جامعة الملك سعود
King Saud University
كلية العلوم – قسم الرياضيات

الأختبار النهائي
للفصل الدراسي الأول لعام 1438/1439هـ
اسم المقرر: معادلات تفاضلية جزئية
رقم المقرر: 425 ريض   الزمن: ثلاث ساعات

أجب عن خمسة أسئلة فقط من الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: (8)

(أ) أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية $x^2p+y^2q=z^2$ المار بالمنحنى $x=t,\ y=2t,\ z=1$

(ب) أوجد حل معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ,\ 0<x<2,\ 0<y<1$$

بالشروط الحدية التالية

$$u(0,y)=u(2,y)=0\ ,\ \ 0<y<1$$
$$u(x,0)=0\ ,\ u(x,1)=f(x)\ ,\ \ 0<x<2$$

السؤال الثاني: (8)

أ) أثبت أن حل مسألة القيمة الابتدائية – الحدية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ \ 0<x<L\ ,\ t>0$$
$$u(0,t)=u(L,t)=0\ ,\ \ t>0$$
$$u(x,0)=f(x)\ ,\ \ 0<x<L$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)\ ,\ \ 0<x<L$$

يكون علي الصورة

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{n\pi\alpha}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi\alpha}{L}t]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

مع إيجاد المعاملات $a_n\ ,\ b_n$

ب) أوجد حل مسألة الخيط المهتز التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ \ 0<x<\pi\ ,\ t>0$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0\ ,\ \ t>0$$
$$u(x,0)=3\sin 2x+12\sin 13x\ ,\ \ 0<x<\pi$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\ ,\ \ 0<x<\pi$$

السؤال الثالث: (8)

(أ) أثبت أن مسألة القيمة الابتدائية – الحدية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ 0<x<L\ ,\ t>0$$
$$u(0,t)=u(L,t)=0\ ,\ \ t>0$$
$$u(x,0)=f(x)\ ,\ \ 0<x<L$$

لها حل واحد على الأكثر $u(x,t)$ حيث $u\in C^2$.

(ب) أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية – الحدية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ 0<x<\pi\ ,\ t>0$$
$$u(0,t)=5,\ u(\pi,t)=10\ ,\ \ t>0$$
$$u(x,0)=\sin 3x-\sin 5x\ ,\ \ 0<x<\pi$$

إرشاد: $\sin u\sin v=\frac{1}{2}[\cos(u-v)-\cos(u+v)]$

السؤال الرابع: (8)

بأستخدام تحويل لابلاس، أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{\partial u}{\partial t}+x\frac{\partial u}{\partial x}=x\ ,\ \ x>0,\ t>0$$

حيث $u=u(x,t)$ تحقق الشروط الحدية الآتية:

$$u(x,0)=0\ ,\ \ x>0\ \ ;\ \ u(0,t)=0\ \ ,\ \ t>0$$

السؤال الخامس: (8)

إذا علمت أن الحل العام لمعادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية (الحالة المتماثلة حول محور z) يكون على الصورة التالية: $u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-n-1})P_n(\cos\varphi)$

حيث $P_n(x)$ هي كثيرة حدود ليجندر، فأوجد حل مسألة القيمة الحدية الآتية داخل كرة نصف قطرها a

$$\Delta u=0\ ,\ 0\le r<a\ ,\ 0\le\varphi\le\pi$$
$$u(a,\varphi)=f(\varphi)\ ,\ 0\le\varphi\le\pi$$

السؤال السادس: (8)

إذا علمت أن حل معادلة لابلاس في الصورة القطبية داخل منطقة R محدودة بدائرة C نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل يكون على الصورة التالية : $u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$

فأوجد حل مسألة ديرشلية الآتية:

$$\Delta u=0\ ,\ 0\le r<a$$
$$u(a,\theta)=f(\theta)\ ,\ f(\theta)=1\ ,\ 0<\theta<\pi$$
$$f(\theta)=0\ ,\ \pi<\theta<2\pi$$

نموذج إجابة اختبار مقرر 425 ريض
(معادلات تفاضلية جزئية)
الفصل الدراسي الأول ١٤٣٩/٣٨هـ

إجابة السؤال الأول

(أ) $x^2p + y^2q = z^2, \quad x = t, \; y = 2t, \; z = 1$

باستخدام المعادلات المساعدة
$\Leftarrow$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{-1}{y} = \frac{-1}{x} + c_1$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - c_1$$

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \quad (1)$$

at $x = t$, $y = 2t$

$$(1) \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2t}$$

$$\boxed{t = \frac{-1}{2c_1}} \quad (3)$$

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{-1}{z} = \frac{-1}{x} + c_2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} - c_2$$

$$\boxed{c_2 = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}} \quad (2)$$

at $z = 1$, $x = t$

$$(2) \Rightarrow \boxed{c_2 = 1 - \frac{1}{t}} \quad (4)$$

$\therefore$ By Subs. (3) in (4) $\Rightarrow \boxed{c_2 = 1 + 2c_1}$ (5)

and by Subs. (1), (2) in (5) $\Rightarrow \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 1 + 2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$

$$\boxed{\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 1} \Rightarrow \boxed{z = \frac{xy}{xy + 2x - y}} \quad \#$$

هو السطح التكاملي المطلوب

(ب) باستخدام طريقة فصل المتغيرات
نفرض أن

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

وبالتعويض في معادلة لابلاس

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

نحصل على

$$YX'' + XY'' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda^2 ,$$

λ^2 ثابت الفصل

$$\Rightarrow X'' = -\lambda^2 X$$

$$X = a_1 \cos \lambda x + a_2 \sin \lambda x$$

$$Y'' = \lambda^2 Y$$

$$\Rightarrow Y = b_1 \cosh \lambda y + b_2 \sinh \lambda y$$

$\underline{1}$

الحل العام لمعادلات لابلاس هو

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$u(x,y) = (a_1 \cos \lambda x + a_2 \sin \lambda x)(b_1 \cosh \lambda y + b_2 \sinh \lambda y)$$

$\because u(0,y) = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$, \; u(x,0) = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = 0}$

وذلك لتجنب الحل التافه

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = C \sin \lambda x \sinh \lambda y}, \quad C = a_2 b_2 \text{ is Const.}$$

وبتطبيق الشرط الحدي

$$u(2,y) = 0, \quad 0 \le y < 1.$$

$$\Rightarrow u(2,y) = C \sin 2\lambda \sinh \lambda y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

For $\lambda = \lambda_n$, $\boxed{u_n(x,y) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{2}\right)}$

$$\therefore \boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{2}\right)} \quad (1)$$

بتطبيق الشرط الحدي

$$u(x,1) = f(x), \quad 0 < x < 2$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad 0 < x < 2$$

وبالتالي يكون معامل فورير للدالة f هو

$$C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$\therefore C_n = \frac{1}{\sinh(n\pi/2)} \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \quad (2)$$

$\underline{\text{إذن بدلالة المعامل } C_n \text{ في (2) ، نستخرج الحل (1) .}}$

#

2//

اجابة السؤال الثاني

(P)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$0<x<L \,,\ t>0$

$u(0,t)=u(L,t) \,,\ t>0 \quad (2)$

$u(x,0)=f(x) \,,\quad 0<x<L \quad (3)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \,,\quad 0<x<L \quad (4)$

لحل المعادلة (1) نستخدم طريقة فصل المتغيرات

$u(x,t)=X(x)\,T(t)$

$① \Rightarrow XT'' = \alpha^2 X'' T$

بفصل المتغيرات ووضع ثابت الفصل $-\lambda^2$

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{\alpha^2 T}=-\lambda^2$$

$X''=-\lambda^2 X$

$\Rightarrow X = c\cos\lambda x + d\sin\lambda x \quad (5)$

& $T''=-\alpha^2\lambda^2 T$

$\Rightarrow T = a\cos\alpha\lambda t + b\sin\alpha\lambda t \quad (6)$

عند $x=0$

$u(0,t)=X(0)\,T(t)=0$

لتجنب الحل التافه فإن $c=0$

إذن $X=d\sin\lambda x \quad (7)$

وعند $x=L$

$u(L,t)=X(L)\,T(t)=0$

ولتجنب الحل التافه فإن

$\lambda=\lambda_n=\frac{n\pi}{L} \,,\ n=1,2,\dots$

$(7)\Rightarrow X_n = d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ إذن

or $X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (8)$

& $T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi\alpha}{L}t + b_n\sin\frac{n\pi\alpha}{L}t \quad (9)$

$u_n(x,t)=X_n(x)\,T_n(t)$

$⑧,⑨ \Rightarrow$

$$u_n(x,t)=\left[a_n\cos\frac{n\pi\alpha}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi\alpha}{L}t\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi\alpha}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi\alpha}{L}t\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (10)$$

بتطبيق الشروط الحدية (3)، (4) في الحل (10) نحصل على

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}=f(x) \quad (11)$$

$0<x<L$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi\alpha}{L}\,b_n \sin\frac{n\pi x}{L}=g(x) \quad (12)$$

$0<x<L$

وبالتالي يمكن ايجاد معامل فورير a_n لمفكوك الدالة f كالآتي

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad (13)$$

وكذلك معامل فورير $B_n=\frac{n\pi\alpha}{L}b_n$ لمفكوك الدالة g_L كالآتي

$$\frac{n\pi\alpha}{L}\,b_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad (14)$$

بدلالة المعاملات a_n و b_n في (13)، (14) يتحدد الحل (10) للمعادلة الموجية (1).

#

(ب)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi\alpha}{L}t + b_n \sin\frac{n\pi\alpha t}{L}\right]\cdot \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\alpha = 3,\ L = \pi$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos 3nt + b_n \sin 3nt\right]\cdot \sin nx$$

$$\therefore\ u(x,0) = 3\sin 2x + 12\sin 13x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

بمساواة معاملات الطرفين

إذن

$$a_2 = 3,\quad a_{13} = 12$$

$$\&\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\, b_n \sin nx$$

$$\Rightarrow\ b_n = 0$$

$$\therefore\ u(x,t) = 3\cos 6t \sin 2x + 12\cos 39t \sin 13x$$

إجابة السؤال الثالث

(أ) نفرض أن $u, v \in C^2$ حلان للمسألة الابتدائية - الحدية ①-③

ونفرض أن $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$

واضح لدينا أن $w \in C^2$ كحل المسألة الابتدائية - الحدية ①-③ وتحقيقاً لمبدأ القيمة العظمى

Max. principle

لمعادلة الحرارة) فإنه يلزم أن الدالة $w(x,t)$ تصل إلى قيمتها العظمى عند $t=0$ وحيث أن

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = f(x) - f(x) = 0$$

$$w(x,t) \le 0$$ (لماذا)

وبالتالي فإن

$$u(x,t) \le v(x,t) \quad \forall\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \qquad (I)$$

وبأسلوب مشابه يمكن فرض

$$w(x,t) = v(x,t) - u(x,t)$$

وبالتالي يمكن استنتاج أن

$$v(x,t) \le u(x,t) \quad \forall\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \qquad (II)$$

من (I) و (II) نستنتج أن

$$u(x,t) = v(x,t)\ \forall\ 0 \le x \le L,\ t \ge 0$$

إذن يوجد حل واحد على الأكثر للمسألة الابتدائية - الحدية ①-③.

#

$c_1 = \frac{-10}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} - \frac{10}{\pi^2}\left[-x\cos x\Big|_0^{\pi} + 0\right]$

$c_1 = \frac{-30}{\pi}$

, similarly

$c_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-5 - \frac{5}{\pi}x\right)\sin 2x\,dx$

...

$c_2 = \frac{5}{\pi}$

إذن

$u(x,t) = 5 + \frac{5}{\pi}x + c_1 e^{-2t}\sin x + c_2 e^{-8t}\sin 2x + \cdots$

$u(x,t) = 5 + \frac{5}{\pi}x - \frac{30}{\pi}e^{-2t}\sin x + \frac{5}{\pi}e^{-8t}\sin 2x + \cdots$

$u(x,t) = 5 + \frac{5}{\pi}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\pi n}\left[2(-1)^n - 1\right] \cdot e^{-2n^2 t}\sin nx$

#

إذن الحل هو:

$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$

حيث

$v(x) = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)x$

$v(x) = 5 + \frac{5}{\pi}x$

وللحصول على $w(x,t)$: نحل مسألة القيمة الابتدائية - الحدية التالية:

$\frac{\partial w}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0$

$w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad t > 0$

$w(x,0) = f(x) - u_1 - \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)x$

$\boxed{w(x,0) = \sin 3x - \sin 5x - 5 - \frac{5}{\pi}x}$

$\Rightarrow w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{L}$

$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2n^2 t}\sin nx$

حيث $\beta = 2, \ L = \pi$

$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L\left[f(x) - u_1 - \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)x\right]\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin 3x - \sin 5x - 5 - \frac{5}{\pi}x\right) \cdot \sin nx\,dx$

$, n = 1, 2, 3, \cdots$

$c_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin 3x - \sin 5x - 5 - \frac{5}{\pi}x\right)\sin x\,dx$

$c_1 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cancel{\cos 4x}\right) - \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cancel{\cos 6x}\right)\right]_0^{\pi}$

$- \frac{10}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx - \frac{10}{\pi^2}\int_0^{\pi}\underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}$ بالتجزئ

$\underline{5}$

إجابة السؤال الرابع

نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة إلى t للطرفين واستخدام المعطيات

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\bar{u}(x,s) - u(x,0)$$

حيث

$$\bar{u}(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$$

$$\& \ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dx}\bar{u}(x,s)$$

$$\Rightarrow s\bar{u}(x,s) - \cancel{u(x,0)} + x\frac{d}{dx}\bar{u}(x,s) = \frac{x}{s}$$

0

$$\Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{s}{x}\bar{u}(x,s) = \frac{1}{s}$$

إذن يكون حل هذه المعادلة باستخدام العامل المكامل

$$I.f = \mu = e^{\int \frac{s}{x}dx} = x^s$$

$$\therefore x^s\bar{u}(x,s) = \int \frac{1}{s}x^s\,dx$$

$$x^s\bar{u}(x,s) = \frac{1}{s}\left(\frac{x^{s+1}}{s+1}\right) + A$$

$$\Rightarrow \bar{u}(x,s) = \frac{1}{s}\left(\frac{x}{s+1}\right) + \frac{A}{x^s}$$

$$\because \bar{u}(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)e^{-st}\,dt = 0$$

0 الشرط الحدي

$$\therefore \boxed{A=0}$$

$$\Rightarrow \bar{u}(x,s) = \frac{1}{s}\left(\frac{x}{s+1}\right)$$

$$\bar{u}(x,s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]x$$

$$\therefore u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)x\right\}$$

$$u(x,t) = x\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - x\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$u(x,t) = x\,(1 - e^{-t})$$

والله الموفق

إجابة السؤال الخامس

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-n-1}\right]P_n(\cos\varphi)$$

لكي تكون u نوافقية عند مركز الكرة يلزم أن يكون $B_n = 0$ ويكون الحل هو

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\varphi)$$

* عند $r = a$

$$u(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\varphi) = f(\varphi) \quad (1)$$

$$\because f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\langle f, P_n\rangle P_n(\cos\varphi) \quad (2)$$

$$\forall f \in L^2(-1,1)$$

$$\langle f, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\,d\cos\varphi \quad (3)$$

$$(1),(2) \Rightarrow A_n a^n = \frac{2n+1}{2}\langle f, P_n\rangle$$

and By using (3) $\Rightarrow$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n}\int_{-1}^{1} f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\,d\cos\varphi$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n}\int_{\pi}^{0} f(\varphi)P_n(\cos\varphi).(-\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$\therefore A_n = \frac{2n+1}{2a^n}\int_0^{\pi} f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

إذن الحل (دالة الجهد داخل الكرة) هو

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\varphi)$$

حيث

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n}\int_0^{\pi} f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

$\underline{\underline{6}}$

إجابة السؤال السادس

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right] \qquad (1)$$

معاملات فورير هي

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\, d\theta = \frac{1}{\pi}(\pi) = 1$$

$$, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cos n\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi} \cancel{\left[\frac{\sin n\theta}{n}\right]_0^{\pi}}\; 0$$

$$\therefore \boxed{a_n = 0}$$

$$, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin n\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos n\theta}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos n\pi + 1}{n}\right] = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(1) \Rightarrow u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n\pi}\right) \sin n\theta$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\pi}\right] \sin n\theta$$

حيث

$$\cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1 & , \text{ if } n \text{ is even} \\ -1 & , \text{ if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

let $n \longrightarrow 2n-1$

$$\therefore \quad u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \frac{(2) \sin (2n-1)\theta}{(2n-1)\pi}$$

$$\therefore \quad u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \frac{\sin (2n-1)\theta}{(2n-1)}$$

مع أطيب الأمنيات #