تصميم التجارب

Design of Experiments

الجزء التاسع

التجارب العاملية

Factorial Experiments

مقدمة:

في الفصول السابقة كان اهتمامنا منصبًا على دراسة تأثير عامل واحد فقط على متغير الاستجابة. وفي بعض الحالات قمنا بإدخال بعض العوامل الأخرى كعوامل مزعجة (عوامل قطاعات) في التصميم من أجل إزالة تأثيرها وزيادة دقة التجربة.

وذكرنا أن المعالجات هي عبارة عن مستويات لذلك العامل. وكان هدفنا هو مقارنة المعالجات من أجل التحقق من وجود (أو عدم وجود) فروق معنوية بين متوسطات تلك المعالجات.

وفي هذا الفصل سوف تناول موضوع التجارب العاملية. وهي التجارب التي تصمم من أجل دراسة تأثير عاملين أو أكثر على متغير الاستجابة. ويكون الهدف منها هو التحقق من وجود تأثير لكل عامل من هذه العوامل على متغير الاستجابة وكذلك التحقق من وجود تداخلات أو تفاعلات بينيه (تأثيرات مشتركة لهذه العوامل على متغير الاستجابة).

والعامل قد يكون متغير كمي له عدة مستويات (مستوياته عبارة عن قيم)؛ مثل الحرارة ومستوياتها على سبيل المثال هي (20، 40، 60، 80). أو قد يكون متغير نوعي له عدة مستويات (مستوياته عبارة عن فئات)؛ مثل نوع السماد ومستوياته على سبيل المثال هي (A, B, C). ويكون الهدف من التجربة هو دراسة أثر تغير مستويات العوامل على متغير الاستجابة.

ولتوضيح مفهوم التجربة العاملية، لنفرض أننا نرغب بتصميم تجربة لدراسة تأثير عدة عوامل على كمية محصول التمر لنوع معين من النخيل (متغير الاستجابة)، والعوامل هي:

نوع السماد - كمية المياه - نوع المبيد الحشري - وقت التلقيح- خصوبة الأرض.

ومن خلال هذه التجربة، نود الإجابة على أسئلة أساسية؛ مثل:

- هل هناك تأثير لكل عامل من هذه العوامل على كمية المحصول؟
- هل هناك تداخل بيني (أو تفاعل بيني أوتأثيرمشترك) (Interaction) بين هذه العوامل؟
- ما هي أفضل توليفة (تشكيلة) من مستويات هذه العوامل التي تعطي أكبر كمية ممكنة من المحصول؟

ولدراسة تأثير كل هذه العوامل على محصول التمر، قد يقوم الباحث بإجراء تجربة خاصة لكل عامل على حدة مع تثبيت العوامل الأخرى عند مستويات معينة. ولكن، هذه الطريقة غير عملية ومكلفة، كما أن الباحث لن يستطيع دراسة التأثيرات المشتركة للعوامل فيما بينها، والتي يطلق عليها مسمى التداخلات أو التفاعلات البينية (Interactions). فعلى سبيل المثال، قد يعتمد تأثير نوع السماد على كمية محصول التمر على كمية الماء والمنطقة الزراعية. وقد يعتمد تأثير وقت التلقيح على كمية محصول التمر على نوع السماد وكمية الماء والمنطقة الزراعية، وهكذا.

ولن يتم التعرف على العلاقات بين العوامل (التأثيرات المشتركة للعوامل على متغير الاستجابة) ما لم يتم إدخالها جميعًا في تجربة واحدة.

ولذلك فإن من الأفضل إدخال جمع العوامل في تجربة واحدة يتم من خلالها دراسة التأثيرات الرئيسية (Main Effects) لكل عامل والتأثيرات المشتركة (Interactions) للعوامل فيما بينها.

التأثيرات الرئيسية: (Main Effects)

بشكل مجمل فإن التأثير الرئيسي للعامل عبارة عن علاقة تصف طبيعة التغير في متغير الاستجابة عندما تتغير مستويات العامل. فإذا كان هناك اختلافات معنوية في قيم متغير الاستجابة بسبب تغير مستويات العامل، فإنه في هذه الحالة يكون للعامل تأثيرعلى الاستجابة. وأما إذا لم يكن هناك اختلافات معنوية في قيم الاستجابة بسبب تغير مستويات العامل، ففي هذه الحالة يقال بأنه لا يوجد تأثير للعامل على الاستجابة.

التأثير المشترك أو التداخل البيني: (Interactions)

وأما التأثير المشترك (التداخل البيني) بين عاملين فهو كيفية اعتماد طبيعة تأثير أحد العوامل على متغير الاستجابة على مستويات العامل الآخر. فإذا كانت طبيعة تأثير أحد العوامل على متغير الاستجابة لا تختلف عندما تتغير مستويات العامل الآخر، فيقال بأنه لا يوجد تداخل بيني بين العاملين. وأما إذا كانت طبيعة تأثير أحد العوامل على متغير الاستجابة تتغير بتغير مستويات العامل الآخر، فيقال في هذه الحالة أنه يوجد تداخل بيني بين العاملين.

تعريف التأثيرات الرئيسية والتأثيرات المشتركة:

ولكي نعريف التأثير الرئيسي (Main Effect) للعامل، والتأثير المشترك (أو التداخل البيني) (Interactions) بين عاملين بشكل أدق، لنفرض أن لدينا عاملين هما (A و B)، ولكل واحد منهما مستويان فقط، ولنرمز للمستويين بالمستوى المنخفض $(-)$ والمستوى المرتفع $(+)$. ولتكن مستويات العامل الأول هي (A_- و A_+) ومستويات العامل الثاني هي (B_- و B_+) ونرغب في دراسة تأثير هذين العاملين على متغير الاستجابة (Y).

في هذه الحالة سيكون لدينا أربع معالجات مكونة من توليفات مستويات العاملين المختلفة، وهي:

A_+B_+ = المستوى المرتفع للعامل الأول مع المستوى المرتفع للعامل الثاني

المستوى المرتفع للعامل الأول مع المستوى المنخفض للعامل الثاني = A_+B_-

المستوى المنخفض للعامل الأول مع المستوى المرتفع للعامل الثاني = A_-B_+

المستوى المنخفض للعامل الأول مع المستوى المنخفض للعامل الثاني = A_-B_-

ولنفرض أن:

$\bar{A}_-$ = متوسط الاستجابة عند المستوى المنخفض (A_-) للعامل الأول = $\frac{(A_-B_+)+(A_-B_-)}{2}$.

$\bar{A}_+$ = متوسط الاستجابة عند المستوى المرتفع (A_+) للعامل الأول = $\frac{(A_+B_+)+(A_+B_-)}{2}$.

$\bar{B}_-$ = متوسط الاستجابة عند المستوى المنخفض (B_-) للعامل الثاني = $\frac{(A_+B_-)+(A_-B_-)}{2}$.

$\bar{B}_+$ = متوسط الاستجابة عند المستوى المرتفع (B_+) للعامل الثاني = $\frac{(A_+B_+)+(A_-B_+)}{2}$.

متوسط مستويات العامل الأول	العامل الثاني (B)			
	B_+	B_-		
$\bar{A}_-$	A_-B_+	A_-B_-	A_-	العامل الأول (A)
$\bar{A}_+$	A_+B_+	A_+B_-	A_+	
	$\bar{B}_+$	$\bar{B}_-$	متوسط مستويات العامل الثاني	

التعريفات:

(1) التأثيرات البسيطة للعامل:

التأثير البسيط للعامل هو التغير في الاستجابة الناتج عن التغير في مستويات هذا العامل عند تثبيت العامل الآخر عند مستوى معين.

مثال:

هناك تأثيران بسيطان للعامل الأول، هما:

- التأثير البسيط للعامل الأول (A) عند المستوى المنخفض للعامل الثاني (B_-)، وهو التغير في الاستجابة الناتج عن التغير في مستويات العامل الأول عند المستوى المنخفض للعامل الثاني، ويعطى بالصيغة:

$$A_+B_- - A_-B_-$$

- التأثير البسيط للعامل الأول (A) عند المستوى المرتفع للعامل الثاني (B_+) وهو التغير في الاستجابة الناتج عن التغير في مستويات العامل الأول عند المستوى المرتفع للعامل الثاني، ويعطى بالصيغة:

$$A_+B_+ - A_-B_+$$

وبالمثل، يمكن تعريف التأثيرات البسيطة للعامل الثاني (B).

(2) التأثير الرئيسي للعامل (Main Effect):

هو التغير في الاستجابة الناتج عن التغير في مستويات العامل.

ويمكن أن يعرف على أنه متوسط التأثيرات البسيطة للعامل.

كما يمكن أن يعرف أيضًا على أنه الفرق بين متوسط الاستجابة عند المستوى المرتفع للعامل ومتوسط الاستجابة عند المستوى المنخفض للعامل.

مثال:

التأثير الرئيسي للعامل الأول (A) هو الفرق بين متوسط الاستجابة عند مستواه المرتفع ($\bar{A}_+$) ومتوسط الاستجابة عند مستواه المنخفض ($\bar{A}_-$)، ويعطى بالصيغة الآتية:

$$A = \bar{A}_+ - \bar{A}_-$$
$$= \frac{(A_+B_+) + (A_+B_-)}{2} - \frac{(\mathrm{A}_-B_+) + (\mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2}$$
$$= \frac{(A_+B_+) + (A_+B_-) - (\mathrm{A}_-B_+) - (\mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2}$$

كما يمكن تعريفه على أنه متوسط التأثيرات البسيطة، ويعطى بالصيغة الآتية:

$$A = \frac{(A_+B_+ - \mathrm{A}_-B_+) + (\mathrm{A}_+\mathrm{B}_- - \mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2}$$
$$= \frac{(A_+B_+) + (A_+B_-) - (\mathrm{A}_-B_+) - (\mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2}$$

وبالمثل، يمكن تعريف التأثير الرئيسي للعامل الثاني (B) بالصيغة الآتية:

$$B = \bar{B}_+ - \bar{B}_-$$
$$= \frac{(A_+B_+) + (\mathrm{A}_-B_+)}{2} - \frac{(A_+\mathrm{B}_-) + (\mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2}$$
$$= \frac{(A_+B_+) + (\mathrm{A}_-B_+) - (A_+\mathrm{B}_-) - (\mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2}$$

(3) التأثير المشترك أو التداخل البيني (Interactions) بين العاملين:

هو الاختلاف في الاستجابة بين مستويات أحد العاملين نتيجة لتغير مستويات العامل الآخر.

ويمكن أن يعرف على أنه متوسط الفرق بين التأثيرات البسيطة للعامل، أي متوسط الفرق بين كميتين هما:

(أ) التأثير البسيط للعامل الأول عند المستوى المرتفع للعامل الثاني:

$$(A_+B_+ - \mathrm{A}_-B_+)$$

(ب) التأثير البسيط للعامل الأول عند المستوى المنخفض للعامل الثاني:

$$(\mathrm{A}_+\mathrm{B}_- - \mathrm{A}_-\mathrm{B}_-).$$

أي أن:

$$AB = \frac{(A_+B_+ - A_-B_+) - (A_+B_- - A_-B_-)}{2}$$
$$= \frac{A_+B_+ + A_-B_- - A_-B_+ - A_+B_-}{2}$$

ويحدث هذا التأثير المشترك عندما يكون التغير في الاستجابة الناتج عن التغير في مستويات أحد العوامل يعتمد على مستويات العامل الآخر. وبعبارة أخرى، عندما تكون طبيعة تأثير أحد العوامل على الاستجابة تعتمد على مستويات العامل الآخر.

وفي حالة وجود التداخل البيني بين العاملين، فإن التركيز على التأثيرات الرئيسية غير مفيد، بل قد يقود إلى استنتاجات خاطئة، ولذلك فإن الطريقة السليمة في تلك الحالة هي التركيز على التأثيرات المشتركة (التداخلات البينية) والتأثيرات البسيطة التي توضح تأثيرات العامل على الاستجابة عند جميع مستويات العامل الآخر.

والجدول الآتي يلخص التأثيرات الرئيسية والبسيطة والمشتركة:

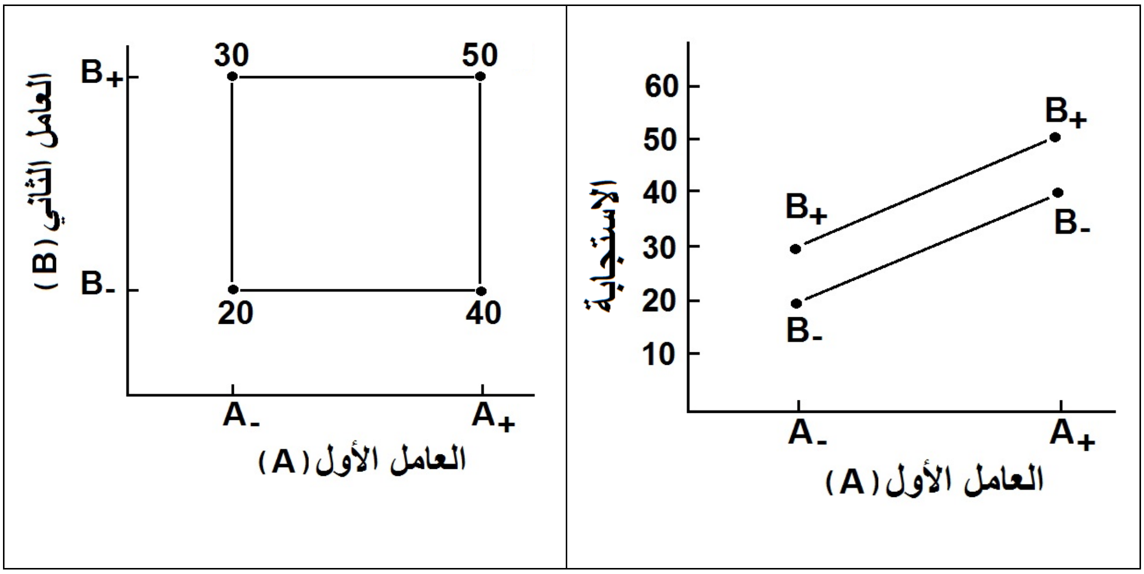
<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">العامل الثاني (B)</td><td rowspan="2">متوسط</td><td colspan="2" rowspan="2">تأثيرات بسيطة للعامل الأول</td><td rowspan="2">التأثير الرئيسي للعامل الأول</td></tr>
<tr><td>B_-</td><td>B_+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">العامل الأول (A)</td><td>A_-</td><td>A_-B_-</td><td>A_-B_+</td><td>$\bar{A}_-$</td><td rowspan="2">$(A_+B_-) - (A_-B_-)$</td><td rowspan="2">$(A_+B_+) - (A_-B_+)$</td><td rowspan="2">$\bar{A}_+ - \bar{A}_-$</td></tr>
<tr><td>A_+</td><td>A_+B_-</td><td>A_+B_+</td><td>$\bar{A}_+$</td></tr>
<tr><td colspan="2">متوسط</td><td>$\bar{B}_-$</td><td>$\bar{B}_+$</td><td colspan="4" rowspan="4">التداخل البيني (AB)
$[(A_+B_+ - A_-B_+) - (A_+B_- - A_-B_-)]/2$
$=$
$[(A_+B_+ - A_+B_-) - (A_-B_+ - A_-B_-)]/2$
$=$
$\frac{A_+B_+ + A_-B_- - A_-B_+ - A_+B_-}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">تأثير بسيط للعامل الثاني</td><td colspan="2">$(A_-B_+) - (A_-B_-)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(A_+B_+) - (A_+B_-)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">التأثير الرئيسي للعامل الثاني</td><td colspan="2">$\bar{B}_+ - \bar{B}_-$</td></tr>
</table>

مثال (حالة عدم التداخل البيني):

لنفرض أن بيانات التجربة كانت كما في الجدول الآتي:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">العامل الثاني (B)</td><td rowspan="2">المتوسط</td></tr>
<tr><td>B_-</td><td>B_+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">العامل الأول (A)</td><td>A_-</td><td>20</td><td>30</td><td>$\bar{A}_- = 25$</td></tr>
<tr><td>A_+</td><td>40</td><td>50</td><td>$\bar{A}_+ = 45$</td></tr>
<tr><td colspan="2">المتوسط</td><td>$\bar{B}_- = 30$</td><td>$\bar{B}_+ = 40$</td><td></td></tr>
</table>

ويمكن تمثيل البيانات بالشكلين الآتيين:



ويمكن حساب التأثيرات الرئيسية والتداخل البيني كما يأتي:

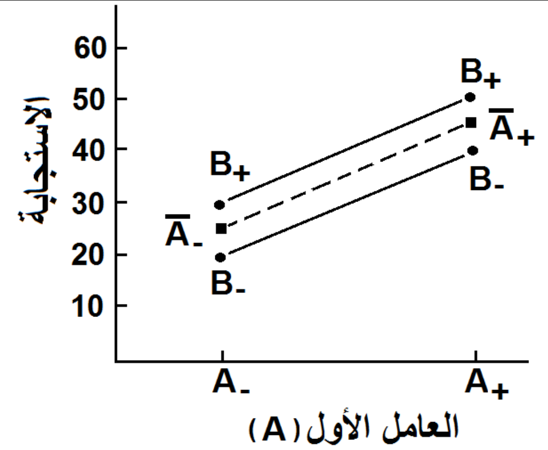
$$A = \bar{A}_+ - \bar{A}_-$$
$$= \frac{(A_+B_+) + (A_+B_-)}{2} - \frac{(A_-B_+) + (A_-\mathrm{B}_-)}{2}$$
$$= 45 - 25 = 20$$

$$B = \bar{B}_+ - \bar{B}_-$$
$$= \frac{(A_+B_+) + (A_-B_+)}{2} - \frac{(A_+\mathrm{B}_-) + (A_-\mathrm{B}_-)}{2}$$
$$= 40 - 30 = 10$$

$$\mathrm{AB} = \frac{(A_+B_+ - \mathrm{A}_-B_+) - (A_+\mathrm{B}_- - \mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2}$$
$$= \frac{(50 - 30) - (40 - 20)}{2} = 0$$

لاحظ أن مقدارتأثير التداخل البيني يساوي صفرًا؛ وذلك نظرًا لعدم وجود تداخل مشترك بين العاملين في هذا المثال. والخطوط المتوازية في الشكل أعلاه توضح مفهوم عدم وجود التداخل البيني بين العاملين حيث أن طبيعة العلاقة بين العامل الأول (A) ومتغير الاستجابة هي نفسها لكلا مستويي العامل الثاني (B).

يُلاحظ من الشكل أن الفرق في الاستجابة بين مستويي العامل (B) ثابت لجميع مستويات العامل (A). وفي هذه الحالة يكون للتأثير الرئيسي للعامل معنى واضح كما يبينه الخط المتقطع في الشكل الآتي:



$\bar{A}_-$ = متوسط الاستجابة عند المستوى المنخفض للعامل الأول = 25

$\bar{A}_+$ = متوسط الاستجابة عند المستوى المرتفع للعامل الأول = 45

التأثير الرئيسي للعامل الأول هو:

$$A = \bar{A}_+ - \bar{A}_- = 45 - 25 = 20$$

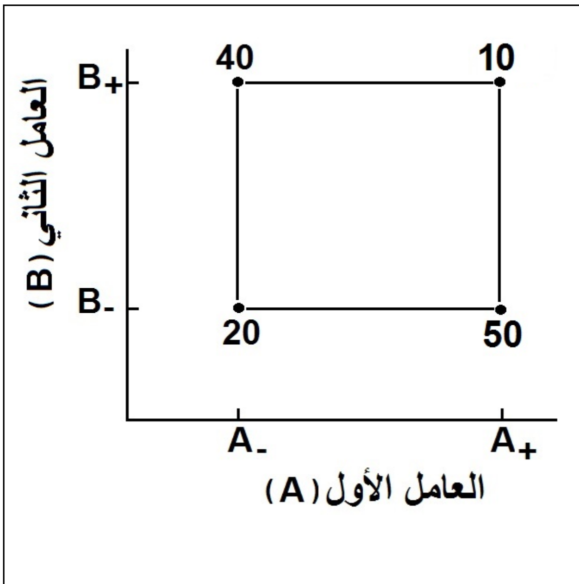
لاحظ أنه يوجد تغير في متوسط الاستجابة بمقدار 20 عندما يتغير مستوى العامل الأول من المستوى المنخفض (A_-) إلى المستوى المرتفع (A_+)، مما يدل على وجود تأثير رئيسي للعامل الأول.

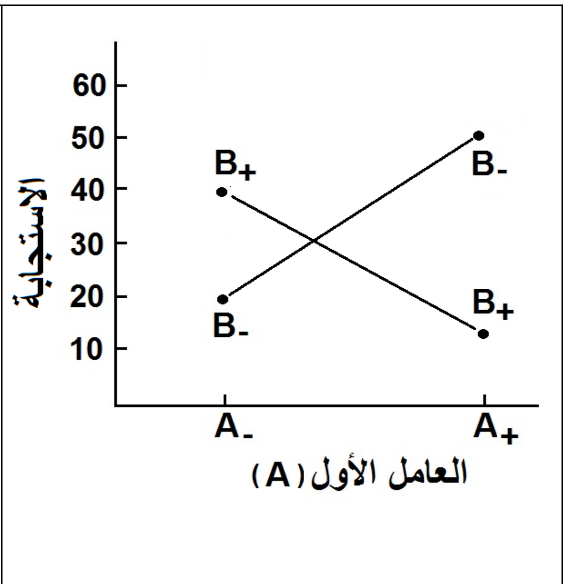
مثال (حالة التداخل البيني):

لنفرض أن بيانات التجربة كانت كما في الجدول الآتي:

		العامل الثاني (B)		المتوسط
		B_-	B_+	
العامل الأول (A)	A_-	20	40	$\bar{A}_- = 30$
	A_+	50	10	$\bar{A}_+ = 30$
المتوسط		$\bar{B}_- = 35$	$\bar{B}_+ = 25$	

ويمكن تمثيل البيانات بالشكلين الآتيين:





يلاحظ من الشكل أن هناك تأثير (علاقة) للعامل الأول (A) على متغير الاستجابة، ولكنها تعتمد على مستوى العامل الثاني (B). حيث أن هناك تأثير موجب للعامل الأول على الاستجابة عند المستوى المنخفض للعامل الثاني (B_-)، وهناك تأثير سالب للعامل الأول على الاستجابة عند المستوى المرتفع للعامل الثاني (B_+).

التأثير البسيط للعامل الأول على الاستجابة عند المستوى المنخفض للعامل الثاني (B_-) هو:

$$(A_+\mathrm{B}_- - \mathrm{A}_-\mathrm{B}_-) = 50 - 20 = 30$$

التأثير البسيط للعامل الأول على الاستجابة عند المستوى المرتفع للعامل الثاني (B_+) هو:

$$(A_+B_+ - \mathrm{A}_-B_+) = 10 - 40 = -30$$

وبحساب التأثير الرئيسي للعامل الأول، نجد أن:

$$A = \frac{(A_+B_+ - \mathrm{A}_-B_+) + (\mathrm{A}_+\mathrm{B}_- - \mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2} = \frac{30 + (-30)}{2} = 0$$

أو

$$A = \bar{A}_+ - \bar{A}_- = 30 - 30 = 0$$

والمقارنة بين التأثير الرئيسي للعامل الأول وتأثيراته البسيطة عند مستويات العامل الثاني توحي بوجود تناقض.

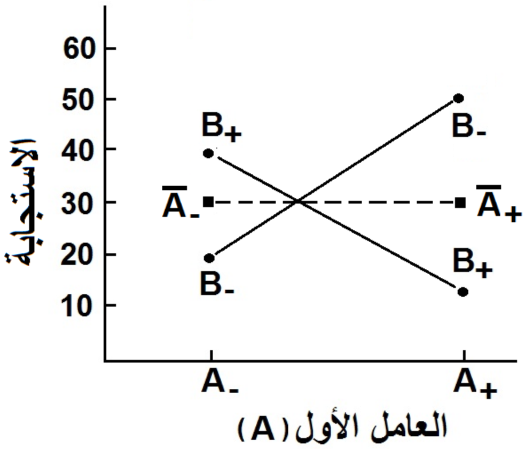
إن السبب في ذلك هو وجود التداخل البيني بين العاملين. حيث أن وجود التداخل البيني بين العاملين قد يخفي التأثير الرئيسي للعامل.

ويمكن حساب تأثير التداخل البيني بين العاملين كما يأتي:

$$\mathrm{AB} = \frac{(A_+B_+ - \mathrm{A}_-B_+) - (A_+\mathrm{B}_- - \mathrm{A}_-\mathrm{B}_-)}{2}$$
$$= \frac{(12 - 40) - (50 - 20)}{2} = -29$$

لاحظ أن مقدارتأثير التداخل البيني لا يساوي الصفر؛ وذلك نظرًا لوجود تداخل مشترك بين العاملين في هذا المثال. أي أن طبيعة تأثير أحد العوامل على الاستجابة تعتمد على مستوى العامل الآخر. والخطوط غير المتوازية في الشكل أعلاه توضح مفهوم وجود التداخل البيني بين العاملين حيث أن طبيعة العلاقة بين العامل الأول (A) ومتغير الاستجابة ليست هي نفسها لكلا مستويي العامل الثاني (B). حيث نلاحظ أن قيمة الاستجابة تزداد بزيادة مستوى العامل الأول عندما يكون العامل الثاني في المستوى المنخفض (B_-)، بينما تقل قيمة الاستجابة بزيادة مستوى العامل الأول عندما يكون العامل الثاني في المستوى المرتفع (B_+).

يُلاحظ من الشكل أن الفرق في الاستجابة بين مستويي العامل (B) يعتمد على مستويات العامل (A). وفي هذه الحالة قد لا يكون للتأثير الرئيسي للعامل معنى واضح؛ حيث أن وجود التداخل البيني أخفى وجود التأثير الرئيسي للعامل الأول، كما يبينه الخط المتقطع في الشكل الآتي:



$\bar{A}_-$ = متوسط الاستجابة عند المستوى المنخفض للعامل الأول = 30

$\bar{A}_+$ = متوسط الاستجابة عند المستوى المرتفع للعامل الأول = 30

التأثير الرئيسي للعامل الأول هو:

$$A = \bar{A}_+ - \bar{A}_- = 30 - 30 = 0$$

لاحظ أن الشكل يظهر عدم وجود تغير في متوسط الاستجابة عندما يتغير مستوى العامل الأول من المستوى المنخفض (A_-) إلى المستوى المرتفع (A_+)، مما يدل على أن وجود التداخل البيني قد يخفي وجود التأثير الرئيسي للعامل الأول.

ترميز:

يرمز للعوامل بالأحرف الكبيرة (A وB وC و ...)، ويرمز لعدد مستوياتها بالأحرف الصغيرة (a وb وc و ...)، ويرمز لمستوياتها بالأحرف الكبيرة مع دليل برقم المستوى، مثل ($A_i,\ B_j,\ C_k$)، وهكذا.

وإذا كان لدينا تجربة عاملية بثلاثة عوامل (A وB وC)، وعدد مستوياتها هي على الترتيب (a وb وc)، فتسمى تجربة عاملية ($a \times b \times c$).

وتتمثل المعالجات في مجموعة التوافيق (التواليف) الممكن تشكيلها من مستويات هذه العوامل، ويكون عدد المعالجات مساوٍ للعدد ($a \times b \times c$)، وبحيث يظهر مستوى كل عامل مع جميع مستويات العوامل ا لأخرى.

التجارب العاملية ذات عاملين: Two-Factor Factorial Experiments

إن أبسط التجارب العاملية هي التجارب التي تحتوي على عاملين (A و B)، ونرغب في دراسة تأثيرهما على متغير الاستجابة.

لنفرض أن عدد مستويات العامل الأول (a) ومستوياته هي $(A_1,\ A_2, \dots, A_a)$.

ولنفرض أن عدد مستويات العامل الثاني (b) ومستوياته هي $(B_1,\ B_2, \dots, B_b)$.

إن عدد معالجات التجربة هو $(t = ab)$، وتتألف هذه المعالجات من جميع التوليفات (التشكيلات) الممكنة لمستويات العاملين، ويمكن أن تدخل هذه المعالجات في أحد التصميمات التي ذكرناها سابقًا، مثل التصميم تام العشوائية أو تصميم القطاعات العشوائية الكاملة أو تصميم المربع اللاتيني.

والجدول الآتي يحوي جميع المعالجات الممكن تكوينها من تصالب مستويات العاملين:

		مستويات العامل الثاني (B)			
		B_1	B_2	$\dots$	B_b
مستويات العامل الأول (A)	A_1	A_1B_1	A_1B_2	$\dots$	A_1B_b
	A_2	A_2B_1	A_2B_2	$\dots$	A_2B_b
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	A_a	A_aB_1	A_aB_2	$\dots$	A_aB_b

حيث أن الرمز (A_iB_j) يشير إلى المعالجة التي يتم فيها تطبيق المستوى (A_i) للعامل الأول والمستوى (B_j) للعامل الثاني. وأما قيم المؤشرين (i) و (j) فهي:

$$i = 1, 2, \dots, a$$
$$j = 1, 2, \dots, b$$

التجربة العاملية ذات عاملين في التصميم تام العشوائية:

Two-Factor Factorial experiment in Completely Randomized Design

في هذه التجربة العاملية يكون لدينا عاملين (A و B)، عدد مستوياتهما هو (a) و (b) على الترتيب، وتسمى تجربة عاملية $(a \times b)$، وفي هذه التجربة نقوم بتطبيق كل معالجة من المعالجات على (r) وحدة تجريبية يتم اختيارها بشكل عشوائي تام.

لذا، فإن العدد الكلي للوحدات التجريبية يساوي $(N = abr)$.

ولنفرض أن (Y_{ijk}) هي مشاهدة الوحدة التجريبية رقم (k) المطبق عليها المستوى رقم (i) للعامل الأول والمستوى رقم (j) للعامل الثاني، أي أنها هي مشاهدة الوحدة التجريبية رقم (k) المطبق عليها المعالجة (A_iB_j)؛ حيث أن:

$$i = 1, 2, \dots, a$$
$$j = 1, 2, \dots, b$$
$$k = 1, 2, \dots, r$$

والنموذج الخطي لهذه التجربة هو:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

حيث أن:

1. μ = المتوسط العام؛ وهو قيمة ثابتة ومجهولة.
2. α_i = تأثير العامل الأول.
   وقد تكون ثابتة أو عشوائية، ويعتمد ذلك على نوع التصميم.
3. β_j = تأثير العامل الثاني.
   وقد تكون ثابتة أو عشوائية، ويعتمد ذلك على نوع التصميم.
4. $(\alpha\beta)_{ij}$ = تأثير التداخل أو التفاعل البيني بين العاملين (التأثير المشترك).
   وقد تكون ثابتة أو عشوائية، ويعتمد ذلك على نوع التصميم
5. ϵ_{ijk} = الخطأ العشوائي للوحدة التجريبية رقم (k) المطبق عليها المعالجة (A_iB_j).
   ويفترض أن تتوزع الأخطاء العشوائية (ϵ_{ijk}) بشكل مستقل وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (σ_ϵ^2)، أي أن $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$.

لاحظ أن رمز تاثير التفاعل البيني $(\alpha\beta)_{ij}$ لا يعني بشكل عام المضروب $(\alpha_i \times \beta_j)$.

إن أهداف التصميم هي التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي لك عامل من العاملين على متغير الاستجابة، والتحقق من وجود (أو عدم وجود) تداخل بيني معنوي بين العاملين، وكذلك التعرف على مستويات العاملين التي تحقق أعلى (أو قل) قيم لمتغير الاستجابة.

وبشكل أكثر تحديدًا، فإننا نرغب في اختبار الفروض الآتية:

(1) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تداخل بيني معنوي بين العاملين:

$$H_o^{AB}: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \text{لجميع القيم}$$
$$H_1^{AB}: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{لقيمة واحدة على الأقل}$$

(2) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي للعامل الأول:

$$H_o^{A}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$$
$$H_1^{A}: \alpha_i \neq 0 \quad \text{لقيمة واحدة على الأقل}$$

(3) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي للعامل الثاني:

$$H_o^{B}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$
$$H_1^{B}: \beta_j \neq 0 \quad \text{لقيمة واحدة على الأقل}$$

الشكل العام للبيانات:

جرت العادة على وضع البيانات في جدول كما يأتي:

		مستويات العامل الثاني (B)				مجموع مستوى (A)	متوسط مستوى (A)
		B_1	B_2	...	B_b		
مستويات العامل الأول (A)	A_1	Y_{111} $\vdots$ Y_{11r}	Y_{121} $\vdots$ Y_{12r}	...	Y_{1b1} $\vdots$ Y_{1br}		
	مجموع متوسط	$Y_{11\bullet}$ $\bar{Y}_{11\bullet}$	$Y_{12\bullet}$ $\bar{Y}_{12\bullet}$		$Y_{1b\bullet}$ $\bar{Y}_{1b\bullet}$	$Y_{1\bullet\bullet}$	$\bar{Y}_{1\bullet\bullet}$
	A_2	Y_{211} $\vdots$ Y_{21r}	Y_{221} $\vdots$ Y_{22r}	...	Y_{2b1} $\vdots$ Y_{2br}		
	مجموع متوسط	$Y_{21\bullet}$ $\bar{Y}_{21\bullet}$	$Y_{22\bullet}$ $\bar{Y}_{22\bullet}$		$Y_{2b\bullet}$ $\bar{Y}_{2b\bullet}$	$Y_{2\bullet\bullet}$	$\bar{Y}_{2\bullet\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
	A_a	Y_{a11} $\vdots$ Y_{a1r}	Y_{a21} $\vdots$ Y_{a2r}	...	Y_{ab1} $\vdots$ Y_{abr}		
	مجموع متوسط	$Y_{a1\bullet}$ $\bar{Y}_{a1\bullet}$	$Y_{a2\bullet}$ $\bar{Y}_{a2\bullet}$		$Y_{ab\bullet}$ $\bar{Y}_{ab\bullet}$	$Y_{a\bullet\bullet}$	$\bar{Y}_{a\bullet\bullet}$
مجموع مستوى (B)		$Y_{\bullet1\bullet}$	$Y_{\bullet2\bullet}$	...	$Y_{\bullet b\bullet}$	المجموع العام $Y_{\bullet\bullet\bullet}$	
متوسط مستوى (B)		$\bar{Y}_{\bullet1\bullet}$	$\bar{Y}_{\bullet2\bullet}$		$\bar{Y}_{\bullet b\bullet}$	المتوسط العام $\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$	

لاحظ أن:

عدد الوحدات التجريبية (المشاهدات) لكل مستوى من مستويات العامل الأول = br.

عدد الوحدات التجريبية (المشاهدات) لكل مستوى من مستويات العامل الثاني = ar.

العدد الكلي للوحدات التجريبية (للمشاهدات) = $N = abr$.

ويتم حساب وتلخيص المجاميع والمتوسطات الواردة في الجدول أعلاه بالصيغ في الجداول الآتية:

المقدار	المجموع	المتوسط
مجموع ومتوسط المعالجة أو الخلية (A_iB_j)	$Y_{ij\bullet} = \sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{ij\bullet} = \frac{Y_{ij\bullet}}{r}$
مجموع ومتوسط المستوى رقم (i) للعامل الأول	$Y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{b} Y_{ij\bullet} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{Y_{i\bullet\bullet}}{br}$
مجموع ومتوسط المستوى رقم (j) للعامل الثاني	$Y_{\bullet j\bullet} = \sum_{i=1}^{a} Y_{ij\bullet} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{\bullet j\bullet} = \frac{Y_{\bullet j\bullet}}{ar}$
المجموع والمتوسط العام (الكلي)	$Y_{\bullet\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{a} Y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{b} Y_{\bullet j\bullet} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij\bullet} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}}{abr} = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}}{N}$
عدد المشاهدات الكلي	$N = abr$	

جدول المجاميع:

		مستويات العامل الثاني (B)				مجموع مستوى (A)
		B_1	B_2	$\dots$	B_b	
مستويات العامل الأول (A)	A_1	$Y_{11\bullet}$	$Y_{12\bullet}$	$\dots$	$Y_{1b\bullet}$	$Y_{1\bullet\bullet}$
	A_2	$Y_{21\bullet}$	$Y_{22\bullet}$	$\dots$	$Y_{2b\bullet}$	$Y_{2\bullet\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	A_a	$Y_{a1\bullet}$	$Y_{a2\bullet}$	$\dots$	$Y_{ab\bullet}$	$Y_{a\bullet\bullet}$
مجموع مستوى (B)		$Y_{\bullet 1\bullet}$	$Y_{\bullet 2\bullet}$	$\dots$	$Y_{\bullet b\bullet}$	المجموع العام $Y_{\bullet\bullet\bullet}$

جدول المتوسطات:

		مستويات العامل الثاني (B)				متوسط مستوى (A)
		B_1	B_2	…	B_b	
مستويات العامل الأول (A)	A_1	$\bar{Y}_{11\bullet}$	$\bar{Y}_{12\bullet}$	…	$\bar{Y}_{1b\bullet}$	$\bar{Y}_{1\bullet\bullet}$
	A_2	$\bar{Y}_{21\bullet}$	$\bar{Y}_{22\bullet}$	…	$\bar{Y}_{2b\bullet}$	$\bar{Y}_{2\bullet\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	A_a	$\bar{Y}_{a1\bullet}$	$\bar{Y}_{a2\bullet}$	…	$\bar{Y}_{ab\bullet}$	$\bar{Y}_{a\bullet\bullet}$
متوسط مستوى (B)		$\bar{Y}_{\bullet1\bullet}$	$\bar{Y}_{\bullet2\bullet}$	…	$\bar{Y}_{\bullet b\bullet}$	المتوسط العام $Y_{\bullet\bullet\bullet}$

تحليل التباين:

مجموع المربعات الكلي هو:

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{r} \left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

ودرجات الحرية الكلية المصاحبة له هو:

$$df_{Total} = N - 1 = abr - 1$$

وبشكل مشابه لما مر معنا سابقًا، نقوم بتجزيء مجموع المربعات الكلي ودرجات الحرية الكلية وفقًا لمصادر الاختلاف إلى أربع مركبات؛ هي:

SS_A = مجموع مربعات العامل الأول

بدرجات حرية مقدارها ($df_A = a - 1$)

SS_B = مجموع مربعات العامل الثاني

بدرجات حرية مقدارها ($df_B = b - 1$)

SS_{AB} = مجموع مربعات التداخل البيني

بدرجات حرية مقدارها ($df_{AB} = (a-1)(b-1)$)

SS_E = مجموع مربعات الخطأ التجريبي

بدرجات حرية مقدارها ($df_E = ab(r-1)$)

أي أن:

$$SS_{Total} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$

وبالمثل، يتم تجزيء درجات حرية مجموع المربعات الكلي إلى أربع مركبات كما يأتي:

$$df_{Total} = df_A + df_B + df_{AB} + df_E$$

والجدول الآتي يوضح مجاميع المربعات والصيغ الحسابية لها:

مجموع المربعات	صيغة التعريف الجبرية	الصيغة الحسابية
SS_A	$\mathrm{br}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}}(\bar{\mathrm{Y}}_{i\bullet\bullet} - \bar{\mathrm{Y}}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$\frac{1}{\mathrm{br}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}}\mathrm{Y}_{i\bullet\bullet}^2 - \mathrm{CF}$
SS_B	$\mathrm{ar}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\left(\bar{\mathrm{Y}}_{\bullet j\bullet} - \bar{\mathrm{Y}}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$	$\frac{1}{\mathrm{ar}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}_{\bullet j\bullet}^2 - \mathrm{CF}$
SS_{AB}	$\mathrm{r}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\left(\mathrm{Y}_{\mathrm{ijk}} - \bar{\mathrm{Y}}_{i\bullet\bullet} - \bar{\mathrm{Y}}_{\bullet j\bullet} + \bar{\mathrm{Y}}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$	$\frac{1}{\mathrm{r}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}_{\mathrm{ij}\bullet}^2 - SS_A - SS_B - \mathrm{CF}$
SS_E	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}}\left(\mathrm{Y}_{\mathrm{ijk}} - \bar{\mathrm{Y}}_{ij\bullet}\right)^2$	$SS_{Total} - SS_A - SS_B - SS_{AB}$
SS_{Total}	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}}\left(\mathrm{Y}_{\mathrm{ijk}} - \bar{\mathrm{Y}}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}}\mathrm{Y}_{\mathrm{ijk}}^2 - \mathrm{CF}$
$\mathrm{CF} = \frac{\mathrm{Y}_{\bullet\bullet\bullet}{}^2}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{Y}_{\bullet\bullet\bullet}{}^2}{\mathrm{abr}}$		

ملاحظة: مجموع مربعات المعالجات هو:

$$SS_{Trt} = SS_A + SS_B + SS_{AB}$$

$$= \mathrm{r}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\left(\mathrm{Y}_{\mathrm{ij}\bullet} - \bar{\mathrm{Y}}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}_{\mathrm{ij}\bullet}^2 - \mathrm{CF}$$

ودرجات الحرية للمعالجات هي:

$$df_{Trt} = df_A + df_B + df_{AB}$$

$$= (\mathrm{a}-1) + (\mathrm{b}-1) + (\mathrm{a}-1)(\mathrm{b}-1)$$

$$= \mathrm{ab} - 1$$

ونحسب أيضًا متوسطات المربعات كما يأتي:

متوسط مربعات العامل الأول هو:

$$MSA = \frac{SS_A}{a-1}$$

متوسط مربعات العامل الثاني هو:

$$MSB = \frac{SS_B}{b-1}$$

متوسط مربعات التداخل البيني هو:

$$MSAB = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$$

متوسط مربعات الخطأ التجريبي هو:

$$MSE = \frac{SS_E}{ab(r-1)}$$

ملاحظة: متوسط مربعات المعالجات هو:

$$MSTrt = \frac{SS_{Trt}}{ab-1}$$

ثم نقوم بحساب إحصاءات الاختبارات (اختبارات إف)، وتحديد القيم الجدولية، وإجراء الاختبارات. والجدول الآتي يلخص هذه الاختبارات:

فرضية العدم (H_o)	إحصاءة الاختبار	القرار: نرفض H_o إذا كان:
لجميع القيم $H_o^{AB}: (\alpha\beta)_{ij} = 0$ لا يوجد تداخل بيني :H_o^{AB} $\Leftrightarrow$	$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$	$F_{AB} > F_\alpha(df_{AB}, df_E)$
إذا لم يتم رفض فرضية العدم السابقة (H_o^{AB})، أي إذا لم يكن هناك تفاعل بيني معنوي بين العاملين، نقوم بإجراء الاختبارين الآتيين:		
$H_o^A: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$ لا يوجد تأثيرمعنوي للعامل الأول :H_o^A $\Leftrightarrow$	$F_A = \frac{MSA}{MSE}$	$F_A > F_\alpha(df_A, df_E)$
$H_o^B: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$ لا يوجد تأثيرمعنوي للعامل الثاني :H_o^B $\Leftrightarrow$	$F_B = \frac{MSB}{MSE}$	$F_B > F_\alpha(df_B, df_E)$

ملاحظات:

1. الاختبارات التي تم إجراؤها في الجدول السابق، تعتمد على افتراض أن تأثيرات العاملين وتأثيرات التداخل البيني بين العاملين ثابتة.
2. إذا وجد تفاعل بيني بين العاملين، فيستنتج من بابٍ أولى بأن هناك تأثير لكلا العاملين على متغير الاستجابة (أي أن: وجود تداخل بيني يؤدي إلى وجود تأثر لكلا العاملين). وفي هذه الحالة، ينصب الاهتمام على دراسة تأثير كل عامل من العوامل على متغير

الاستجابة لكل مستوى من مستويات العامل الآخر (أي، يتم التركيز على التأثيرات البسيطة للعوامل).

جدول تحليل التباين:

يمكن تلخيص الحسابات السابقة في جدول تحليل التباين كما يأتي:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio
المعالجات Treatments	SS_{Trt}	$ab-1$	$MSTrt$	$F_{Trt}=\frac{MSTrt}{MSE}$
$\rightarrow$ A	$\rightarrow SS_A$	$\rightarrow a-1$	MSA	$F_A=\frac{MSA}{MSE}$
$\rightarrow$ B	$\rightarrow SS_B$	$\rightarrow b-1$	MSB	$F_B=\frac{MSB}{MSE}$
$\rightarrow$AB	$\rightarrow SS_{AB}$	$\rightarrow (a-1)(b-1)$	$MSAB$	$F_{AB}=\frac{MSAB}{MSE}$
الخطأ التجريبي Experimental Error	SS_E	$ab(r-1)$	MSE	
المجموع (Total)	SS_{Total}	$abr-1$		

ملاحظة:

$$MSTrt \neq MSA + MSB + MSAB$$

مثال:

أُجريت تجربة عاملية لاختبار تأثيرعاملين على تركيز حامض الأسكاربك (Ascorbic Acid) في الفاصوليا الخضراء. والعاملان هما: العامل الأول (A) عبارة عن الحرارة (بالدرجات المئوية) بثلاث مستويات (-20 و-15 و -10)، والعامل الثاني (B) عبارة عن مدة التخزين (بالأسابيع) بأربع مستويات (2 و 4 و 6 و 8). وقد تم تكرار كل معالجة في هذه التجربة ثلاث مرات ($r=3$).

ويرغب الباحث في التحقق مما يأتي (عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$):

– هل يوجد تفاعل بيني بين العاملين؟ وبمعنى آخر، هل علاقة أحد العاملين بتركيز حامض الأسكاربك (متغير الاستجابة) تعتمد على مستويات العامل الآخر؟

- هل هناك تاثير معنوي للعامل الأول (الحرارة) على تركيز حامض الأسكاربك، أي هل يوجد فروق معنوية بين مستويات العامل الأول؟
- هل هناك تاثير معنوي للعامل الثاني (مدة التخزين) على تركيز حامض الأسكاربك، أي هل يوجد فروق معنوية بين مستويات العامل الثاني؟

والجدول الآتي يحتوي على بيانات الدراسة مع بعض الحسابات.

		مستويات العامل الثاني (B) (مدة التخزين)				مجموع مستوى (A)	متوسط مستوى (A)
		$B_1 = 2$	$B_2 = 4$	$B_3 = 6$	$B_4 = 8$		
مستويات العامل الأول (A) (الحرارة)	$A_1 = -20$	15 16 14 ------	17 15 15 ------	15 16 14 ------	14 17 16 ------		
	مجموع	45	47	45	47	$Y_{1\bullet\bullet} = 184$	$\bar{Y}_{1\bullet\bullet} = 15.33$
	متوسط	15	15.67	15	15.67		
	$A_2 = -15$	15 15 16 ------	12 15 15 ------	13 15 14 ------	12 13 11 ------		
	مجموع	46	42	42	36	$Y_{2\bullet\bullet} = 166$	$\bar{Y}_{2\bullet\bullet} = 13.83$
	متوسط	15.33	14	14	12		
	$A_3 = -10$	11 11 12 ------	11 9 8 ------	8 7 6 ------	6 5 6 ------		
	مجموع	34	28	21	17	$Y_{3\bullet\bullet} = 100$	$\bar{Y}_{3\bullet\bullet} = 8.33$
	متوسط	11.33	9.33	7	5.67		
مجموع مستوى (B)		$Y_{\bullet 1\bullet}$ 125	$Y_{\bullet 2\bullet}$ 117	$Y_{\bullet 3\bullet}$ 108	$Y_{\bullet 4\bullet}$ 100	المجموع العام $Y_{\bullet\bullet\bullet} = 450$	
متوسط مستوى (B)		$\bar{Y}_{\bullet 1\bullet}$ 13.89	$\bar{Y}_{\bullet 2\bullet}$ 13	$\bar{Y}_{\bullet 3\bullet}$ 12	$\bar{Y}_{\bullet 4\bullet}$ 11.11	المتوسط العام $\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = 12.5$	

الحسابات:

$a = 3$

$b = 4$

$r = 3$

$N = abr = 3 \times 4 \times 3 = 36$

$$CF = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}{}^{2}}{N} = \frac{450^2}{36} = 5625$$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}^2 = 15^2 + 17^2 + \cdots + 6^2 = 6056$	مجموع مربعات المشاهدات
$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij\bullet}^2 = 45^2 + 47^2 + \cdots + 17^2 = 18078$	مجموع مربعات مجاميع الخلايا
$\sum_{i=1}^{a} Y_{i\bullet\bullet}^2 = 184^2 + 166^2 + 100^2 = 71412$	مجموع مربعات مجاميع الصفوف (A)
$\sum_{j=1}^{b} Y_{\bullet j\bullet}^2 = 125^2 + 117^2 + 108^2 + 100^2 = 50978$	مجموع مربعات مجاميع الأعمدة (B)

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}^2 - CF = 6056 - 5625 = 431.0$$

$$df_{Total} = N - 1 = 36 - 1 = 35$$

$$SS_A = \frac{1}{br}\sum_{i=1}^{a} Y_{i\bullet\bullet}^2 - CF = \frac{1}{4\times3}(71412) - 5625 = 5951 - 5625 = 326.0$$

$$df_A = a - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$MSA = \frac{SS_A}{a-1} = \frac{326}{2} = 163.0$$

$$SS_B = \frac{1}{ar}\sum_{j=1}^{b} Y_{\bullet j\bullet}^2 - CF = \frac{1}{3\times3}(50978) - 5625 = 5664.22 - 5625 = 39.2222$$

$$df_B = b - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$MSB = \frac{SS_B}{b-1} = \frac{39.2222}{3} = 13.074$$

$$SS_{AB} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij\bullet}^2 - SS_A - SS_B - CF = \frac{1}{3}(18078) - 326 - 39.2222 - 5625 = 6026 - 326 - 39.2222 - 5625 = 35.7778$$

$$df_{AB} = (a-1)(b-1) = 2 \times 3 = 6$$

$$MSAB = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)} = \frac{35.7778}{6} = 5.963$$

$$SS_E = SS_{Total} - SS_A - SS_B - SS_{AB} = 431 - 326 - 39.2222 - 35.7778 = 30.0$$

$$df_E = ab(r-1) = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

$$MSE = \frac{SS_E}{ab(r-1)} = \frac{30.0}{24} = 1.25$$

قيم إحصاءات الاختبارات:

$$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{5.963}{1.25} = 4.7704$$

$$F_A = \frac{MSA}{MSE} = \frac{163.00}{1.25} = 130.4$$

$$F_B = \frac{MSB}{MSE} = \frac{13.074}{1.25} = 10.4592$$

القيم الجدولية:

$$F_\alpha(df_{AB}, df_E) = F_{0.05}(6, 24) = 2.51$$

$$F_\alpha(df_A, df_E) = F_{0.05}(2, 24) = 3.40$$

$$F_\alpha(df_B, df_E) = F_{0.05}(3, 24) = 3.01$$

جدول تحليل التباين:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio	القيم الجدولية
A: الحرارة	326.00	2	163.00	130.4	3.40
B: مدة التخزين	39.22	3	13.074	10.4592	3.01
A*B	35.78	6	5.963	4.7704	2.51
الخطأ (Error)	30.00	24	1.25		
المجموع (Total)	431.00	35			

القرار:

نظرًا لأن $F_{AB} > F_\alpha(df_{AB}, df_E)$ ، فإننا نرفض فرض العدم القائل بعدم وجود تفاعل بيني بين العاملين (الحرارة ومدة التخزين)، ونستنتج أن هناك تداخل بيني بينهما، أي أن علاقة أحد العاملين بمتغير الاستجابة (تركيز الحمض) تتأثر بمستويات العامل الآخر. ولذلك، فإن تركيزنا الآن سيكون على التفاعل البيني بين درجة الحرارة ومدة التخزين وعلى التأثيرات البسيطة، وليس على التأثيرات الرئيسية للعاملين.

فعلى سبيل المثال، العلاقة بين زمن التخزين وتركيز حمض الأسكاربك تعتمد على درجة الحرارة. وكذلك العكس، فإن العلاقة بين درجة الحرارة وتركيز حمض الأسكاربك تعتمد على زمن التخزين.

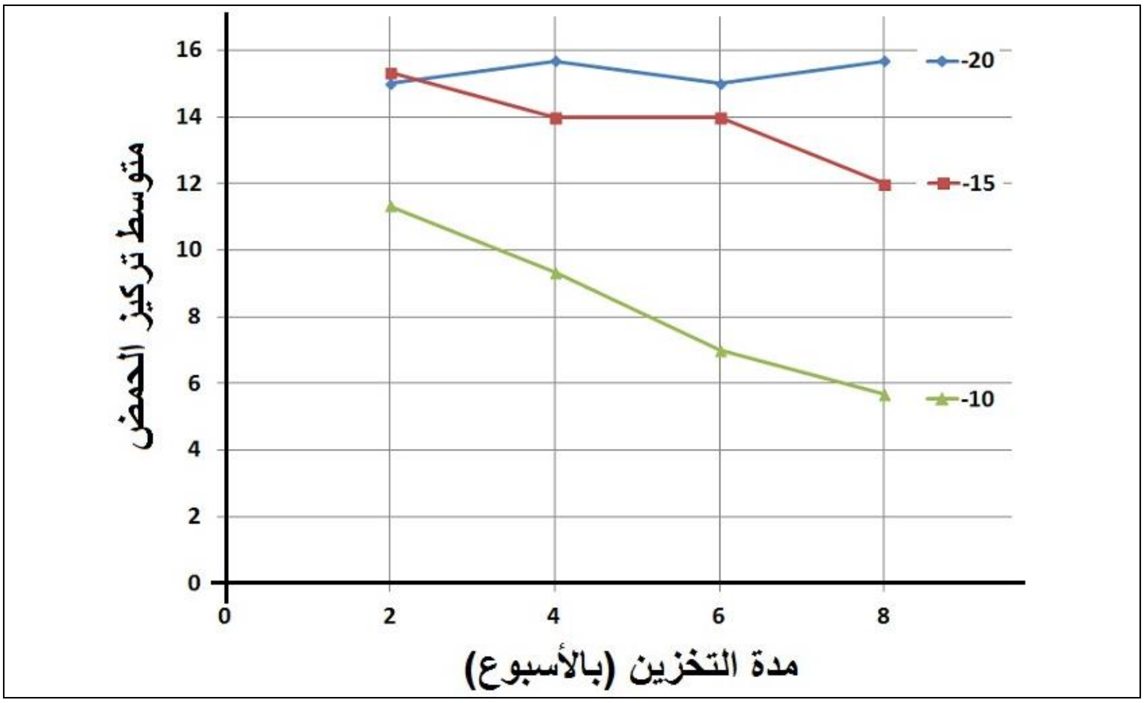
وعند حساب القيمة الاحتمالية (P-value)، نجد أن:

$$0.005 < \mathrm{P-value} = P(F > F_{AB}) = P(F > 4.7704) < 0.01$$

والجدول الآتي يحتوي على متوسطات تركيزات حمض الأسكاربك في جميع الخلايا (لجميع المعالجات $\bar{Y}_{ij\bullet}$):

$\bar{Y}_{ij\bullet}$		مدة التخزين (بالأسبوع)			
		2	4	6	8
درجة الحرارة (مئوية)	-20	15.00	15.67	15.00	15.67
	-15	15.33	14.00	14.00	12.00
	-10	11.33	9.33	7.00	5.67

والشكل البياني الآتي عبارة عن تمثيل بياني لجدول المتوسطات أعلاه؛ حيث تم رسم متوسط تركيز الحمض مقابل مدة التخزين لكل مستوى من مستويات الحرارة.



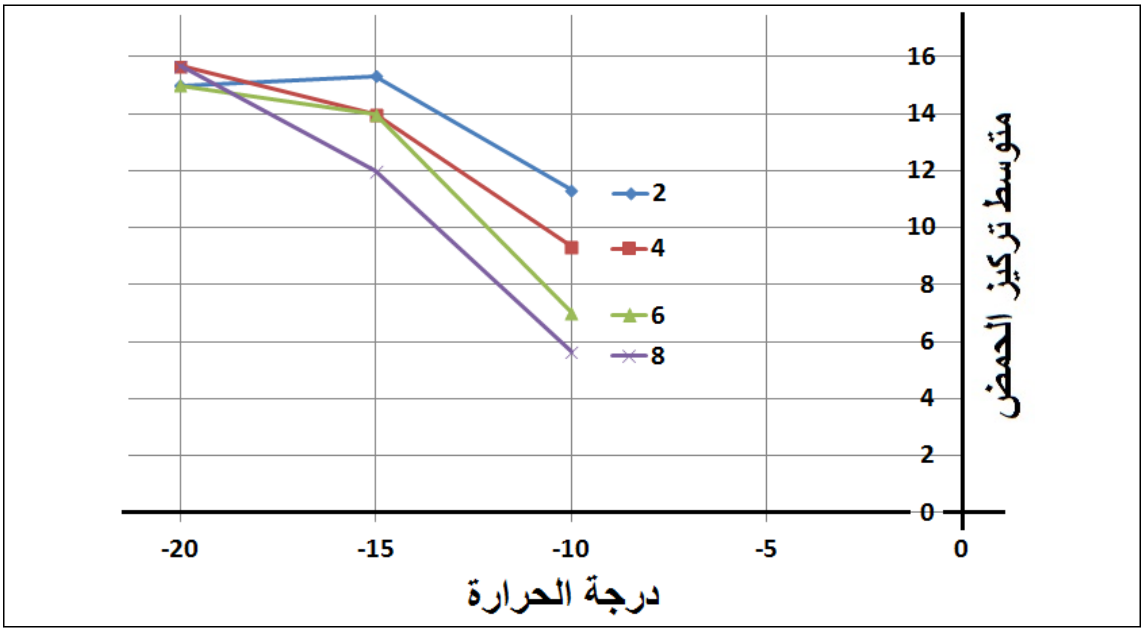
من الشكل أعلاه يلاحظ ما يأتي:

عند درجة الحرارة (-10)، يتناقص تركيز الحمض بزيادة مدة التخزين.

عند درجة الحرارة (-15)، يتناقص تركيز الحمض بزيادة مدة التخزين من (2) إلى (8)، وثبات تركيز الحمض عند مدة التخزين (4) و (6).

عند درجة الحرارة (-20)، يزداد تركيز الحمض بزيادة مدة التخزين من (2) إلى (4)، ثم يتناقص عند (6) ثم يزداد عند (8).

والشكل البياني الآتي عن تمثيل بياني لجدول المتوسطات أعلاه؛ حيث تم رسم متوسط تركيز الحمض مقابل درجة الحرارة لكل مستوى من مستويات مدة التخزين



من الشكل أعلاه يلاحظ ما يأتي:

عند مدد التخزين (4) و (6) و (8)، يتناقص تركيز الحمض بزيادة درجة الحرارة.

عند مدد التخزين (2)، يزداد تركيز الحمض بزيادة درجة الحرارة من (-20) إلى (-15)، ثم يتناقص عند (-10).

التجربة العاملية ذات عاملين في تصميم القطاعات العشوائية الكاملة:

Two-Factor Factorial experiment in Randomized Complete Block Design

في هذه التجربة العاملية يكون لدينا عاملين (A و B)، عدد مستوياتهما هو (a) و (b) على الترتيب، ويكون لدينا عامل للقطاعات (عامل مزعج/ عامل غير مرغوب فيه) عدد مستوياته (عدد القطاعات) هو (r). ونرغب في استكشاف تأثير العاملين على متغير الاستجابة بعد التخلص من تأثير عامل القطاعات .

في هذه التجربة نقوم بتطبيق كل معالجة من المعالجات بشكل عشوائي مرة واحدة فقط في كل قطاع.

عدد المعالجات يساوي (ab)، وهي عبارة عن جميع التوليفات الممكن تشكيلها من مستويات العاملين (A_iB_j). والعدد الكلي للوحدات التجريبية يساوي $(N = abr)$.

وفي هذا التجربة (التصميم) سوف نفرض عدم وجود تداخل (تفاعل) بيني بين عامل القطاعات وعوامل المعالجات.

ولنفرض أن (Y_{ijk}) هي مشاهدة الوحدة التجريبية في القطاع رقم (k) المطبق عليها المستوى رقم (i) للعامل الأول والمستوى رقم (j) للعامل الثاني، أي أنها هي مشاهدة الوحدة التجريبية المطبق عليها المعالجة (A_iB_j) في القطاع رقم (k) ؛ حيث أن:

$$
\begin{aligned}
i &= 1, 2, \dots, a \\
j &= 1, 2, \dots, b \\
k &= 1, 2, \dots, r
\end{aligned}
$$

الشكل العام للبيانات:

جرت العادة على وضع البيانات مع بعض الحسابات في جدول كما يأتي:

مستويات العامل الأول (A)	مستويات العامل الثاني (B)	القطاعات (Blocks)				مجموع المعالجة (A_iB_j) $Y_{ij\bullet}$	مجاميع مستويات العامل الأول $Y_{i\bullet\bullet}$
		Blk (1)	Blk (2)	...	Blk (r)		
	B_1	Y_{111}	Y_{112}	...	Y_{11r}	$Y_{11\bullet}$	
A_1	B_2	Y_{121}	Y_{122}	...	Y_{12r}	$Y_{12\bullet}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
	B_b	Y_{1b1}	Y_{1b2}	...	Y_{1br}	$Y_{1b\bullet}$	$Y_{1\bullet\bullet}$
	B_1	Y_{211}	Y_{212}	...	Y_{21r}	$Y_{21\bullet}$	
A_2	B_2	Y_{221}	Y_{222}	...	Y_{22r}	$Y_{22\bullet}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
	B_b	Y_{2b1}	Y_{2b2}	...	Y_{2br}	$Y_{2b\bullet}$	$Y_{2\bullet\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	B_1	Y_{a11}	Y_{a12}	...	Y_{a1r}	$Y_{a1\bullet}$	
A_a	B_2	Y_{a21}	Y_{a22}	...	Y_{a2r}	$Y_{a2\bullet}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
	B_b	Y_{ab1}	Y_{ab2}	...	Y_{abr}	$Y_{ab\bullet}$	$Y_{a\bullet\bullet}$
مجاميع القطاعات		$Y_{\bullet\bullet 1}$	$Y_{\bullet\bullet 2}$		$Y_{\bullet\bullet r}$	المجموع الكلي $Y_{\bullet\bullet\bullet}$	

وأما مجاميع مستويات العامل الثاني (B)، فيمكن استخلاصها من الجدول أعلاه وتلخيصها في الجدول الآتي:

مجاميع مستويات العامل الثاني (B)	$Y_{\bullet 1\bullet}$	$Y_{\bullet 2\bullet}$	...	$Y_{\bullet b\bullet}$	المجموع الكلي $Y_{\bullet\bullet\bullet}$

النموذج الخطي:

النموذج الخطي لهذه التجربة هو:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \rho_k + \epsilon_{ijk}$$

حيث أن:

1. μ = المتوسط العام؛ وهو قيمة ثابتة ومجهولة.
2. α_i = تأثير العامل الأول.
   وقد تكون ثابتة أو عشوائية، ويعتمد ذلك على نوع التصميم.
3. β_j = تأثير العامل الثاني.
   وقد تكون ثابتة أو عشوائية، ويعتمد ذلك على نوع التصميم.
4. $(\alpha\beta)_{ij}$ = تأثير التداخل أو التفاعل البيني بين العاملين (التأثير المشترك).
   وقد تكون ثابتة أو عشوائية، ويعتمد ذلك على نوع التصميم.
5. ρ_k = تأثير القطاعات.
6. ϵ_{ijk} = الخطأ العشوائي للوحدة التجريبية في القطاع رقم (k) المطبق عليها المعالجة (A_iB_j). ويفترض أن تتوزع الأخطاء العشوائية (ϵ_{ijk}) بشكل مستقل وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (σ_ϵ^2)، أي أن $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$.

يلاحظ أن رمز تاثير التفاعل البيني $(\alpha\beta)_{ij}$ لا يعني بشكل عام المضروب $(\alpha_i \times \beta_j)$.

كما يلاحظ عدم وجود مركبة في النموذج خاصة بالتداخل (التفاعل) البيني بين عامل القطاعات وعاملي المعالجات.

إن أهداف التصميم هي التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي لكل عامل من العاملين على متغير الاستجابة، والتحقق من وجود (أو عدم وجود) تداخل بيني معنوي بين العاملين، وذلك بعد إزالة تأثير عامل القطاعات.

وبشكل أكثر تحديدًا، فإننا نرغب في اختبار الفروض الآتية:

(1) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تداخل بيني معنوي بين العاملين:

$H_o^{AB}: (\alpha\beta)_{ij} = 0$ لجميع القيم

$H_1^{AB}: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ لقيمة واحدة على الأقل

(2) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي للعامل الأول:

$H_o^{A}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$

$H_1^{A}: \alpha_i \neq 0$ لقيمة واحدة على الأقل

(3) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي للعامل الثاني:

$H_o^{B}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$

$H_1^{B}: \beta_j \neq 0$ لقيمة واحدة على الأقل

لاحظ أن:

عدد الوحدات التجريبية (المشاهدات) لكل مستوى من مستويات العامل الأول = br.

عدد الوحدات التجريبية (المشاهدات) لكل مستوى من مستويات العامل الثاني = ar.

عدد الوحدات التجريبية (المشاهدات) لكل قطاع من القطاعات = ab.

العدد الكلي للوحدات التجريبية (للمشاهدات) = $N = abr$.

ويتم حساب وتلخيص المجاميع الواردة في الجدول أعلاه والمتوسطات بالصيغ في الجداول الآتية:

المقدار	المجموع	المتوسط
مجموع ومتوسط المعالجة (A_iB_j)	$Y_{ij\bullet} = \sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{ij\bullet} = \frac{Y_{ij\bullet}}{r}$
مجموع ومتوسط المستوى رقم (i) للعامل الأول	$Y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{b} Y_{ij\bullet} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{Y_{i\bullet\bullet}}{br}$
مجموع ومتوسط المستوى رقم (j) للعامل الثاني	$Y_{\bullet j\bullet} = \sum_{i=1}^{a} Y_{ij\bullet} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{\bullet j\bullet} = \frac{Y_{\bullet j\bullet}}{ar}$
مجموع ومتوسط المستوى رقم (k) لعامل القطاعات	$Y_{\bullet\bullet k} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{\bullet\bullet k} = \frac{Y_{\bullet\bullet k}}{ab}$
المجموع والمتوسط العام (الكلي)	$Y_{\bullet\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{a} Y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{b} Y_{\bullet j\bullet} = \sum_{k=1}^{r} Y_{\bullet\bullet k} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij\bullet} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}}{N} = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}}{abr}$
عدد المشاهدات الكلي	$N = abr$	

تحليل التباين:

الجدول الآتي يلخص مجاميع المربعات ودرجات الحريات المصاحبة لكل منها:

مجموع المربعات	الصيغة الحسابية	درجات الحرية
مجموع المربعات الكلي	$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}^2 - CF$	$df_{Total} = abr - 1$
مجموع مربعات القطاعات	$SS_{Block} = \frac{1}{ab}\sum_{k=1}^{r} Y_{\bullet\bullet k}^2 - CF$	$df_{Block} = r - 1$
مجموع مربعات العامل الأول (A)	$SS_A = \frac{1}{br}\sum_{i=1}^{a} Y_{i\bullet\bullet}^2 - CF$	$df_A = a - 1$
مجموع مربعات العامل الثاني (B)	$SS_B = \frac{1}{br}\sum_{j=1}^{b} Y_{\bullet j\bullet}^2 - CF$	$df_B = b - 1$

$df_{AB} = (a-1)(b-1)$	$SS_{AB} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}} \mathrm{Y}_{\mathrm{ij}\bullet}^{2} - SS_A - SS_B - CF$	مجموع مربعات التداخل البيني بين عاملي المعالجات (A*B)
$df_E = (ab-1)(r-1)$	$SS_E = SS_{Total} - SS_{Block} - SS_A - SS_B - SS_{AB}$	مجموع مربعات الخطأ (E)
	$\mathrm{CF} = \frac{\mathrm{Y}_{\bullet\bullet\bullet}^{2}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{Y}_{\bullet\bullet\bullet}^{2}}{\mathrm{abr}}$	معامل التصحيح

لاحظ أنه يتم تجزيء مجموع المربعات الكلي إلى خمس مركبات، كما يأتي:

$$SS_{Total} = SS_{Block} + SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$

وبالمثل، يتم تجزيء درجات حرية مجموع المربعات الكلي إلى خمس مركبات، كما يأتي:

$$df_{Total} = df_{Block} + df_A + df_B + df_{AB} + df_E$$

والجدول الآتي يلخص طريقة حساب متوسطات المربعات كما يأتي:

الصيغة	متوسط المربعات
$MSA = \frac{SS_A}{a-1}$	متوسط مربعات العامل الأول (A)
$MSB = \frac{SS_B}{b-1}$	متوسط مربعات العامل الثاني (B)
$MSAB = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	متوسط مربعات التداخل البيني (A*B)
$MSE = \frac{SS_E}{(ab-1)(r-1)}$	متوسط مربعات الخطأ (E)
$MSBlock = \frac{SS_{Block}}{r-1}$	متوسط مربعات القطاعات

ثم نقوم بحساب إحصاءات الاختبارات (اختبارات إف)، وتحديد القيم الجدولية، وإجراء الاختبارات.

والجدول الآتي يلخص هذه الاختبارات:

القرار: نرفض H_o إذا كان:	إحصاءة الاختبار	فرضية العدم (H_o)
$F_{AB} > F_\alpha(df_{AB}, df_E)$	$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$	$H_o^{AB}: (\alpha\beta)_{ij} = 0$ لجميع القيم $\Leftrightarrow H_o^{AB}:$ لا يوجد تداخل بيني
إذا لم يتم رفض فرضية العدم السابقة (H_o^{AB})، أي إذا لم يكن هناك تفاعل بيني معنوي بين العاملين، نقوم بإجراء الاختبارين الآتيين:		
$F_A > F_\alpha(df_A, df_E)$	$F_A = \frac{MSA}{MSE}$	$H_o^A: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$ $\Leftrightarrow H_o^A:$ لا يوجد تأثيرمعنوي للعامل الأول
$F_B > F_\alpha(df_B, df_E)$	$F_B = \frac{MSB}{MSE}$	$H_o^B: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$ $\Leftrightarrow H_o^B:$ لا يوجد تأثيرمعنوي للعامل الثاني

جدول تحليل التباين:

يتم تلخيص الحسابات السابقة في جدول تحليل التباين كما يأتي:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio	القيمة الجدولية
القطاعات Blocks	SS_{Blocks}	$r-1$	$MSBlock$		
A	SS_A	$a-1$	MSA	$F_A=\frac{MSA}{MSE}$	$F_\alpha(df_A,df_E)$
B	SS_B	$b-1$	MSB	$F_B=\frac{MSB}{MSE}$	$F_\alpha(df_B,df_E)$
A*B	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	$MSAB$	$F_{AB}=\frac{MSAB}{MSE}$	$F_\alpha(df_{AB},df_E)$
الخطأ التجريبي Error	SS_E	$(ab-1)(r-1)$	MSE		
المجموع (Total)	SS_{Total}	$abr-1$			

مثال:

أُجريت تجربة عاملية (3×2) في أربع قطاعات وذلك لاختبار تأثيرعاملين على كمية محصول نوع من أنواع البطاطس. والعاملان هما: العامل الأول (A) عبارة عن الفترة الزمنية بين وقت الزراعة ووقت رش مجفف خضري (بالأيام)، وله مستويان ($A_1=80$ و $A_2=95$)، والعامل الثاني (B) عبارة عن تركيز المجفف الخضري وله ثلاث مستويات ($B_1=1$ و $B_2=3$ و $B_3=5$). وأما القطاعات الأربعة فهي أربعة حقول زراعية.

والجدول الآتي يلخص بيانات التجربة مع بعض الحسابات:

مستويات العامل الأول (A)	مستويات العامل الثاني (B)	القطاعات (Blocks)				$Y_{ij\bullet}$	$Y_{i\bullet\bullet}$
		Blk (1)	Blk (2)	Blk (3)	Blk (4)		
A_1	B_1	24.10	23.66	22.05	22.20	$Y_{11\bullet}$=92.01	$Y_{1\bullet\bullet}$ 246.53
	B_2	19.30	18.14	18.70	20.05	$Y_{12\bullet}$=76.19	
	B_3	19.34	18.89	20.18	19.92	$Y_{13\bullet}$=78.33	
	B_1	29.30	30.69	25.00	26.63	$Y_{21\bullet}$=111.62	$Y_{2\bullet\bullet}$

A_2	B_2	20.42	22.25	18.77	19.25	$Y_{22\bullet}$=80.69	276.09
	B_3	21.98	22.40	20.20	19.20	$Y_{23\bullet}$=83.78	
مجاميع القطاعات		$Y_{\bullet\bullet 1}$ 134.44	$Y_{\bullet\bullet 2}$ 136.03	$Y_{\bullet\bullet 3}$ 124.90	$Y_{\bullet\bullet 4}$ 127.25	$Y_{\bullet\bullet\bullet}$ 522.62	

وأما مجاميع مستويات العامل الثاني (B) فيمكن تلخيصها كما يأتي:

مجاميع مستويات العامل الثاني (B)	$Y_{\bullet 1\bullet}$=203.63	$Y_{\bullet 2\bullet}$=156.88	$Y_{\bullet 3\bullet}$=162.11

ويرغب الباحث في التحقق مما يأتي (عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$):

- هل يوجد تفاعل بيني بين العاملين؟ وبمعنى آخر، هل علاقة أحد العاملين بكمية المحصول تعتمد على مستويات العامل الآخر؟
- هل هناك تاثير معنوي للعامل الأول (التوقيت) على كمية المحصول، أي هل يوجد فروق معنوية بين مستويات العامل الأول؟
- هل هناك تاثير معنوي للعامل الثاني (التركيز) على كمية المحصول، أي هل يوجد فروق معنوية بين مستويات العامل الثاني؟

الحسابات:

$a = 2\ ,\ b = 3\ ,\ r = 4$

$N = abr = 2 \times 3 \times 4 = 24$

$\mathrm{CF} = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}{}^2}{N} = \frac{522.62^2}{24} = 11380.49$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}^2 = 24.10^2 + 23.66^2 + \cdots + 19.20^2 = 11638.79$	مجموع مربعات جميع المشاهدات
$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij\bullet}^2 = 92.01^2 + 76.19^2 + \cdots + 83.78^2 = 46395.33$	مجموع مربعات مجاميع الخلايا (A_iB_j)
$\sum_{i=1}^{a} Y_{i\bullet\bullet}^2 = 246.53^2 + 276.09^2 = 137002.7$	مجموع مربعات مجاميع مستويات العامل الأول
$\sum_{j=1}^{b} Y_{\bullet j\bullet}^2 = 203.63^2 + 156.88^2 + 162.11^2 = 92356.16$	مجموع مربعات مجاميع مستويات العامل الثاني
$\sum_{k=1}^{r} Y_{\bullet\bullet k}^2 = 134.44^2 + 136.03^2 + 124.90^2 + 127.25^2 = 68370.847$	مجموع مربعات مجاميع مستويات عامل القطاعات

$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}} \mathrm{Y}_{\mathrm{ijk}}^{2} - \mathrm{CF} = 11638.79 - 11380.49 = 258.3$

$df_{Total} = N - 1 = 24 - 1 = 23$

$SS_A = \frac{1}{\mathrm{br}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}} \mathrm{Y}_{i\bullet\bullet}^{2} - \mathrm{CF} = \frac{1}{3\times4}(137002.7) - 11380.49 = 11416.892 - 11380.49 = 36.402$

$df_A = a - 1 = 2 - 1 = 1$

$MSA = \frac{SS_A}{a-1} = \frac{36.402}{1} = 36.402$

$SS_B = \frac{1}{\mathrm{ar}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}} \mathrm{Y}_{\bullet j\bullet}^{2} - \mathrm{CF} = \frac{1}{2\times4}(92356.16) - 11380.49 = 11544.52 - 11380.49 = 164.03$

$df_B = b - 1 = 3 - 1 = 2$

$MSB = \frac{SS_B}{b-1} = \frac{164.03}{2} = 82.015$

$SS_{AB} = \frac{1}{\mathrm{r}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}} \mathrm{Y}_{\mathrm{ij}\bullet}^{2} - SS_A - SS_B - \mathrm{CF} = \frac{1}{4}(46395.33) - 36.402 - 164.03 - 11380.49 = 11598.8325 - 36.402 - 164.03 - 11380.49 = 17.9105$

$df_{AB} = (a-1)(b-1) = 1 \times 2 = 2$

$MSAB = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)} = \frac{17.9105}{2} = 8.9553$

$SS_{Block} = \frac{1}{ab}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}} \mathrm{Y}_{\bullet\bullet\mathrm{k}}^{2} - CF = \frac{1}{2\times3}(68370.847\ ) - 11380.49 = 11395.1412 - 11380.49 = 14.6512$

$df_{Block} = r - 1 = 4 - 1 = 3$

$MSBlock = \frac{SS_{Block}}{r-1} = \frac{14.6512}{3} = 4.8837$

$SS_E = SS_{Total} - SS_{Block} - SS_A - SS_B - SS_{AB} = 258.3 - 14.6512 - 36.402 - 164.03 - 17.9105 = 25.3063$

$df_E = (ab-1)(r-1) = (2\times3-1)(4-1) = 5\times3 = 15$

$MSE = \frac{SS_E}{(ab-1)(r-1)} = \frac{25.3063}{15} = 1.68709$

قيم إحصاءات الاختبارات:

$$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{8.9553}{1.68709} = 5.308$$

$$F_A = \frac{MSA}{MSE} = \frac{36.402}{1.68709} = 21.577$$

$$F_B = \frac{MSB}{MSE} = \frac{82.015}{1.68709} = 48.613$$

القيم الجدولية:

$$F_\alpha(df_{AB}, df_E) = F_{0.05}(2, 15) = 3.68$$

$$F_\alpha(df_A, df_E) = F_{0.05}(1, 15) = 4.54$$

$$F_\alpha(df_B, df_E) = F_{0.05}(2, 15) = 3.68$$

جدول تحليل التباين:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio	القيم الجدولية
القطاع	14.6512	3	4.8837		
العامل الأول (A)	36.402	1	36.402	21.577	4.54
العامل الثاني (B)	164.03	2	82.015	48.613	3.68
A*B	17.9105	2	8.9553	5.308	3.68
الخطأ (Error)	25.3063	15	1.68709		
المجموع (Total)	258.3	23			

القرار:

نظرًا لأن $F_{AB} > F_\alpha(df_{AB}, df_E)$ ، فإننا نرفض فرض العدم القائل بعدم وجود تفاعل بيني بين العاملين (توقيت الرش وتركيز المجفف)، ونستنتج أن هناك تداخل بيني بينهما، أي أن علاقة أحد العاملين بمتغير الاستجابة (كمية المحصول) تتأثر بمستويات العامل الآخر. ولذلك، فإن تركيزنا الآن سيكون على التداخل البيني بين توقيت الرش وتركيز المجفف وعلى التأثيرات البسيطة لهما، وليس على التأثيرات الرئيسية للعاملين.

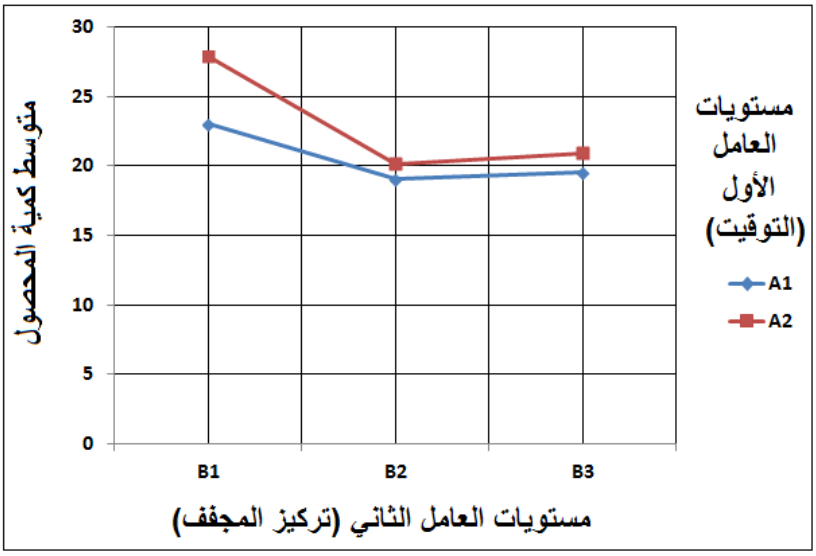
فعلى سبيل المثال، العلاقة بين توقيت الرش وكمية المحصول تعتمد على تركيز المجفف. وكذلك العكس، فإن العلاقة بين تركيز المجفف وكمية المحصول تعتمد على توقيت الرش.

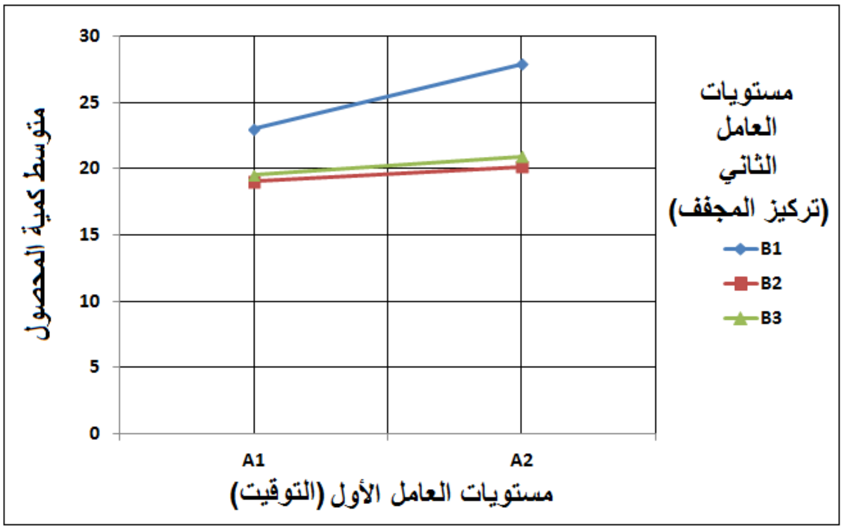
والجدول الآتي يحتوي على متوسطات المعالجات (A_iB_j):

$\bar{Y}_{ij\bullet}=\frac{Y_{ij\bullet}}{r}=\frac{Y_{ij\bullet}}{4}$		مستويات العامل الثاني (B)		
		B_1	B_2	B_3
مستويات العامل الأول (A)	A_1	23.0025	19.0475	19.5825
	A_2	27.905	20.1725	20.945

والشكلان الآتيان عبارة عن تمثيل بياني للجدول السابق:

في الشكل الأول تم رسم (متوسط كمية المحصول) مقابل (تركيز المجفف) لكل مستوى من مستويات (توقيت الرش). وفي الشكل الثاني تم رسم (متوسط كمية المحصول) مقابل (توقيت الرش) لكل مستوى من مستويات (تركيز المجفف).





من الجدول والشكلين أعلاه ، نجد أن أكبر كمية للمحصول تكون عند استخدام المعالجة (A_2B_1)، أي عند تطبيق المستوى الثاني لعامل التوقيت (بعد 95 يومًا) وتطبيق المستوى الأول الأول لعامل التركيز (1).