات العاملين كلا على حدة.
- أما إذا كان نتيجة الطرف الأيمن في المعادلة (2) تختلف عن $\mu_{ij}$ دل ذلك على وجود تفاعلات عوامل.
- وفي بيانات الجدول (1) أعلاه يلاحظ أن:

$$\mu_{11} = \mu.. + \alpha_1 + \beta_1 = 9.63 + (-2.21) + (-2.20) = 5.22 \neq 5.44$$

$$\mu_{23} = \mu.. + \alpha_2 + \beta_3 = 9.63 + (2.21) + (1.99) = 13.83 \neq 14.34$$

ويدل ذلك على أن العاملين يتفاعلان، ويمكن عرض الرسم البياني للمتوسطات $\mu_{ij}$ الموجودة بالجدول على النحو التالي.




يلاحظ من الشكل أعلاه عدم توازي هذه الخطوط، وطالما أن الخطوط غير متوازية فهذا معناه إمكانية تقاطع الخطوط، ويستدل من ذلك على وجود تفاعل للعاملين $B, A$ .

د- تعريف التفاعل.التفاعل هو مقدار الفرق بين متوسط المعالجة $\mu_{ij}$ والتأثير التجميعي، أي أن:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\alpha_i + \beta_j + \mu..) \qquad (3)$$

حيث أن $(\alpha\beta)_{ij}$ هو التفاعل بين المستوى $i$ للعامل $A$ والمستوى $j$ للعامل $B$ ، ومن ثم يمكن التعرف ببساطة على وجود تأثيرات لعوامل متفاعلة من خلال الآتي:

1- الرسم البياني: إذا كان خطين على الأقل متخالفان (غير متوازيان) دل ذلك على أن العوامل تتفاعل.

2- إذا حققت البيانات المعادلة (2) لجميع المتوسطات $\mu_{ij}$ دل ذلك على أن تأثيرات التفاعل المحسوبة بالمعادلة (3) كلها تساوي صفرا، وأن العوامل لا تتفاعل.

ومن الجدول (1) تم حساب آثار التفاعلات بتطبيق المعادلة (3) ، ولخصت النتائج بالجدول التالي.

جدول (2): قيم تأثيرات التفاعلات الممكنة المحسوبة من جدول (1) بتطبيق المعادلة (3)

| العامل $B$ | العامل $A$: $A_1$ | العامل $A$: $A_2$ |
|---|---|---|
| $B_1$ | $(\alpha\beta)_{11}$ 0.2167 | $(\alpha\beta)_{21}$ -0.2167 |
| $B_2$ | $(\alpha\beta)_{12}$ 0.2967 | $(\alpha\beta)_{22}$ -0.2967 |
| $B_3$ | $(\alpha\beta)_{13}$ -0.5133 | $(\alpha\beta)_{23}$ 0.5133 |

إن تحديد ما إذا كانت التفاعلات مهمة أو غير مهمة من اختصاص الباحث وليس قرارا إحصائيا.

**النموذج الخطي العام في حالة عاملين (متغيرين مستقلين وصفيين)**

يهتم هذا الفصل بدراسة التجارب العملية ذات عاملين، ومن السهل تعميم الدراسة على أكثر من عاملين. فإذا احتوت التجربة على عاملين $(B, A)$، حيث أن عدد مستويات العامل $A$ هي $a$ مستوى ويرمز لها بالرموز: $A: A_1, A_2, ..., A_a$، وأن عدد مستويات العامل $B$ هي $b$ مستوى ويرمز لها بالرموز: $B: B_1, B_2, ..., B_b$، فإن المعالجات $A_iB_j$ الممكن تكوينها هي: $(A_1B_1, A_1B_2, ..., A_aB_b)$ وعددها $ab$ معالجة. وإذا كانت $r$ تمثل مكررات كل معالجة، فإن النموذج الخطي بدلالة المتوسطات يمكن كتابته على الصورة التالية:

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tag{4}$$

حيث أن:

$y_{ijk}$: يعبر عن المشاهدة رقم $k$ على المفردة أو الوحدة التجريبية التي استلمت المستوى $A_i$ للعامل $A$ والمستوى $B_j$ للعامل $B$.

$\mu_{ij}$: هو متوسط المشاهدات أو الاستجابة للمعالجة التي تتألف من المستوى $A_i$ للعامل $A$ والمستوى $B_j$ للعامل $B$ , ويمكن إعادة صياغة النموذج (4) في الصورة التالية.

$$y_{ijk} = \mu.. + (\mu_{ij} - \mu..) + \varepsilon_{ijk} \tag{5}$$

حيث يعبر $(\mu_{ij} - \mu..)$ عن تأثير المعالجة التي تتألف عند المستوى $i$ للعامل $A$ والمستوى $j$ للعامل $B$، ومن ثم يمكن التعبير عنها كالتالي:

$$(\mu_{ij} - \mu..) = (\mu_{i}. - \mu..) + (\mu._{j} - \mu..) + (\mu_{ij} - \mu_{i}. - \mu._{j} + \mu..) \tag{6}$$

ويمكن إعادة صياغة المعادلة (6) بدلاة التأثيرات كالتالي.

$$\mu_{ij} = \mu.. + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \tag{7}$$

وبالتعويض عن $\mu_{ij}$ في المعادلة (4) نجد أن النموذج الخطي العام هو:

$$y_{ijk} = \mu.. + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tag{8}$$

وباستخدم المتغيرات الصورية يمكن صياغة نموذج الانحدار الخطي المكافيء لهذا النموذج الخطي وهو:

$$\begin{aligned} y_{ijk} = \mu.. &+ \alpha_1 D_{A_1} + ... + \alpha_{a-1} D_{A_{a-1}} + \beta_1 D_{B_1} + ... + \beta_{b-1} D_{B_{b-1}} \\ &+ \theta_{11}\left(D_{A_1} D_{B_1}\right) + ... + \theta_{(a-1)(b-1)1}\left(D_{A_{(a-1)}} D_{B_{(b-1)}}\right) + \varepsilon_{ijk} \end{aligned} \tag{10}$$

حيث أن:

$D_{A_i}$: هو متغير صوري يعبر عن المستوى $i$ للعامل $A$، ويعبر عنه كالتالي:

$D_{A_i} = 1$ : إذا كانت المفردة تنتمي للمستوى $i$ للعامل $A$

$D_{A_i} = 0$ : إذا كانت المفردة تنتمي لمستوى آخر خلاف المستويين $i$، $a$ للعامل $A$

$D_{A_i} = -1$ : إذا كانت المفردة تنتمي للمستوى $a$ للعامل $A$

$D_{B_j}$: هو متغير صوري يعبر عن المستوى $j$ للعامل $B$، ويعبر عنه كالتالي:

$D_{B_j} = 1$ : إذا كانت المفردة تنتمي للمستوى $j$ للعامل $B$

$D_{B_j} = 0$ : إذا كانت المفردة تنتمي لمستوى آخر خلاف المستويين $j$، $b$ للعامل $B$

$D_{B_j} = -1$ : إذا كانت المفردة تنتمي للمستوى $b$ للعامل $B$

وتحتوي المعادلة أعلاه على عدد $[a+b+(a-1)(b-1)-1]$ يمكن تقديرها بطريقة المربعات الصغرىOLS، وتحسب التقديرات بتطبيق المعادلات التالية:

$$\hat{\mu}.. = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}}{abr} = \frac{Y...}{abr} = \bar{Y}...$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\alpha}_i = (\hat{\mu}_i. - \hat{\mu}..) = (\bar{Y}_i.. - \bar{Y}...), && \bar{Y}_i.. = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}}{br} = \frac{Y_i..}{br} \\
&\hat{\beta}_j = (\hat{\mu}._j - \hat{\mu}..) = (\bar{Y}._j. - \bar{Y}...), && \bar{Y}._j. = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}}{ar} = \frac{Y._j.}{ar} \\
&\hat{\theta}_{ij} = (\hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu}_i. - \hat{\mu}._j + \hat{\mu}..) = (\bar{Y}_{ij}. - \bar{Y}_i.. - \bar{Y}._j. + \bar{Y}...), && \bar{Y}_{ij}. = \frac{\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}}{r} = \frac{Y_{ij}.}{r}
\end{aligned} \tag{11}$$

ومن الممكن حساب الأخطاء المعيارية لتقديرات معاملات الانحدار الموضحة أعلاه باستخدام المعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
&S.E_{\bar{Y}...} = \sqrt{\frac{MSE}{abr}} \qquad S.E_{\hat{\alpha}_i} = \sqrt{\frac{(a-1)MSE}{abr}} \\
&S.E_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{\frac{(b-1)MSE}{abr}} \qquad S.E_{\hat{\theta}_{ij}} = \sqrt{\frac{(a-1)(b-1)MSE}{abr}}
\end{aligned} \tag{12}$$

ومن ثم يمكن اختبار معنوية معاملات الانحدار باستخدام إحصائية الاختبار $t$. كما سبق عند عرض أسلوب تحليل الانحدار.

**المفهوم الثاني للمتغيرات الصورية في النموذج**

يمكن إعادة كتابة النموذج (10) بدلالة النوع الثاني للمتغيرات الصورية المتعارف عليها في برنامج SPSS ، وذلك كما يلي:

$$\begin{aligned}
y_{ijk} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 D_{A_1} + \ldots + \tilde{\alpha}_{a-1} D_{A_{a-1}} + \tilde{\beta}_1 D_{B_1} + \ldots + \tilde{\beta}_{b-1} D_{B_{b-1}} \\
+ \tilde{\theta}_{11}\left(D_{A_1} D_{B_1}\right) + \ldots + \tilde{\theta}_{(a-1)(b-1)1}\left(D_{A_{(a-1)}} D_{B_{(b-1)}}\right) + \varepsilon_{ijk}
\end{aligned} \tag{13}$$

حيث أن

$D_{A_i}$ : هو متغير صوري يعبر عن المستوى $i$ للعامل $A$ ، ويعبر عنه كالتالي:

$D_{A_i} = 1$ : إذا كانت المفردة تنتمي للمستوى $i$ للعامل $A$

$D_{A_i} = 0$ : إذا كانت المفردة تنتمي لمستوى آخر خلاف المستوى $i$

$D_{B_j}$ : هو متغير صوري يعبر عن المستوى $j$ للعامل $B$ ، ويعبر عنه كالتالي:

$D_{B_j} = 1$ : إذا كانت المفردة تنتمي للمستوى $j$ للعامل $B$ .

$D_{B_j}=0$ : إذا كانت المفردة تنتمي لمستوى آخر خلاف المستوى $j$ .

وتحتوي المعادلة (13) على عدد $[a+b+(a-1)(b-1)-1]$ يمكن تقديرها بطريقة المربعات الصغرىOLS، وتحسب التقديرات بتطبيق المعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_0 &= \bar{Y}_{ab}. \\
\hat{\alpha}_i &= \left(\bar{Y}_{ib}. - \bar{Y}_{ab}.\right) \\
\hat{\beta}_j &= \left(\bar{Y}_{aj}. - \bar{Y}_{ab}.\right) \\
\hat{\theta}_{ij} &= \left(\bar{Y}_{ij}. - \bar{Y}_{ab}.\right) - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j = \bar{Y}_{ij}. - \bar{Y}_{ib}. - \bar{Y}_{aj}. + \bar{Y}_{ab}.
\end{aligned} \tag{14}$$

ومن الممكن حساب الأخطاء المعيارية لتقديرات معاملات الانحدار أعلاه وذلك باستخدام المعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
S.E_{\hat{\beta}_0} &= \sqrt{\frac{MSE}{r}} \qquad S.E_{\hat{\alpha}_i} = S.E_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{\frac{2MSE}{r}} \\
S.E_{\hat{\theta}_{ij}} &= \sqrt{\frac{4MSE}{r}}
\end{aligned} \tag{15}$$

ومن ثم يمكن اختبار معنوية معاملات الانحدار باستخدام إحصائية الاختبار $t$.

**الصورة المصفوفية لمعادلة الانحدار**

يمكن كتابة كلا المعادلتين (13, 10) في صورة مصفوفة، وذلك بافتراض أن لدينا عاملين هما: العامل $A$ وله مستويان $(A_1, A_2)$ أي أن $a=2$، والعامل $B$ وله ثلاث مستويات $(B_1, B_2, B_3)$ أي أن $b=3$، وأن المكررات لكل معالجة $r=3$ ، فإن معادلة الانحدار المصفوفية هي:

معادلة الانحدار المصفوفية للنموذج(10) معادلة الانحدار المصفوفية للنموذج (13)

$$
\begin{bmatrix} y_{111}\\ y_{112}\\ y_{113}\\ y_{121}\\ y_{122}\\ y_{123}\\ y_{131}\\ y_{132}\\ y_{133}\\ y_{211}\\ y_{212}\\ y_{213}\\ y_{221}\\ y_{222}\\ y_{223}\\ y_{231}\\ y_{232}\\ y_{233} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1&1&1&0&1&0\\
1&1&1&0&1&0\\
1&1&1&0&1&0\\
1&1&0&1&0&1\\
1&1&0&1&0&1\\
1&1&0&1&0&1\\
1&1&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0\\
1&0&0&1&0&0\\
1&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_0\\ \tilde{\alpha}_1\\ \tilde{\beta}_1\\ \tilde{\beta}_2\\ \tilde{\theta}_{11}\\ \tilde{\theta}_{12} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \varepsilon_{111}\\ \varepsilon_{112}\\ \varepsilon_{113}\\ \varepsilon_{121}\\ \varepsilon_{122}\\ \varepsilon_{123}\\ \varepsilon_{131}\\ \varepsilon_{132}\\ \varepsilon_{133}\\ \varepsilon_{211}\\ \varepsilon_{212}\\ \varepsilon_{213}\\ \varepsilon_{221}\\ \varepsilon_{222}\\ \varepsilon_{223}\\ \varepsilon_{231}\\ \varepsilon_{232}\\ \varepsilon_{233} \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} y_{111}\\ y_{112}\\ y_{113}\\ y_{121}\\ y_{122}\\ y_{123}\\ y_{131}\\ y_{132}\\ y_{133}\\ y_{211}\\ y_{212}\\ y_{213}\\ y_{221}\\ y_{222}\\ y_{223}\\ y_{231}\\ y_{232}\\ y_{233} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1&1&1&0&1&0\\
1&1&1&0&1&0\\
1&1&1&0&1&0\\
1&1&0&1&0&1\\
1&1&0&1&0&1\\
1&1&0&1&0&1\\
1&1&-1&-1&-1&-1\\
1&1&-1&-1&-1&-1\\
1&1&-1&-1&-1&-1\\
1&-1&1&0&-1&0\\
1&-1&1&0&-1&0\\
1&-1&1&0&-1&0\\
1&-1&0&1&0&-1\\
1&-1&0&1&0&-1\\
1&-1&0&1&0&-1\\
1&-1&-1&-1&1&1\\
1&-1&-1&-1&1&1\\
1&-1&-1&-1&1&1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mu_{..}\\ \alpha_1\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \theta_{11}\\ \theta_{12} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \varepsilon_{111}\\ \varepsilon_{112}\\ \varepsilon_{113}\\ \varepsilon_{121}\\ \varepsilon_{122}\\ \varepsilon_{123}\\ \varepsilon_{131}\\ \varepsilon_{132}\\ \varepsilon_{133}\\ \varepsilon_{211}\\ \varepsilon_{212}\\ \varepsilon_{213}\\ \varepsilon_{221}\\ \varepsilon_{222}\\ \varepsilon_{223}\\ \varepsilon_{231}\\ \varepsilon_{232}\\ \varepsilon_{233} \end{bmatrix}
$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{DB} + \varepsilon \qquad (16)$$

وتكون تقديرات المربعات الصغرى للمعاملات هي:

$$\hat{\mathrm{B}} = (\mathrm{D}'\mathrm{D})^{-1}\,\mathrm{D}`\mathrm{Y} \qquad (17)$$

وتكتب مصفوفة تباين وتغاير التقديرات على الصورة التالية:

$$\mathrm{VAR}(\hat{\mathrm{B}}) = MSE(\mathrm{D}'\mathrm{D})^{-1} \qquad (18)$$

ومنها يمكن حساب الأخطاء المعيارية بأخذ الجذور التربيعية لعناصر القطر الرئيسي لمصفوفة التباين والتغاير $\mathrm{VAR}(\hat{\mathrm{B}})$

وبفرض أن البيانات المتاحة عن المتغير التابع تحت تأثير العاملين هي:

| | العامل $A$ | |
|---|---|---|
| العامل $B$ | $A_1$ | $A_2$ |
| $B_1$ | 10 | 12 |
| | 8 | 12 |
| | 10 | 13 |
| $B_2$ | 8 | 10 |
| | 9 | 7 |
| | 7 | 12 |
| $B_3$ | 7 | 7 |
| | 8 | 9 |
| | 6 | 9 |

ويمكن الحصول على تقدير المربعات الصغرى لمعاملات كلا النموذجين بتطبق المعادلة (17) .

أولا: النموذج (10)

$$D`D=\begin{bmatrix}18&0&0&0&0&0\\0&18&0&0&0&0\\0&0&12&6&0&0\\0&0&6&12&0&0\\0&0&0&0&12&6\\0&0&0&0&6&12\end{bmatrix}\qquad D`Y=\begin{bmatrix}Y...\\Y_1..-Y_2..\\Y._1.-Y._3.\\Y._2.-Y._3.\\Y_{11}.-Y_{13}.-Y_{21}.+Y_{23}.\\Y_{12}.-Y_{13}.-Y_{22}.+Y_{23}.\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}164\\-18\\19\\7\\-5\\-1\end{bmatrix}$$

ومن ثم تقديرات OLS هي:

$$\hat{B}=(D'D)^{-1}D'Y=\begin{bmatrix}0.0556&0&0&0&0&0\\0&0.0556&0&0&0&0\\0&0&0.1111&-0.0556&0&0\\0&0&-0.0556&0.1111&0&0\\0&0&0&0&0.1111&-0.0556\\0&0&0&0&-0.0556&0.1111\end{bmatrix}\begin{bmatrix}164\\-18\\19\\7\\-5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.111\\-1\\1.722\\-0.278\\-0.5\\0.1667\end{bmatrix}$$

ثانيا: النموذج (13)

$$D`D=\begin{bmatrix}18&9&6&6&3&3\\9&9&3&3&3&3\\6&3&6&0&3&0\\6&3&0&6&0&3\\3&3&3&3&0&0\\3&3&0&3&0&3\end{bmatrix}\qquad D`Y=\begin{bmatrix}Y...\\Y_1..\\Y._1.\\Y._2.\\Y_{11}.\\Y_{12}.\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}164\\73\\65\\53\\28\\24\end{bmatrix}$$

ومن ثم تقديرات OLS هي:

$$\hat{\hat{B}}=(D'D)^{-1}D'Y=\begin{bmatrix}0.3333&-0.3333&-0.3333&-0.3333&0.3333&0.3333\\-0.3333&0.6667&0.3333&0.3333&-0.6667&-0.6667\\-0.3333&0.3333&0.6667&0.3333&-0.6667&-0.3333\\-0.3333&0.3333&0.3333&0.6667&-0.3333&-0.6667\\0.3333&-0.6667&-0.6667&-0.3333&1.3333&0.6667\\0.3333&-0.6667&-0.3333&-0.6667&0.6667&1.3333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}164\\73\\65\\53\\28\\24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.333\\-1.333\\4\\1.333\\-1.667\\-0.333\end{bmatrix}$$

وهي نفس التقديرات التي يمكن الحصول عليها باستخدام المعادلات (14, 11)، ولتوضيح ذلك نقوم بحساب المتوسطات $(\bar{Y}...,\ \bar{Y}_i..,\ \bar{Y}._j.,\ \bar{Y}_{ij}.)$ ، وهي موضحة بالجدول التالي.

| | العامل $A$ | | |
|---|---|---|---|
| العامل $B$ | $A_1$ | $A_2$ | $(\bar{Y}._j.)$ |
| $B_1$ | $(\bar{Y}_{11}.)$ 9.333 | $(\bar{Y}_{21}.)$ 12.333 | $(\bar{Y}._1.)$ 10.833 |
| $B_2$ | $(\bar{Y}_{12}.)$ 8.000 | $(\bar{Y}_{22}.)$ 9.667 | $(\bar{Y}._2.)$ 8.833 |
| $B_3$ | $(\bar{Y}_{13}.)$ 7.000 | $(\bar{Y}_{23}.)$ 8.333 | $(\bar{Y}._3.)$ 7.667 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(\bar{Y}_{i}..)$ | $(\bar{Y}_{1}..)$ 8.111 | $(\bar{Y}_{2}..)$ 10.111 | $(\bar{Y}...)$ 9.111 |

ومن ثم تأخذ تقديرات OLS وفقا للمعادلات (14, 11) الصورة التالية:

| | |
|---|---|
| تقديرات OLS لمعاملات النموذج (10) باستخدام المعادلات (11) | $\hat{B}=\begin{bmatrix}\hat{\mu}..\\ \hat{\alpha}_1\\ \hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \hat{\theta}_{11}\\ \hat{\theta}_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Y}...\\ \bar{Y}_1..-\bar{Y}...\\ \bar{Y}_{.1.}-\bar{Y}...\\ \bar{Y}_{.2.}-\bar{Y}...\\ \bar{Y}_{11}-\bar{Y}_1..-\bar{Y}_{.1.}+\bar{Y}...\\ \bar{Y}_{12}-\bar{Y}_1..-\bar{Y}_{.2.}+\bar{Y}...\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.111\\ 8.111-9.111\\ 10.833-9.111\\ 8.833-9.111\\ 9.333-8.111-10.833+9.111\\ 8-8.111-8.833+9.111\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.111\\ -1\\ 1.722\\ -0.278\\ -0.5\\ 0.1667\end{bmatrix}$ |
| تقديرات OLS لمعاملات النموذج (13) باستخدام المعادلات (14) | $\hat{\hat{B}}=\begin{bmatrix}\hat{\hat{\alpha}}\\ \hat{\hat{\alpha}}_1\\ \hat{\hat{\beta}}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \hat{\theta}_{11}\\ \hat{\theta}_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Y}_{23}.\\ \bar{Y}_{13}.-\bar{Y}_{23}.\\ \bar{Y}_{21}.-\bar{Y}_{23}.\\ \bar{Y}_{22}.-\bar{Y}_{23}.\\ \bar{Y}_{11}.-\bar{Y}_{23}.-\hat{\hat{\alpha}}_1-\hat{\hat{\beta}}_1\\ \bar{Y}_{12}.-\bar{Y}_{23}.-\hat{\hat{\alpha}}_1-\hat{\hat{\beta}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.333\\ 7.000-8.333\\ 12.333-8.333\\ 9.667-8.333\\ 9.333-8.333-(-1.333)-4.000\\ 8.000-8.333-(-1.333)-1.333\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.333\\ -1.333\\ 4.000\\ 1.333\\ -1.667\\ -0.333\end{bmatrix}$ |

**جدول تحليل التباين**

من أهم الاختبارات التي يمكن إجراؤها عند تطبيق النموذج الخطي العام في التجارب العاملية ما يلي:

1- اختبار مدى مناسبة النموذج للبيانات حيث يأخذ الفرض العدم والفرض البديل الصورة التالية.

*الفرض العدم*: النموذج الخطي المقترح غير مناسب

$$H_o:\tilde{\alpha}_1=...=\tilde{\alpha}_{a-1}=\tilde{\beta}_1=...=\tilde{\beta}_{b-1}=\tilde{\theta}_{11}=...\tilde{\theta}_{(a-1),(b-1)}=0$$

*الفرض البديل*: النموذج الخطي المقترح مناسب

$$H_a: Not\ all\ coefficien\ ts\ \ equal\ zeros$$

2- اختبار توازي خطوط الانحدار (مدى أهمية التفاعل في التحليل) حيث يأخذ الفرض العدم والفرض البديل الصورة التالية.

*الفرض العدم*: خطوط الانحدار متوازية (إدخال التفاعل في النموذج لا يحسن قدرته التنبؤية)

$$H_o:\tilde{\theta}_{11}=...=\tilde{\theta}_{(a-1),(b-1)}=0$$

*الفرض البديل*: خطوط الانحدار ليست كلها متوازية (التفاعل يحسن قدرة النموذج التنبؤية)

$$H_a: Not\ all\ coefficien\ ts\ \ equal\ zeros$$

3- اختبار تساوي متوسطات العامل الأول $A$ عند المستوى $b$ (المرجعي) للعامل الأول $B$. حيث يأخذ الفرضين العدم والبديل الصورة التالية.

*الفرض العدم*: (إدخال العامل الأول $A$ لا يحسن القدرة التنبؤية للنموذج)

$$H_o:\tilde{\alpha}_1=...=\tilde{\alpha}_{(a-1)}=0 \;\; or \;\; H_0:\mu_{1b}=\mu_{2b}=...=\mu_{ab}$$

*الفرض البديل*: (إدخال العامل الأول $A$ يحسن القدرة التنبؤية للنموذج)

$$H_a: Not\ all\ coefficients\ \tilde{\alpha}_i\ \ equal\ zeros$$

4- اختبار تساوي متوسطات العامل الثاني $B$ عند المستوى $a$ (المرجعي) للعامل الأول $A$. حيث يأخذ الفرضين العدم والبديل الصورة التالية.

*الفرض العدم*: (إدخال العامل الثاني $B$ لا يحسن القدرة التنبؤية للنموذج)

$$H_o:\tilde{\beta}_1=...=\tilde{\beta}_{(b-1)}=0 \;\; or \;\; H_0:\mu_{a1}=\mu_{a2}=...=\mu_{ab}$$

*الفرض البديل*: (إدخال العامل الثاني $B$ يحسن القدرة التنبؤية للنموذج)

$$H_a: Not\ all\ coefficients\ \tilde{\beta}_j\ \ equal\ zeros$$

ويلاحظ في الإختبار الثاني أنه إذا تم قبول فرض توازي خطوط الانحدار، مستدلا منه على عدم معنوية التأثير المشترك للعاملين، يمكن إزالة التفاعل وإعادة إجراء الاختبارين الثالث والرابع وهو ما يسمى في بعض الأحيان باختبار تطابق خطوط الانحدار.

ولكي يتم إجراء هذه الاختبارات يجب تكوين جدول تحليل تباين مفصل، ووفقا للنموذج الخطي العام (13) يمكن إرجاع مصادر الاختلاف في المتغير التابع إلى أربعة مصادر هي: العامل $A$، والعامل $B$ ، والتفاعل $AB$، والأخطاء $\varepsilon$. ومن ثم يمكن التعبير عن مجموع المربعات الكلي $SSTo$ بالصورة التالية:

$$\begin{aligned} SSTo &= SSR(A,B,AB)+SSE \\ &= \left(SSR(A)+SSR(B)+SSR(AB)\right)+SSE \end{aligned} \tag{19}$$

وتبين المعادلات التالية كيفية حساب مجموع المربعات الخاصة بكل مصدر:

| المصدر | معادلة حساب مجموع المربعات | درجات الحرية |
|---|---|---|
| مجموع مربعات تعزى للعامل $A$ | $SSR(A)=\sum_{i=1}^{a}\frac{Y_{i}..^2}{br}-\frac{Y...^2}{abr}=br\sum_{i=1}^{a}\bar{Y}_{i}..^2-abr\bar{Y}...^2$ | $(a-1)$ |
| مجموع مربعات تعزى للعامل $B$ | $SSR(B)=\sum_{j=1}^{b}\frac{Y._{j}.^2}{ar}-\frac{Y...^2}{abr}=ar\sum_{j=1}^{b}\bar{Y}._{j}.^2-abr\bar{Y}...^2$ | $(b-1)$ |
| مجموع مربعات تعزى للتفاعل $AB$ | $SSR(AB)=SSTr-SSR(A)-SSR(B)$, $SSTr=\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{ij}.^2}{r}-\frac{Y...^2}{abr}\right)=\left(r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{Y}_{ij}.^2-abr\bar{Y}...^2\right)$ | $(a-1)(b-1)$ |
| مجموع مربعات تعزى للأخطاء | $SSE=SSTo-\left(SSR(A)+SSR(B)+SSR(AB)\right)$ | $\left(ab(r-1)\right)$ |
| مجموع المربعات الكلي | $SSTo=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}Y_{ijk}^2-\frac{Y...^2}{abr}$ | $(abr-1)$ |

(20)

وبمجرد حساب مجموع المربعات لكل مصدر يمكن تكوين جدول تحليل تباين مفصل ويأخذ الشكل التالي:

جدول (1): جدول تحليل تباين ANOVA في حالة تجربة عاملية مكونة من عاملين B,A

| $S.O.V$ | $SS$ | $df$ | $MS$ | $F^*$ |
|---|---|---|---|---|
| **النموذج** | $SSR(A, B, AB)$ | $(ab-1)$ | $MSR(A, B, AB)$ | $F^*_{(Model)} = \frac{MSR(A, B, AB)}{MSE}$ |
| العامل $A$ | $SSR(A)$ | $(a-1)$ | $MSR(A)$ | $F^*_{(A)} = \left(MSR(A)/MSE\right)$ |
| العامل $B$ | $SSR(B)$ | $(b-1)$ | $MSR(B)$ | $F^*_{(B)} = \left(MSR(B)/MSE\right)$ |
| التفاعل $AB$ | $SSR(AB)$ | $(a-1)(b-1)$ | $MSR(AB)$ | $F^*_{(AB)} = \left(MSR(AB)/MSE\right)$ |
| **الأخطاء** | $SSE$ | $\left(ab(r-1)\right)$ | $MSE$ | |
| **الكلي** | $SSTo$ | $(abr-1)$ | | |

، وتستخدم القيمة المحسوبة $F^*_{(Model)}$ لاجراء الاختبار الأول، $F^*_{(A)}$ لاجراء الاختبار الثاني، $F^*_{(B)}$ لاجراء الاختبار الثالث، $F^*_{(AB)}$ لاجراء الاختبار.