المحاضـــــرة الأولى

الدوال الرياضية

1- الثوابت والمتغيرات constants and variables

في التحليل الرياضي هناك نوعين من القيم احدهما ثابت والأخر متغير

والثـــــــابت :- عبارة عن رقم معين لايمكن تتغير قيمته بأي حال من الأحوال او تحت أي ظرف من الظروف مثل 12,50,100...الخ

أما المتـــــــغير:- فهو عبارة عن رمز X,Z,Y...الخ ويتميز بأنة يمكن استبداله أو اعطاءة أي رقم من مجموعة أرقام مختلفة. كما إن هناك نوعين من المتغيرات احدهما يعرف **بالمتغير التابع والأخر يعرف بالمتغير التابع**

المتغير المستقل :- هو المتغير الذي يأخذ قيم عددية دون التأثر بباقي المتغيرات . اواكثر.

المتغير التابع:- هو المتغير الذي يأخذ قيم عددية نتيجة اعتماده على متغير مستقل أو أكثر.

2- **الدوال** Function:-

الدالة :- عبارة عن علاقة بين متغيرين أو أكثر احد هذه المتغيرات يكون تابع والمتغير أو المتغيرات الأخرى تكون مستقلة فمثلاً لوكان هناك علاقة بين متغير تابع (y)ومتغير أخر مستقل (x) فإن الصيغة العامة التي تربط بينهما كالتالي Y=F(X)

وهذا يعني أن لكل قيمة من المتغير (X)فإن هناك قيمة محددة للمتغير (y) أي أن هناك علاقة مابين المتغير التابع (y) والمتغير المستقل (X) ولكنها لاتحدد لنا بالضبط طبيعة هذه العلاقة هل هي طرديه بحيث إذا زاد المتغير المستقل (x) يزداد المتغير التابع (y) ام عكسية بحيث إذا زاد المتغير المستقل (x) يقل المتغير التابع (y)

** مثال على دالة في صيغتها المحددة Y=2X

هذه الدالة تبين أن هناك علاقة طرديه بين المتغيرين Y,X فمثلا لوكانت قيمة X تساوي 2فان **المتغير التابع Y سيأخذ القيمة 4 ويلاحظ أن الدالة ممكن أن تكون متزايدة وممكن أن تكون متناقصة**

والدالة المتزايدة: هي الدالة التي تزيد فيها قيمة المتغير التابع(Y) تبعا لزيادة المتغير المستقل(X) (علاقة طرديه) مثال على هذه الدالةY=2+X

$$0\frac{\Delta y}{\Delta x} >$$

امالدالة المتناقصة: هي الدالة التي تنخفض فيها قيمة المتغير التابع(Y) تبعا لزيادة المتغير المستقل(X) (علاقة عكسية) مثال على هذه الدالة Y=2-X

$$0\frac{\Delta y}{\Delta x} <$$

هناك ثلاث ملاحظات أساسية بشان الدوال بخصوص الدوال هي:-

1- أن الدول قد تشمل على ثوابت أو ماتسمى بالمعلمات فمثلا في الدالة

$Y=\alpha X^{\beta}$

فان المعلمات α, B قد تاخذ قيم ثابتة فلو كانت $\beta = 3$ ،$\alpha =2$ فإن الدالة تكتب بالشكل التالي :- $Y = 2x^3$ وهذا يعني ان هذه القيم ستبقى ثابتة كما هي في الدالة عند جميع القيم المختلفة التي قد يأخذها المتغير x وبالتالي y

2- أن الدالة قد تحتوي على العديد من المتغيرات المستقلة مثل، $y=f(x_1, x_2, x_3, \dots)$

3- عادة مايتم تمثيل الدوال التي تحتوي على متغير واحد مستقل ومتغير تابع بيانياً بحيث يمثل المحور الراسي المتغير التابع والمحور الأفقي المتغير المستقل .

أنواع الدوال:-

أولا :- **الدالة الخطية**:- هي الدالة التي تاخذشكل خط مستقيم عند تمثيلها بيانيا (أي جميع قيم الدالة تقع على استقامة واحدة)وهي دالة تمثل معادلة من الدرجة الأولى وتأخذ عادة الصيغة العامة التالية $y= a+bx$ ويمكن تعريف عناصرها كالتالي:-

Yالمتغير التابع ،aالقاطع (الجزء الثابت) نقطة تقاطع الدالة مع المحور الراسي

+الشارة الموجبة تدل على العلاقة الطردية بين المتغير التابع والمتغير المستقل

ملاحظة (**اذاكانت الإشارة سالبة فتدل على العلاقة العكسية بين المتغير التابع والمتغير المستقل**)

Bميل الخط المستقيم الذي يمثل علاقة المتغير y بالمتغير x

Xيمثل المتغير المستقل

ويلاحظ أن المتغير المستقل في الدوال الخطية يكون دائماً مرفوع لقوة تساوي واحد

صحيح فمثلا بافتراض a=2 ، b=3فان الصيغة تكتب كالتالي y=2+3x

وبناء علية يمكن الحصول على قيم yعند أي قيم يتم اختيارها للمتغير xكمافي الجدول التالي:-

التمثيل البياني:

y	x
2	0
5	1
8	2
11	3
14	4
17	5

ثانياً:- الدالة الغير الخطية:- هي الدالة التي تاخذشكل خط غير مستقيم عند تمثيلها بيانيا وهي دالة تمثل معادلة من الدرجة الثانية فما فوق او معادلة آسية او لوغارتمية ، فمثلا إذا كانت أعلى قوة مرفوع لها المتغير المستقل هي تربيعية فان الدالة تسمى دالة اومعادلة من الدرجة الثانية مثل:- $y=a+bx+cx^2$ أو $y=cx^2$

اماذا كانت أعلى قوة مرفوع لها المتغير المستقل هي تكعيبية فان الدالة تسمى دالة اومعادلة من الدرجة الثالثة مثل:- $y=a+bx+cx^2+dx^3$ أو $y=dx^3$

وهكذا تختلف مسميات الدوال حسب القوى المرفوع لها قيمة المتغير المستقل وعلية **فان الدالة الغير خطية** :- هي عبارة عن دالة يكون فيها احد المتغيرات المستقلة مرفوع للقوة غير الواحد صحيح وهذه القوة قد تكون اكبر من الواحد صحيح كما في الأمثلة الواردة اعلاة أو اقل كما في الأمثلة التالية:-

$$Y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

$$Y=3x^{\frac{1}{2}}$$

$$Y=5+2\,x^{\frac{1}{2}}$$

والشكل التالي يمثل التصوير البياني لأحد هذه الدوال الغير خطية

الميل:- slope

يعتبر الميل احد المفاهيم الأساسية المهمة المستخدمة في الدراسات الاقتصادية التي تقوم على التحليل البياني ويقوم الميل بقياس درجة انحدار الخط ويتم ذلك بحساب النسبة بين التغير في المتغير التابع على التغير المماثل في المتغير المستقل.

$$\text{Slope}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_2}{x_{1-x_2}}$$

تجدر الإشارة إلى أن إشارة معامل الميل تبين اتجاه الدالة هل هي متزايدة أو متناقصة أو بمعنى آخر هل هناك علاقة طرديه أو عكسية بين متغيرات الدالة اماقيمة الميل فيقيس لنا كما سنرى درجة انحدار المنحنى أو الخط الذي يصور هذه الدالة ،هذا وبمقارنة الميل بين أي نقطتين على الدالة (المنحنى)نستطيع التعرف على معدل هذا التزايد او معدل التناقص في الدالة وبناء على ذلك فإن الميل يمكن استخدامه كمعيار للتفرقة بين الدوال الخطية والدوال الغير خطية .

أولا:-ميل الدالة الخطية slope of linear function

تتميز الدوال الخطية عن غيرها من الدوال بان ميل الخط المستقيم الذي يمثلها دائماً ثابت عند جميع النقاط وهذا الميل في اغلب الحالات يكون بالموجب او بالسالب فهو موجب للدوال المتزايدة وسالب للدوال المتناقصة .

بافتراض إن الدالة الخطية توضح العلاقة بين المتغيرين y,x تأخذ الصيغة الآتية :-

$$Y=a+bx$$

الرسم البياني:-

$$\text{Slope}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_2}{x_{2-}x_1}=\frac{(a+bx_2)-(a+bx_1)}{x_{2-}x_1}=\frac{b(x_{2-}x_1)}{(x_{2-}x_1)}=+b$$

ويلاحظ هنا إن الميل سيكون رقم ثابت موجب ويساوي $(+b)$بين اي نقطتين على الخط المستقيم وكون إشارة الميل موجب يعني إن الدالة تتزايد بمعدل ثابت يساوي b وعلية فان المعامل $(+b)$ في اي دالة خطية يقيس ميل هذة الدالة (درجة انحدار الخط المستقيم)ويبين أن زيادة المتغير المستقل xبوحدة واحدة سوف يؤدي إلى زيادة المتغير التابع yبمقدارbمن الوحدات فمثلا لو كان لدينا الدالة الخطية التالية y=5+4x فان الميل يساوي 4+ وهذا يعني إن زيادة xبمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى زيادة yبمقدار أربع وحدات ويلاحظ في الدالتين السابقتين ان معامل b موجب وهذا يعبر عن العلاقة الطر دية بين المتغير المستقل (x) والمتغير التابع (y)

<u>الميل السالب (دالة متناقصة)</u>:- بافتراض إن الدالة الخطية توضح العلاقة بين المتغيرين y,x تأخذ الصيغة الآتية :-

Y=a-bx في هذه الحالة يمكن تمثيل الدالة بيانيا كما يلي:-

في هذة الحالة فإن ميل الدالة حسب التعريف السابق هو:-

$$\text{Slope}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_{2-}x_1}=\frac{(a-bx_2)-(a-bx_1)}{x_{2-}x_1}=\frac{b(x_{2-}x_1)}{(x_{2-}x_1)}=-b$$

ويلاحظ هنا إن الميل سيكون رقم ثابت سالب ويساوي $(-b)$بين اي نقطتين على الخط المستقيم وكون إشارة الميل سالب يعني إن الدالة تتناقص بمعدل ثابت يساوي bويبين أن العلاقة عكسية. في الحالات السابقة وجدنا ان الميل للدالة الخطية قد يكون موجب (b>0) وقد يكون سالب (b<0) وبالطبع تختلف درجات الميل في كل حالة فقد يكون موجب ودرجة انحداره منخفضة (0<b<1)او موجب ودرجة انحداره عالية (0<b<∞)وبالمثل في حالة الميل السالب ودرجة انحداره منخفضة (-1<b<0)أو سالب ودرجة انحداره عالية (-∞<b<--1)كما ان الميل قد يساوي مالا نهاية وتبين الأشكال الآتية مثل هذه الحالات :-

ويلاحظ من الأشكال السابقة التدرج في شدة انحدار الخطوط المستقيمة فالرسم رقم (1)يبين ان الميل يساوي صفر في الحالتين أي أن الميل معدوم وذلك لأنة ليس هناك أي تغير في y أما في الشكل رقم (2)أصبح هناك نوع من الانحدار ولكنة ليس شديد مما يعني أنة منخفض وذلك لان (Δy) اقل من(Δx) اما الشكل رقم (3) فإن الميل سالب في الحالة(a)ويساوي (1-)وموجب في الحالة (b)ويساوي(1+) وهذا لايعني انه في الحالتين ان التغير في (x)يساوي التغير في (y)ولكن في حالة الميل الموجب فان التغير في (x) بالزيادة سوف يؤدي إلى زيادة (y) بنفس المقدار في حالة الميل السالب فان التغير في (x) بالزيادة سوف يؤدي إلى انخفاض (y) بنفس المقدار امافي الشكل (4)فإن الميل أصبح شديد الانحدار في كلتا الحالتين وذلك لان (Δy) اكبر من(Δx) وأخيرا في الشكل (5) فإن الميل يساوي مالا نهاية في كلتا الحالتين وذلك لأنة (Δx) يساوي صفر، ومما سبق نخلص الى انه في جميع الدوال الخطية السابقة فإن ميل الخط المستقيم الذي يمثل اي منها يكون دائماً ثابت عند جميع النقاط وبالتالي اذا كان الميل ثابت وموجب فإن هذا يعني ان الدالة متزايدة ومعدل تزايدها ثابت (**تتزايد بمعدل ثابت**) امااذا كان الميل ثابت وسالب فإن هذا يعني ان الدالة متناقصة ومعدل تناقصها ثابت (تتناقص بعدل ثابت).

ثانياً:- الدالة الغير خطية The slope Nonlinear function

تتميز الدوال الغير خطية بان ميل المنحنى الذي يمثلها غير ثابت ويختل من نقطة إلى أخرى وهذا الميل قد يكون بالموجب للدالة المتزايدة او بالسالب للدالة المتناقصة أو كلاهما عندما تكون الدالة متزايدة اومتناقصة أو العكس وحيث أن الميل الموجب (للدالة المتزايدة)سوف يختلف من نقطة لأخرى فإن ذلك يعني أن معدل تزايد هذه الدالة غير ثابت فقد يكون هذا التزايد بمعدل متزايد أو متناقص وبالمثل للميل السالب للدالة المتناقصة سوف يختلف من نقطة لأخرى أي أن معدل تناقص هذه الدالة قد يكون بمعدل متزايد اوبمعدل متناقص

- 1- الميل السالب (دالـــــــــة متناقصـــــــــــــــــــــة)

بافتراض أن الدالة الغير خطية التي توضح العلاقة بين المتغيرين y،x تأخذ الصيغة العامة التالية :- $y=x^{-a}$ حيث a يمثل رقم ثابت وسالب

لذلك فإن التصوير البياني لهذه الدالة سيكون على شكل منحنى ذو ميل سالب كما في الرسم التالي:-

من الشكل نلاحظ آن ميل المنحنى عند النقطة (A)اشد واكبر من ميل المنحنى عند النقطة(B)وهذا يعني أن المنحنى يتناقص كلما اتجهنا من أعلى إلى أسفل باتجاه اليمين وان إشارة الميل تبين أن الميل سالب (علاقة عكسية) لذا يمكننا القول بان الميل سالب متناقص ومنة نستنتج أن الدالة أو المنحنى الذي يمثلها يتناقص بمعدل متناقص .

- 2- الميـــــل المـــوجب (دالـــــة متـــــــزايـــــــدة)

بافتراض أن الدالة الغير خطية التي توضح العلاقة بين المتغيرين y،x تأخذ الصيغة العامة التالية :- $y=x^{-a}$ حيث a يمثل رقم ثابت وموجب

لذلك فإن التصوير البياني لهذه الدالة سيكون على شكل منحنى ذو ميل سالب كما في الرسم التالي:-

من الشكل نلاحظ أن ميل المنحنى عند النقطة (B)اشد واكبر من ميل المنحنى عند النقطة(A)وهذا يعني ان المنحنى يتزايد كلما اتجهنا من أسفل إلى أعلى باتجاه اليمين وان إشارة الميل تبين ان الميل موجب (علاقة طردية) لذا يمكننا القول بان الميل موجب ومتزايد ومنة نستنتج ان الدالة او المنحنى الذي يمثلها يتزايد بمعدل متزايد.

- 3- قد يكون المنحنى في جزء منه ذو ميل سالب وفي جزء منة ذو ميل موجب كما في الإشكال التالية :-

في الشكل (a)ميل المنحنى موجب في البداية حتى النقطة (c) علاقة طردية وبعد ذلك يصبح ميل المنحنى سالب (علاقة عكسية) ويلاحظ أن قيمة الميل في الجزء الموجب منة تتناقص كلما اتجهنا إلى اليمين لان الميل عند النقطة(b) اقل منة عند النقطة(a) لذا ان ميل المنحنى في هذا الجزء يتزايد بمعدل متناقص أما في الجزء سالب الميل من المنحنى بعد النقطة(c)فإن الميل يتناقص بمعدل متزايد وبالتالي يمكن القول إن هذا المنحنى يتزايد بمعدل متناقص ثم يبدأ بالتناقص بمعدل متزايد . أما بالنسبة للشكل (b) فإن المنحنى يتناقص بمعدل متناقص ثم يبدأ بالتزايد بمعدل متزايد.

أمثلة تطبيقية:-

1)- في الدالة التالية : $y = f(x)$ حدد المتغير التابع والمتغير المستقل وكيف تقرا هذة الدالة.

الحـــــــــل:-

المتغير التابع هوy ، والمتغير المستقل هو x وتقرا الدالة كالتالي : ان y دالة في x اي ان هناك علاقة بين المتغيرين .

2) – إذا كان أمامك هذه الدالة الرياضية ، عرف عناصرها المختلفة .

$$Y=a - bx$$

الحـــــــــل : -

Y المتغير التابع , a القاطع ، (-)الإشارة السالبة تدل على العلاقة العكسية بين المتغير التابع والمتغير المستقل

B ميل الخط المستقيم الذي يمثل علاقة المتغيرY بالمتغير x ، (x) المتغير المستقل .

3) – إذا كان لديك المعادلة التالية $y=5+0.2x$ عرف متغيراتها

الحـــــــــل : -

Y المتغير التابع ، 5 القاطع وهو قيمةY عندما تكون قيمة x صفر

(0.2) الميل ، مقدار التغير في Y عند تغير xبوحدة واحدة

(x) المتغير المستقل . (+)الإشارة الموجبة تدل على وجود العلاقة الطردية بين المتغيرين.

4)- اذاكان لديك الجدول التالي :-

y	0	1	2	3	4
x	2	6	10	14	18

- أ) اوجد القاطع ، الميل ، اتجاه العلاقة
- ب) ضع معادلة رقمية بالشكل التالي y=a+bx حيث aالقاطع وbتمثل الميل
- ج) مثل الجدول اعلاة بيانياً

الحـــــــــــل:-

أ) ـــ القاطع a=2وذلك قيمة xعندما تساوي yالصفر

ـــ الميل $4 = \frac{14-10}{3-2} = \frac{{}_{2-y_1}}{x_{2-x_1}}$ $\text{Slope}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ـــ اتجاه العلاقة أنة كلما زادات x زادات y

ب)- تكون المعادلة على الشكل التالي :- y= 2+4x

ج)- الرسم

5)- إذا كان لديك المعادلة الآتية ـــ

$$y = 5 + \frac{1}{2}x^2$$

أ)- كون جدول بالتعويض بقيم من اختيارك.

ب)- استخرج الميل.

ج)- مثل الجدول بيانيا

الحـــــــــــل :-

أ)- بافتراض أن x=0 فان $y=5+\frac{1}{2}(0)^2 = 5$

بافتراض أن x=1 فان $y=5+\frac{1}{2}(1)^2 = 5.5$

بافتراض أن x=0 فان $y=5+\frac{1}{2}(2)^2 = 7$

وهكذا

X	0	1	2	3
y	5	5.5	7	9.5

ب)- الميل نفاضل المعادلة $y = 5 + \frac{1}{2}\ ^2$

$\frac{dy}{dx} = 0 + 2(\frac{1}{2})$X=x(إذن الميل عند أي قيمة ل Xهو نفس قيمة X

ج)- الرسم

التطبيق الأول:-

1- اذاكان لديك المعادلة التالية : $y = 5 + 0.2x$

Ă كون جدولا لهذه المعادلة بافتراض أن x تاخذ القيم التالية على التوالي

5,4,3,2,1,0

بـĂ ارسم هذه المعادلة .

2- إذا أعطيت الجدول التالي :-

x	30	60	90	120	150
y	400	800	1200	1600	2000

أ) مثل الجدول اعلاة بيانيا بوضع y على المحور الراسي وx على المحور الأفقي

ب) مانوع العلاقة بين المتغيرين .

3- إذا أعطيت الجدول التالي حيث xهو المستقل وy هو المتغير التابع :-

x	-20	-10	0	10	20	30	40	50
y	50	40	30	20	10	0	-10	-20

أ) مثل الجدول اعلاة بيانيا

ب) استخرج الميل

ج) مانوع العلاقة بين المتغيرين

4- إذا اعطيت الجدول التالي :-

x	0	2	4	6	8	10	12
y	15	14	12	10	7	4	0

أ)مثل ه|| الجدول بيانيا .

ب) بين نوع العلاقة بين المتغيرين