تصميم التجارب

Design of Experiments

الجزء العاشر

تصميم القطع المنشقة

(القطع المنشطرة)

Split-plot Design

مقدمة:

تعتبر تصاميم القطع المنشقة (أو القطع المنشطرة أو الوحدات المنشطرة) من التصاميم ذات العوامل المتعددة المهمة وشائعة الاستخدام في كثيرمن التطبيقات. ويكثر استخدامها في بعض التجارب التي تتصف، على سبيل المثال، بما يأتي:

1. التجارب التي يتطلب فيها أحد العوامل وحدات تجريبية كبيرة (عامل يصعب تغيير مستوياته بسهولة عند تنفيذ التجربة)، بينما يمكن تطبيق العامل الآخر على وحدات تجريبية صغيرة (عامل يسهل تغيير مستوياته عند تنفيذ التجربة).
2. التجارب التي تتطلب قياس مستويات أحد العوامل بدقة أكثر من غيره.
3. التجارب التي يتم فيها تنفيذ تجربة جديدة بإدخالها على تجربة قائمة.
4. التجارب التي يصعب فيها تطبيق العوامل معًا في نفس الوقت.

وتتألف الوحدات التجريبية في تصميم القطع المنشقة ذات العاملين من نوعين؛ هما:

النوع الأول هو الوحدات التجريبة الرئيسية، وتسمى بالقطع الكاملة (Whole Plots) ويطبق عليها العامل الأول ويسمى بعامل القطع الكاملة (Whole Plots Factor). وفي الغالب تتطلب عملية تطبيق مستويات العامل الأول (عامل القطع الكاملة) وحدات تجريبية كبيرة بسبب الصعوبة في تطبيقها على حدات صغيرة.

وأما النوع الثاني فهو الوحدات التجريبة الجزئية، وتسمى بالقطع المنشقة أو المنشطرة (Sub Plots) أو (Spilt Plots) ويطبق عليها العامل الثاني ويسمى عامل القطع المنشقة (Split Plots Factor) أو (Sub Plots Factor). وفي الغالب يكون من السهل تطبيق مستويات العامل الثاني (عامل القطع المنشقة) على وحدات تجريبية صغيرة، وتحضى قياسات هذا العامل بدقة أكثر من العامل الأول (عامل القطع الرئيسئة).

وفي هذا تصميم القطع المنشقة، يتم تطبيق مستويات العامل الأول على القطع الكاملة بشكل عشوائي، ثم يتم تجزيئ (شق أو شطر) كل قطعة كاملة (الوحدات التجريبية الرئيسية) إلى أجزاء تمثل القطع المنشقة (الوحدات التجريبية الجزئية) ومن ثم يتم تطبيق مستويات العامل الثاني

بشكل عشوائي على القطع المنشقة داخل كل قطعة كاملة. لذا، فإن القطع الكاملة (Whole Plots) تعمل عمل القطاعات (Blocks) لعامل القطع المنشقة. ولذلك، فإن هذا التصميم يعتبر حالة خاصة من تصميم القطاعات العشوائية؛ حيث يكون هناك تقييد على العملية العشوائية في التصميم.

أمثلة:

1. في التجارب الحقلية قد يكون العامل الأول هو طريقة حرث الأرض والعامل الثاني هو نوع البذور. فمن الأفضل عمليًا تطبيق مستويات العامل الأول في وحدات تجريبية كبيرة (حرث حقول زراعية كبيرة باستخدام الجرارات)، وتطبيق مستويات العامل الثاني (نوع البذور) في وحدات تجريبية أصغر (قطع زراعية داخل الحقول).
2. في التجارب الصناعات الغذائية، قد يكون العامل الأول هو طريقة تحضير الآيسكريم والعامل الثاني هو درجة حرارة التخزين. فمن الأفضل عمليًا تجهيز خلطات كبيرة من الآيسكريم (قطع كاملة) باستخدام طرق التحضيرالمختلفة (العامل الأول)، ثم يتم تقسيم كل خلطة (القطعة لكاملة) إلى أجزاء (قطع منشقة) ويخزن كل جزء تحت حرارة مختلفة بشكل عشوائي.

تصميم القطع المنشقة في تصميم القطاعات العشوائية لكاملة

للتعرف على هذا التصميم، لنفرض أن التجربة تتضمن عاملين (A و B)، ونرغب في دراسة التأثيرات الرئيسية والتأثيرات المشتركة للعاملين على متغير الاستجابة. ولنفرض أن عدد مستويات العامل الأول هو ($a = 3$) ومستوياته هي ($A_1,\ A_2,\ A_3$). ولنفرض أن عدد مستويات العامل الثاني هو ($b = 4$) ومستوياته هي ($B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$). ولنفرض أن التجربة سوف تنفذ باستخدام أربع قطاعات (تكرارات).

وسنفرض إحدى الحالات الآتية:

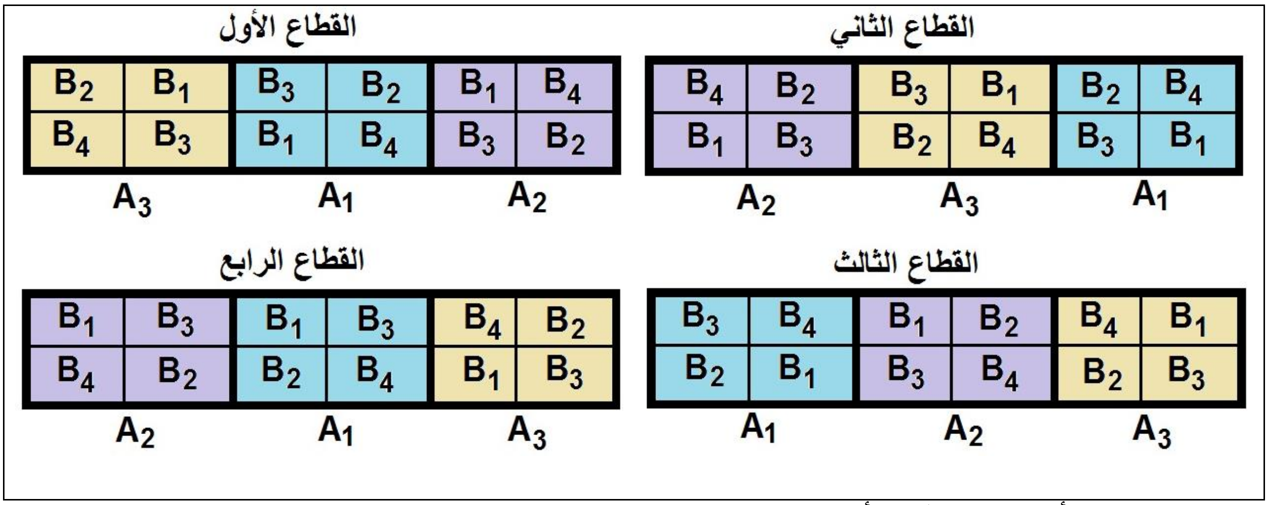
- صعوبة تطبيق مستويات العامل الأول (A) على وحدات تجريبية صغيرة (أي، يتطلب تطبيق مستويات العامل الأول وحدات تجريبية كبيرة).
- الرغبة في قياس الاختلافات في مستويات العامل الثاني (B) بدقة أكبر.
- يكون هناك تجربة قائمة لدراسة تأثير العامل الأول (A) على متغير الاستجابة، ثم يتم إدخال العامل الثاني (B) على التجربة لدراسة تأثيره على متغير الاستجابة.
- صعوبة تنفيذ التجربة بتطبيق العاملين معًا في نفس الوقت (تطبيق العامل الأول يسبق تطبيق العامل الثاني).

وطرقة تنفيذ التجربة كما يأتي:

يتم تقسيم كل قطاع إلى ثلاثة أجزاء بعدد مستويات العامل الأول (هذه الأجزاء هي الوحدات التجريبية الرئيسية / القطع الكاملة)، ثم يتم تطبيق جميع مستويات العامل الأول عشوائيًا داخل كل قطاع. بعد ذلك، يتم تقسيم كل قطعة كاملة إلى أربعة أجزاء بعدد مستويات العامل الثاني (هذه

الأجزاء هي الوحدات التجريبية الجزئية / القطع المنشطرة)، ثم يتم تطبيق جميع مستويات العامل الثاني عشوائيًا على القطع المنشطرة داخل كل قطعة كاملة.

والشكل الآتي يوضح معالم تصميم القطع المنشطرة لعاملين في أربعة قطاعات:



من الشكل أعلاه يلاحظ ما يأتي:

- هناك أربعة قطاعات.
- كل قطاع مقسم إلى ثلاثة قطع كاملة (وحدات تجريبية رئيسية) بعدد مستويات العامل الأول.
- مستويات العامل الأول موزعة عشوائيًا بداخل كل قطاع (Block) على الوحدات التجريبية الرئيسية (القطع الكاملة) (Whole Plot).
- كل وحدة تجريبية كاملة (قطعة كاملة) (Whole Plot) تم شقها (شطرها) إلى أربع وحدات تجريبية جزئية (قطع منشقة / قطع منشطرة) (Sub Plot / Split Plot) بعدد مستويات العامل الثاني. ثم تم توزيع مستويات العامل الثاني عشوائيًا على القطع المنشطرة بداخل كل قطعة كاملة. ومن هنا يلاحظ أن القطع الكاملة بمثابة قطاعات (Blocks) لمستويات العامل الثاني.
- العامل الأول هو عامل القطع الكاملة والعامل الثاني هو عامل القطع المنشقة.
- العامل الثاني (عامل القطع المنشقة) سيقاس بدقة أكبر من قياس العامل الأول (عامل القطع الكاملة).

ملاحظة:

في تصميم القطع المنشقة، وبشكل عام، هناك مرحلتين (أو تجربتين). في المرحلة الأولى، يتم توزيع مستويات العامل الأول على القطع الكاملة (الوحدات التجريبية الرئيسية) وفق أي من التصاميم الأساسية التي درسناها (التصميم تام العشوائية، أو تصميم القطاعات العشوائية الكاملة، أو تصميم المربع اللاتيني، أو غيرها من التصاميم). وفي المرحلة الثانية، يتم توزيع مستويات العامل الثاني على القطع المنشقة (الوحدات التجريبية الجزئية) بشكل عشوائي داخل كل قطعة كاملة.

ويتضح من هذه الطريقة أن هناك نوعان من الوحدات التجريبية، مما ينتج عنهما نوعان من الأخطاء التجريبية؛ هما: الخطأ التجريبي للقطع الكاملة (الوحدات التجريبية الرئيسية)، والخطأ التجريبي للقطع المنشقة (الوحدات التجريبية الجزئية). وفي الغالب يكون الخطا التجريبي للقطع المنشقة أقل من الخطأ التجريبي للقطع الكاملة؛ لسببين هما:

- تجانس (تشابه) القطع المنشقة يكون في الغالب أكثر من تجانس القطع الكاملة.
- عدد تكرارات القطع المنشقة أكبر من عدد تكرارات القطع الكاملة.

النموذج الخطي:

لنفرض أن القيمة (Y_{ijk}) هي مشاهدة الوحدة في القطاع رقم (i) المطبق عليها المستوى رقم (j) للعامل الأول (A) والمستوى رقم (k) للعامل الثاني (B)؛ حيث أن:

$$i = 1, 2, \dots, r$$
$$j = 1, 2, \dots, a$$
$$k = 1, 2, \dots, b$$

$r =$ عدد القطاعات

$a =$ عد مستويات العامل الأول

$b =$ عد مستويات العامل الثاني

والنموذج الخطي الآتي يفترض وجود تداخل بيني بين عامل القطاعات والعامل الأول، مع عدم وجود تداخل بيني بين عامل القطاعات والعامل الثاني:

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \gamma_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \epsilon_{ijk}$$

حيث أن:

1. μ = المتوسط العام؛ وهو قيمة ثابتة ومجهولة.
2. ρ_i = تأثيرالقطاعات.
3. α_j = تأثير العامل الأول.
4. γ_{ij} = الخطأ العشوائي للوحدات التجريبية الرئيسية (القطع الكاملة)، ويفترض أن يكون $\gamma_{ij} \sim \mathrm{N}(0\,, \sigma_\gamma^2)$.
ملاحظة: يمكن إعادة كتابة رمز الخطأ العشوائي للوحدات التجريبية الرئيسية باعتبارة التداخل البيني بين عامل القطاعات والعامل الأول كما يأتي: $\gamma_{ij} = (\rho\alpha)_{ij}$.
5. β_k = تأثير العامل الثاني.
6. $(\alpha\beta)_{jk}$ = تأثير التداخل البيني بين العاملين الأول والثاني.
7. ϵ_{ijk} = الخطأ العشوائي للوحدات التجريبية الجزئية (القطع المنشقة)، ويفترض أن يكون $\epsilon_{ijk} \sim \mathrm{N}(0\,, \sigma_\epsilon^2)$.

إن أهداف التصميم هي التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي لكل عامل من العاملين على متغير الاستجابة، والتحقق من وجود (أو عدم وجود) تداخل بيني معنوي بين العاملين، وكذلك التعرف على مستويات العاملين التي تحقق أعلى (أو قل) قيم لمتغير الاستجابة.

وبشكل أكثر تحديدًا، فإننا نرغب في اختبار الفروض الآتية:

(1) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تداخل بيني معنوي بين العاملين:

$H_o^{AB}: (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لجميع القيم
$H_1^{AB}: (\alpha\beta)_{jk} \neq 0$ لقيمة واحدة على الأقل

(2) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي للعامل الأول:

$H_o^{A}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$
$H_1^{A}: \alpha_j \neq 0$ لقيمة واحدة على الأقل

(3) التحقق من وجود (أو عدم وجود) تأثير معنوي للعامل الثاني:

$H_o^{B}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$
$H_1^{B}: \beta_k \neq 0$ لقيمة واحدة على الأقل

الشكل العام للبيانات:

يمكن ترتيب البيانات في جدول مشابه لحالة التجارب العاملية ذات عاملين التي مرت معنا سابقًا، كما يأتي:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="9">القطاع</td><td rowspan="3">مجاميع مستويات العامل الثاني $Y_{\bullet\bullet k}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Block 1</td><td>…</td><td colspan="4">Block r</td></tr>
<tr><td colspan="2">العامل الأول (A)</td><td>A_1</td><td>A_2</td><td>…</td><td>A_a</td><td>…</td><td>A_1</td><td>A_2</td><td>…</td><td>A_a</td></tr>
<tr><td rowspan="4">العامل الثاني (B)</td><td>B_1</td><td>Y_{111}</td><td>Y_{121}</td><td>…</td><td>Y_{1a1}</td><td>…</td><td>Y_{r11}</td><td>Y_{r21}</td><td>…</td><td>Y_{ra1}</td><td>$Y_{\bullet\bullet 1}$</td></tr>
<tr><td>B_2</td><td>Y_{112}</td><td>Y_{122}</td><td>…</td><td>Y_{1a2}</td><td>…</td><td>Y_{r12}</td><td>Y_{r22}</td><td>…</td><td>Y_{ra2}</td><td>$Y_{\bullet\bullet 2}$</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>B_b</td><td>Y_{11b}</td><td>Y_{12b}</td><td>…</td><td>Y_{1ab}</td><td>…</td><td>Y_{r1b}</td><td>Y_{r2b}</td><td>…</td><td>Y_{rab}</td><td>$Y_{\bullet\bullet b}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">مجاميع خلايا القطاعات مع العامل الأول $Y_{ij\bullet}$</td><td>$Y_{11\bullet}$</td><td>$Y_{12\bullet}$</td><td>…</td><td>$Y_{1a\bullet}$</td><td>…</td><td>$Y_{r1\bullet}$</td><td>$Y_{r2\bullet}$</td><td>…</td><td>$Y_{ra\bullet}$</td><td rowspan="2">المجموع الكلي $Y_{\bullet\bullet\bullet}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">مجاميع القطاعات $Y_{i\bullet\bullet}$</td><td colspan="4">$Y_{1\bullet\bullet}$</td><td>…</td><td colspan="4">$Y_{r\bullet\bullet}$</td></tr>
</table>

وأما المجاميع غير الظاهرة في الجدول أعلاه التي نرغب بحسابها، فهي مجاميع خلايا العامل الأول مع العامل الثاني ($Y_{\bullet jk}$)، ومجاميع مستويات العامل الأول ($Y_{\bullet j \bullet}$). ويمكن تلخيصها في الجدول الآتي:

مجاميع خلايا العامل الأول مع العامل الثاني ($Y_{\bullet jk}$)		العامل الأول (A)			
		A_1	A_2	…	A_a
العامل الثاني (B)	B_1	$Y_{\bullet 11}$	$Y_{\bullet 21}$	…	$Y_{\bullet a1}$
	B_2	$Y_{\bullet 12}$	$Y_{\bullet 22}$	…	$Y_{\bullet a2}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	B_b	$Y_{\bullet 1b}$	$Y_{\bullet 2b}$	…	$Y_{\bullet ab}$
مجاميع مستويات العامل الأول ($Y_{\bullet j \bullet}$)		$Y_{\bullet 1 \bullet}$	$Y_{\bullet 2 \bullet}$	…	$Y_{\bullet a \bullet}$

لاحظ أن:

عدد الوحدات التجريبية الرئيسية (القطع الكاملة) لكل مستوى من مستويات العامل الأول = r، وأما عدد مشاهداته فيساوي = br.

عدد الوحدات التجريبية الجزئية (القطع المنشقة) لكل مستوى من مستويات العامل الثاني = عدد مشاهداته = ra.

العدد الكلي للمشاهدات = $N = rab$.

ويتم حساب وتلخيص المجاميع الواردة في الجداول أعلاه بالصيغ في الجدول الآتي:

المقدار	المجموع
مجاميع خلايا القطاعات مع العامل الأول	$Y_{ij\bullet} = \sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}$
مجاميع خلايا العامل الأول مع العامل الثاني	$Y_{\bullet jk} = \sum_{i=1}^{r} Y_{ijk}$
مجاميع مستويات عامل القطاعات	$Y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{a} Y_{ij\bullet} = \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}$
مجاميع مستويات العامل الأول	$Y_{\bullet j\bullet} = \sum_{k=1}^{b} Y_{\bullet jk} = \sum_{i=1}^{r} Y_{ij\bullet} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}$
مجاميع مستويات العامل الثاني	$Y_{\bullet\bullet k} = \sum_{j=1}^{a} Y_{\bullet jk} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a} Y_{ijk}$
المجموع العام (الكلي)	$Y_{\bullet\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{r} Y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{a} Y_{\bullet j\bullet} = \sum_{k=1}^{b} Y_{\bullet\bullet k} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}$
عدد المشاهدات الكلي	$N = rab$

تحليل التباين:

بشكل مشابه لحالة التجارب العاملية ذات عاملين التي مرت معنا، نقوم بحساب مجاميع المربعات. فنحسب أولاً مجموع المربعات الكلي كما يأتي:

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

وبعدد درجات حرية مقدارها:

$$df_{Total} = N - 1 = rab - 1$$

ثم وبشكل مشابه لما مر معنا سابقًا، نقوم بتجزيء مجموع المربعات الكلي ودرجات الحرية الكلية وفقًا لمصادر الاختلاف كما يأتي:

أولاً: مجاميع المربعات للقطع الكاملة:

SS_{Block} = مجموع مربعات القطاعات

بدرجات حرية مقدارها ($df_{Block} = r - 1$)

SS_A = مجموع مربعات العامل الأول

بدرجات حرية مقدارها ($df_A = a - 1$)

$SS_{E(A)}$ = مجموع مربعات الخطأ التجريبي للقطع الكاملة ($SS_{E(A)} = SS_{Block*A}$)

بدرجات حرية مقدارها $df_{E(A)} = (r - 1)(a - 1)$

ثانيًا: مجاميع المربعات للقطع المنشقة:

SS_B = مجموع مربعات العامل الثاني

بدرجات حرية مقدارها ($df_B = b - 1$)

SS_{AB} = مجموع مربعات التداخل البيني بين العامل الأول والعامل الثاني

بدرجات حرية مقدارها ($df_{AB} = (a - 1)(b - 1)$)

$SS_{E(B)}$ = مجموع مربعات الخطأ التجريبي للقطع المنشقة

بدرجات حرية مقدارها ($df_{E(B)} = a(r - 1)(b - 1)$)

أي أن:

$$SS_{Total} = SS_{Block} + SS_A + SS_{E(A)} + SS_B + SS_{AB} + SS_{E(B)}$$

وبالمثل، يتم تجزيء درجات حرية مجموع المربعات الكلي كما يأتي:

$$df_{Total} = df_{Block} + df_A + df_{E(A)} + df_B + df_{AB} + df_{E(B)}$$

والجدول الآتي يوضح الصيغ الحسابية لمجاميع المربعات:

مجموع المربعات	الصيغة الحسابية
SS_{Block}	$\frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{r} Y_{i\bullet\bullet}^2 - CF$
SS_A	$\frac{1}{rb}\sum_{i=1}^{a} Y_{\bullet j\bullet}^2 - CF$
$SS_{E(A)}$	$\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a} Y_{ij\bullet}^2 - SS_{Block} - SS_A - CF$
SS_B	$\frac{1}{ra}\sum_{j=1}^{b} Y_{\bullet\bullet k}^2 - CF$
SS_{AB}	$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} Y_{\bullet jk}^2 - SS_A - SS_B - CF$
$SS_{E(B)}$	$SS_{Total} - SS_{Block} - SS_A - SS_{E(A)} - SS_B - SS_{AB} - SS_{E(B)}$
SS_{Total}	$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}^2 - CF$
CF	$\frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{rab}$

ثم نقوم بحساب متوسطات المربعات كما يأتي:

مجموع المربعات	الصيغة الحسابية
متوسط مربعات القطاعات	$MS_{Block} = \frac{SS_{Block}}{r-1}$
متوسط مربعات العامل الأول	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$
متوسط مربعات الخطأ الأول	$MS_{E(A)} = \frac{SS_{E(A)}}{(r-1)(a-1)}$
متوسط مربعات العامل الثاني	$MS_B = \frac{SS_B}{b-1}$
متوسط مربعات التداخل بين العاملين الأول والثاني	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$
متوسط مربعات الخطأ الثاني	$MS_{E(B)} = \frac{SS_{E(B)}}{a(r-1)(b-1)}$

ثم نقوم بحساب إحصاءات الاختبارات (اختبارات إف)، وتحديد القيم الجدولية، وإجراء الاختبارات. والجدول الآتي يلخص هذه الاختبارات:

فرضية العدم (H_o)	إحصاءة الاختبار	القرار: نرفض H_o إذا كان:
$H_o^{AB}: (\alpha\beta)_{ij} = 0$ لجميع القيم $\Leftrightarrow H_o^{AB}$: لا يوجد تداخل بيني	$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_{E(B)}}$	$F_{AB} > F_\alpha(df_{AB}, df_{E(B)})$
إذا لم يتم رفض فرضية العدم السابقة (H_o^{AB})، أي إذا لم يكن هناك تفاعل بيني معنوي بين العاملين، نقوم بإجراء الاختبارين الآتيين:		

$F_A > F_\alpha(df_A, df_{E(A)})$	$F_A = \frac{MS_A}{MS_{E(A)}}$	$H_o^A: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$ لا يوجد تأثيرمعنوي للعامل الأول : $\Leftrightarrow H_o^A$
$F_B > F_\alpha(df_B, df_{E(B)})$	$F_B = \frac{MS_B}{MS_{E(B)}}$	$H_o^B: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$ لا يوجد تأثيرمعنوي للعامل الثاني : $\Leftrightarrow H_o^B$

جدول تحليل التباين:

يمكن تلخيص الحسابات السابقة في جدول تحليل التباين كما يأتي:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio
القطاعات Blocks	SS_{Block}	r-1	MS_{Block}	
العامل الأول (A)	SS_A	a-1	MS_A	$F_A = \frac{MS_A}{MS_{E(A)}}$
الخطأ الأول Error(A)	$SS_{E(A)}$	(r-1)(a-1)	$MS_{E(A)}$	
العامل الثاني (B)	SS_B	b-1	MS_B	$F_B = \frac{MS_B}{MS_{E(B)}}$
التداخل (AB)	SS_{AB}	(a-1)(b-1)	MS_{AB}	$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_{E(B)}}$
الخطأ الثاني Error(B)	$SS_{E(B)}$	r(a-1)(b-1)	$MS_{E(B)}$	
المجموع (Total)	SS_{Total}	rab-1		

ملاحظة:

من المتوقع أن يكون $MS_{E(A)} > MS_{E(B)}$.

وفي حالة عدم تحقق ذلك بسبب أخطاء المعاينة، فإننا نستخدم التقدير التجميعي الآتي لتقدير التباين (σ_ϵ^2):

$$MSE_p = \frac{df_{E(A)} \times MS_{E(A)} + df_{E(B)} \times MS_{E(B)}}{df_{E(A)} + df_{E(B)}}$$

وبدرجات حرية مقدارها:

$$df_{E_p} = df_{E(A)} + df_{E(B)}$$

وفي هذه الحالة، نستخدم (MSE_p) بدلاً من $(MS_{E(A)})$ و $(MS_{E(B)})$ في اختبارات إف المشار إليها سابقًا.

مثال:

أجريت تجربة في مصنع للورق لاختبار تأثير طريقة إعداد العجينة الورقية ودرجة الحرارة على قوة شد الورق. وقد تم استخدام ثلاث طرق لتحضير العجينة الورقية وأربع مستويات للحرارة (100, 110, 120, 130) عند طبخ العجينة. وقد تم استخدام تصميم القطع المنشقة وباستخدام الأيام كقطاعات. وقد كانت الوحدات الكاملة هي ثلاث كميات من العجينة المعدة بالطرق المختلفة، ثم قسمت كل كمية إلى أربعة أجزاء (القطع المنشقة) ليطبخ كل جزء تحت درجة حرارة معينة. والجدول الآتي يحتوي على بيانات الدراسة.

مجاميع مستويات درجة الحرارة $Y_{\bullet\bullet k}$	القطاعات (الأيام)										
	3			2			1				
	3	2	1	3	2	1	3	2	1	طريقة التحضير	
281	32	35	31	31	31	28	29	34	30	100	درجة الحرارة
311	34	40	37	30	36	32	26	41	35	110	
341	39	39	41	32	42	40	33	38	37	120	
364	45	44	40	40	40	41	36	42	36	130	
المجموع الكلي $Y_{\bullet\bullet\bullet}$ 1297	150	158	149	133	149	141	124	155	138	مجاميع خلايا القطاعات ودرجة الحرارة $Y_{ij\bullet}$	
	457			423			417			مجاميع القطاعات $Y_{i\bullet\bullet}$	

وأما مجاميع الخلايا $(Y_{\bullet jk})$، خلايا العامل الأول (طريقة التحضير) مع العامل الثاني (درجة الحرارة)، ومجاميع مستويات العامل الأول $(Y_{\bullet j\bullet})$ فيمكن تلخيصها في الجدول الآتي:

مجاميع خلايا العامل الأول مع العامل الثاني $(Y_{\bullet jk})$		العامل الأول- طريقة التحضير (A)		
		1	2	3
العامل الثاني درجة الحرارة (B)	100	89	100	92
	110	104	117	90
	120	118	119	104
	130	117	126	121
مجاميع مستويات العامل الأول $(Y_{\bullet j \bullet})$		428	462	407

الحسابات:

$r = 3,\ \ a = 3,\ \ b = 4,\ \ N = rab = 36$

$CF = \frac{\mathrm{Y}^2_{\bullet\bullet\bullet}}{\mathrm{rab}} = \frac{1297^2}{36} = 46728.0278$

$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}^2_{\mathrm{ijk}} - \mathrm{CF} = (30^2 + \cdots + 45^2) - 46728.0278 = 822.9722$

$SS_{Block} = \frac{1}{\mathrm{ab}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{r}}\mathrm{Y}^2_{i\bullet\bullet} - \mathrm{CF} = \frac{1}{12}(417^2 + 423^2 + 457^2) - 46728.0278 = 77.5556$

$SS_A = \frac{1}{\mathrm{rb}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{a}}\mathrm{Y}^2_{\bullet j\bullet} - \mathrm{CF} = \frac{1}{12}(428^2 + 462^2 + 407^2) - 46728.0278 = 128.3889$

$SS_{E(A)} = \frac{1}{\mathrm{b}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{r}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{a}}\mathrm{Y}^2_{\mathrm{ij}\bullet} - SS_{Block} - SS_A - \mathrm{CF} = \frac{1}{4}(138^2 + 155^2 + 124^2 + 141^2 + 149^2 + 133^2 + 149^2 + 158^2 + 150^2) - 77.5556 - 128.3889 - 46728.0278 = 36.2777$

$SS_B = \frac{1}{\mathrm{ra}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}^2_{\bullet\bullet k} - \mathrm{CF} = \frac{1}{9}(281^2 + 311^2 + 341^2 + 364^2) - 46728.0278 = 434.0833$

$SS_{AB} = \frac{1}{\mathrm{r}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}^2_{\bullet jk} - SS_A - SS_B - \mathrm{CF} = \frac{1}{3}(89^2 + 104^2 + 118^2 + 117^2 + 100^2 + 117^2 + 119^2 + 126^2 + 92^2 + 90^2 + 104^2 + 121^2) - 128.3889 - 434.0833 - 46728.0278 = 75.1669$

$SS_{E(B)} = SS_{Total} - SS_{Block} - SS_A - SS_{E(A)} - SS_B - SS_{AB} - SS_{E(B)} = 822.9722 - 77.5556 - 128.3889 - 36.2777 - 434.0833 - 75.1669 = 71.4998$

القيم الجدولية:

$$F_\alpha\left(df_A, df_{E(A)}\right) = F_{0.05}(2,4) = 6.94$$

$$F_\alpha\left(df_B, df_{E(B)}\right) = F_{0.05}(3,18) = 3.16$$

$$F_\alpha\left(df_{AB}, df_{E(B)}\right) = F_{0.05}(6,18) = 2.66$$

جدول تحليل التباين:

يمكن تلخيص الحسابات السابقة في جدول تحليل التباين كما يأتي:

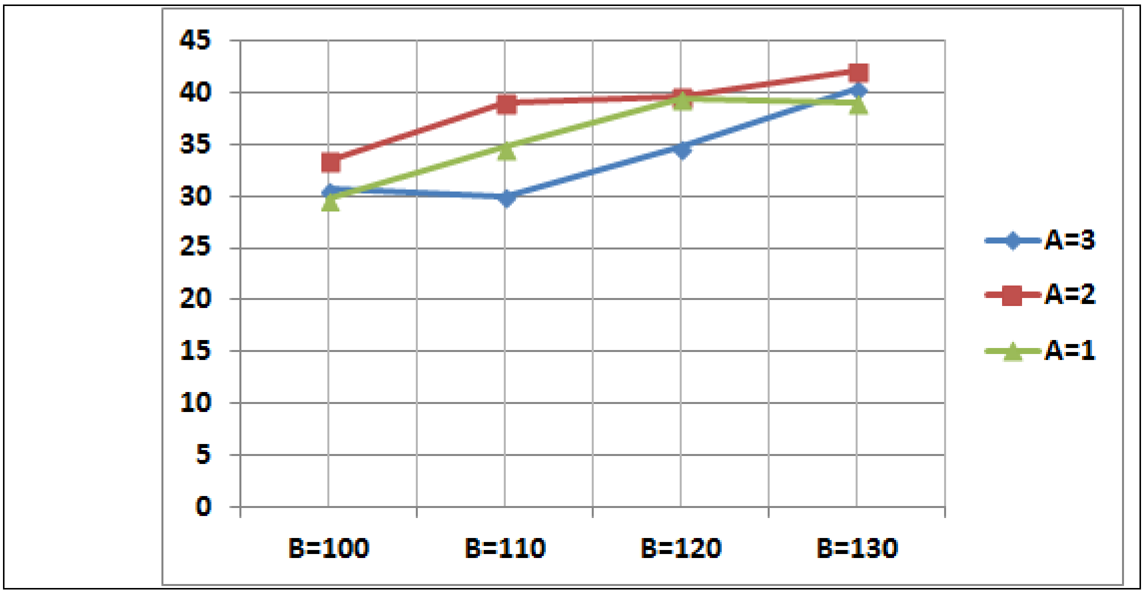
مصادر الاختلاف	مجموع المربعات	درجات الحرية df	متوسط المربعات	قيمة إف F - ratio	القيم الجدولية
القطاعات	77.5556	2	38.778	4.2759	6.94
العامل الأول (A)	128.3889	2	64.194	7.0784	6.94
الخطأ الأول	36.2777	4	9.069		
العامل الثاني (B)	434.0833	3	144.694	36.4285	3.16
التداخل (AB)	75.1669	6	12.528	3.1541	2.66
الخطأ الثاني	71.4998	18	3.972		
المجموع	822.9722	35			

نظرًا لأن $F_{AB} > F_\alpha\left(df_{AB}, df_{E(B)}\right)$، فإننا نستنتج بأن هناك تداخل (تأثير مشترك) معنوي للعاملين معًا على قوة شد الورق عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.05)$.

كما يلاحظ أن القطاعات لهذا التصميم لم تكن مفيدة؛ وذلك عند مقارنة النسبة $F_{Block} = \frac{MS_{Block}}{MS_{E(A)}}$ مع القيمة الجدولية $F_\alpha\left(df_{Block}, df_{E(A)}\right) = F_{0.05}(2,4) = 6.94$.

والجدول والشكل الآتيان يلخصان متوسطات التفاعل بين العاملين، أي متوسطات الخلايا $(Y_{\bullet jk})$، خلايا العامل الأول (طريقة التحضير) مع العامل الثاني (درجة الحرارة):

مجاميع خلايا العامل الأول مع العامل الثاني $(Y_{\bullet jk})$		العامل الأول- طريقة التحضير (A)		
		1	2	3
العامل الثاني درجة الحرارة (B)	100	29.67	33.33	30.67
	110	34.67	39.00	30.00
	120	39.33	39.67	34.67
	130	39.00	42.00	40.33



ومن الشكل أعلاه يلاحظ أن علاقة متغير الاستجابة (قوة شد الورق) مع العامل الثاني (درجة الحرارة) تعتمد على مستويات العامل الأول (طريقة التحضير)؛ وهذا ناتج عن وجود التداخل بين العاملين.

كما يلاحظ أن أكبر قوة لشد الورق هو عندما نستخدم طريقة التحضير الثانية (A=2) مع أعلى درجة للحرارة (B=130).