تصميم التجارب

Design of Experiments

الجزء الخامس

التصميم تام العشوائية (التعشية)

Completely Randomized Design

(C.R.D.)

مقدمة:

التصميم تام العشوائية (أو التصميم ذو العشوائية التامة) من أبسط التصاميم بناءً وتحليلاً.

ويتميز بما يأتي:

- يمكن استخدامه مع أي عددٍ من العوامل وأي عدد من المعالجات وأي عدد من التكرارات للمعالجة الواحدة.
- لا يُشترط تساوي التكرارات للمعالجات. ويمكن استخدامه حتى في حالة فقدان بعض الوحدات التجريبية أثناء إجراء التجربة.
- يُخصص هذا التصميم أكبر عدد ممكن من درجات الحرية للخطأ التجريبي مقارنة مع التصاميم الأخرى، مما يعني زيادة دقة الاستنتاجات في حالة كون الوحدات التجريبية متجانسة.

ويعاب على هذا التصميم أنه مناسب فقط للحالات التي تكون فيها الوحدات التجريبية متجانسة (متماثلة)، إذ أن كفاءة هذا التصميم تنخفض عندما تكون الوحدات التجريبية غير متجانسة.

توضيح كيفية التعشية/العشوائية (بناء التصميم تام العشوائية):

لنفرض أن لدينا (k) معالجة، وقد تكون هذه المعالجات عبارة عن مستويات عامل واحد أو تراكيب لمستويات عدة عوامل.

ولتكن المعالجات هي:

$$T_1, T_2, \dots , T_k$$

ولنفرض أن لدينا (N) من الوحدات التجريبية.

يتم تقسيم الوحدات التجريبية بشكل عشوائي إلى (k) مجموعة؛ حيث أن عدد المجموعات لابد أن يتساوى مع عدد المعالجات. (ويفضل أن تكون أعداد الوحدات التجريبية في المجموعات متساوية، ولكنه ليس من الضروري).

يتم وبشكل عشوائي توزيع المجموعات على المعالجات؛ أي يتم تطبيق كل معالجة على الوحدات التجريبية لواحدة فقط من المجموعات بشكل عشوائي.

لنفرض أن (n_i) هو تكرار المعالجة رقم (i)، أي عدد الوحدات التجريبية التي يتم تطبيق المعالجة (T_i) عليها.

يلاحظ أن مجموع التكرارات يساوي العدد الكلي للوحدات التجريبية، أي أن:

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

يتم تنفيذ عملية تطبيق المعالجات على الوحدات التجريبية في التجربة (إجراء أشواط التجربة) بتسلسل عشوائي. (إن كان هناك تسلسل زمني في إجراء الأشواط).

يتم أخذ القياسات على الوحدات التجريبية بتسلسل عشوائي (إن كان هناك تسلسل زمني في أخذ القياسات).

النموذج الخطي للتصميم تام العشوائية:

بشكل مشابه للنموذج الخطي لتحليل التباين الأحادي، فإننا نفترض أن قيمة متغير الاستجابه (Y_{ij}) يمكن تفكيكها إلى ثلاث مركبات وفقًا للصيغة الآتية:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

$$\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, n_i \quad ; \; \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{k}$$

حيث أن (Y_{ij}) هي المشاهدة رقم (j) للمعالجة (أو للمجموعة) رقم (i)، والمركبات الثلاث هي:

١. μ = المتوسط العام؛ وهو قيمة ثابتة ومجهولة.
٢. τ_i = تأثير المعالجة رقم (i) وهي قيمة مجهولة.
وقد تكون ثابتة أو عشوائية، ويعتمد ذلك على نوع التصميم، كما سنرى لاحقًا.
٣. ϵ_{ij} = مركبة الخطأ العشوائي للمشاهدة رقم (j) للمعالجة رقم (i).

والافتراضات الأساسية للنموذج الخطي للتصميم تام العشوائية هي:

١. إذا كانت التأثيرات (τ_i) ثابتة، فلا بد أن تحقق الشرط: $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$.

وأما إن كانت عشوائية، فلا بد أن تكون متوزعة وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (σ_τ^2)، أي أن $\tau_i \sim \mathrm{N}(0\,,\sigma_\tau^2)$، وتكون مستقلة عن بعضها البعض، وتكون أيضًا مستقلة عن مركبة الخطأ العشوائي (ϵ_{ij}).

٢. الأخطاء العشوائية (ϵ_{ij}) تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (σ_i^2)، أي أن $\epsilon_{ij} \sim \mathrm{N}(0\,,\sigma_i^2)$، وتكون مستقلة عن بعضها البعض.

٣. التباينات تكون متساوية، أي أن: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$.

ومن الافتراضات السابقة، يمكن التحقق مما يأتي حول توزيع قيم متغير الاستجابة (Y_{ij}):

١. متوسط المشاهدة (Y_{ij}) هو:

$$E(Y_{ij}) = \mu_i = \mu + \tau_i$$

٢. تباين المشاهدة (Y_{ij}) هو:

$$Var(Y_{ij}) = \sigma_i^2$$

٣. توزيع المشاهدة (Y_{ij}) هو التوزيع الطبيعي.

٤. المشاهدات (Y_{ij}) مستقلة عن بعضها البعض.

ويتضح مما سبق أن المشاهدات (Y_{ij}) تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $(\mu + \tau_i)$ وتباين (σ_i^2)، وتكون مستقلة عن بعضها البعض ، أي أن: $Y_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu + \tau_i\,, \sigma_i^2)$.

وعند تبني فرض تساوي التباينات $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2)$، يصبح:

$$Y_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu + \tau_i\,, \sigma^2)$$

ملاحظات:

الأهداف الأساسية هي:

(١) التحقق من صحة فرض العدم القائل بأن متوسطات المعالجات متساوية، أي:

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

ونظرًا لأن:

$$\mu_i = \mu + \tau_i$$

فإن الفرض السابق يمكن صياغتة بشكل مكافئ على النحو الآتي:

$$H_o: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k$$

وعند وضع الشرط $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$، في حالة نموذج التأثيرات الثابتة، يصبح فرض العدم على الشكل الآتي:

$$H_o: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k = 0$$

لاحظ أن الفرض $(H_o: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k)$ يعني عدم وجود فروق بين المتوسطات، مما يعني عدم وجود اختلاف بين تأثيرات المعالجات على متغير الاستجابة.

وأما الفرض $(H_o: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k)$ فيعني أن تأثيرت المعالجات متساوية، مما يعني عدم وجود اختلاف في تأثيرات المعالجات على متغير الاستجابة.

لذا، فإن الفرضين لهما نفس المعنى.

(٢) عند وجود فروق معنوية بين متوسطات المعالجات، فإننا نرغب في معرفة مواطن الاختلاف من خلال إجراء مقارنات متعددة بين المتوسطات، وكذلك نرغب في تقدير الفروق بين المتوسطات.

وتجدرالإشارة إلى أن الفروق بين متوسطات المعالجات تحظى باهتمام الباحثين أكثر من اهتمامهم بالمتوسطات نفسها.

تحليل بيانات التصميم تام العشوائية في حالة تساوي التكرارات:

Completely Randomized Design with Equal Replications

لنفرض أن لدينا (k) معالجة. ولنفرض أن كل معالجة من المعالجات تكررت في التجربة بنفس التكرار وبعدد قدره (n) وحدة تجريبية لكل معالجة.

يكون العدد الكلي للمشاهدات:

$$N = kn$$

ولنفرض أن متوسطات المعالجات هي:

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$$

وفي التصميم تام العشوائية نرغب فيما يأتي:

- التحقق من وجود (أو عدم وجود) فروق معنوية بين متوسطات المعالجات. وبمعنى آخر، اختبار الفروض الآتية:

  $H_o: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$

  $H_1:$ يوجد متوسط واحد على الأقل (μ_i) مختلف

  حيث أن (μ_i) هو متوسط المعالجة رقم (i).
- التعرف على مكامن الاختلافات، وتقدير الاختلافات، في حالة وجود فروق معنوية بين متوسطات المعالجات.

ولتحليل بيانات التصميم تام العشوائية نتبع وبشكل مشابه الخطوات التي ذكرناها سابقًا عند استعراض تحليل التباين الأحادي.

وفيما يأتي توضيحًا للإجراءات المستخدمة لتحليل التباين للتصميم تام العشوائية:

أولاً، يتم ترتيب بيانات الدراسة في جدول كما يأتي:

	المعالجات						المشاهدات
	T_k	$\cdots$	T_i	$\cdots$	T_2	T_1	
	Y_{k1} Y_{k2} $\vdots$ Y_{kj} $\vdots$ Y_{kn}	$\cdots$ $\cdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\vdots$ $\cdots$	Y_{i1} Y_{i2} $\vdots$ Y_{ij} $\vdots$ Y_{in}	$\cdots$ $\cdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\vdots$ $\cdots$	Y_{21} Y_{22} $\vdots$ Y_{2j} $\vdots$ Y_{2n}	Y_{11} Y_{12} $\vdots$ Y_{1j} $\vdots$ Y_{1n}	1 2 $\vdots$ j $\vdots$ n
المجموع العام $Y_{\bullet\bullet}$	$Y_{k\bullet}$	$\cdots$	$Y_{i\bullet}$	$\cdots$	$Y_{2\bullet}$	$Y_{1\bullet}$	المجموع
المتوسط العام $\bar{Y}_{\bullet\bullet}$	$\bar{Y}_{k\bullet}$	$\cdots$	$\bar{Y}_{i\bullet}$	$\cdots$	$\bar{Y}_{2\bullet}$	$\bar{Y}_{1\bullet}$	المتوسط

والجدول الآتي يوضح الرموز المستخدمة:

طريقة الحساب	التعريف	الرمز
$i = 1, 2, \dots, k$	رقم المعالجة	i
$j = 1, 2, \dots, n$	رقم المشاهدة (داخل المعالجة)	j
n = عدد تكرارات المعالجة	عدد مشاهدات المعالجة	n
$N = kn$	عدد المشاهدات الكلي	N
Y_{ij}= تؤخذ من بيانات التجربة	المشاهدة رقم (j) للمعالجة رقم (i)	Y_{ij}
$Y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}$	مجموع مشاهدات المعالجة رقم (i)	$Y_{i\bullet}$
$\bar{Y}_{i\bullet} = \frac{Y_{i\bullet}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}}{n}$	متوسط مشاهدات المعالجة رقم (i)	$\bar{Y}_{i\bullet}$
$Y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{k} Y_{i\bullet} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}$	المجموع العام (مجموع جميع المشاهدات)	$Y_{\bullet\bullet}$
$\bar{Y}_{\bullet\bullet} = \frac{Y_{\bullet\bullet}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}}{kn}$	المتوسط العام (متوسط جميع المشاهدات)	$\bar{Y}_{\bullet\bullet}$

وبشكل مشابه لما مر معنا سابقً، نقوم بتجزيء مجموع المربعات الكلي (SS_{Total}) وفقًا لمصادر الاختلاف إلى مركبتين؛ هما مجموع مربعات المعالجات (SS_{Trt}) ومجموع مربعات الخطأ التجريبي (SS_E) كما يأتي:

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$
$$= \underbrace{n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2}_{SS_{Trt}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet}\right)^2}_{SS_E}$$
$$= SS_{Trt} + SS_E$$

وبالمثل، يتم تجزيء درجات حرية مجموع المربعات الكلي إلى مركبتين كما يأتي:

$$\underbrace{df_{Total}} = \underbrace{df_{Trt}} + \underbrace{df_E}$$
$$kn - 1 = k - 1 + k(n-1)$$
$$N - 1 = k - 1 + (N - k)$$

والجدول الآتي يوضح مجاميع المربعات ودرجات الحرية المصاحبة لها:

درجات الحرية	صيغة التعريف الجبرية	مجموع المربعات
$df_{Trt} = k - 1$	$SS_{Trt} = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2$	مجموع مربعات المعالجات
$df_E = N - k = kn - k = k(n-1)$	$SS_E = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet}\right)^2$	مجموع مربعات الخطأ التجريبي
$df_{Total} = N - 1 = kn - 1$	$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2$	مجموع المربعات الكلي

كم يمكن استخدام الصيغ الحسابية الآتية لحساب مجاميع المربعات:

$$N = kn$$

$$CF = \frac{Y_{\bullet\bullet}^{\ 2}}{N}$$

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^{\ 2} - CF$$

$$SS_{Trt} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{i\bullet}^{\ 2}}{n} - CF$$

$$SS_E = SS_{Total} - SS_{Trt}$$

ونحسب أيضًا متوسطات المربعات كما يأتي:

متوسط مربعات المعالجات هو:

$$MSTrt = \frac{SS_{Trt}}{k-1}$$

ومتوسط مربعات الخطأ التجريبي هو:

$$MSE = \frac{SS_E}{k(n-1)}$$

ثم نقوم بحساب إحصاءة الاختبار (اختبار إف) بالصيغة الآتية:

$$F^* = \frac{MSTrt}{MSE}$$

إذا كان فرض العدم (H_o) صحيحًا، فإن الإحصاءة (F^*) تتوزع وفق توزيع إف بدرجتي حرية $(df_1 = df_{trt})$ و $(df_2 = df_E)$، أي أن:

$$F^* \sim F(k-1, k(n-1))$$

ولذلك، فإننا نرفض فرض العدم $(H_o: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k)$ عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (F^*) أكبر من القيمة الجدولية $(F_\alpha(k-1, k(n-1)))$ أي إذا كان:

$$F^* > F_\alpha(k-1, k(n-1))$$

ويمكن تلخيص الحسابات في جدول تحليل التباين كما يأتي:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio
المعالجات Treatments	SS_{Trt}	$k-1$	$MSTrt$	F^*
الخطأ التجريبي Experimental Error	SS_E	$k(n-1)$	MSE	
المجموع (Total)	SS_{Total}	$kn-1$		

تقدير متوسطات المعالجات (μ_i):

- التقدير النقطي:
يرمز لتقدير (أو مقدر) متوسط المعالجة (μ_i) بالرمز $(\hat{\mu}_i)$، وقيمته تساوي قيمة متوسط عينة المعالجة $(\bar{Y}_{i\bullet})$، أي أن:

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_{i\bullet}$$

- التقدير بفترة:
فترة الثقة، بمستوى ثقة $100\%(1-\alpha)$، لمتوسط المعالجة (μ_i) هي:

$$\bar{Y}_{i\bullet} \pm t_{\alpha/2} S_{\bar{Y}_{i\bullet}}$$

أي أن:

$$\bar{Y}_{i\bullet} - t\alpha/_2\, S_{\bar{Y}_{i\bullet}} < \mu_i < \bar{Y}_{i\bullet} + t\alpha/_2\, S_{\bar{Y}_{i\bullet}}$$

حيث أن ($S_{\bar{Y}_{i\bullet}}$) هو الخطأ المعياري لمتوسط عينة المعالجة ($\bar{Y}_{i\bullet}$)، والذي يعطى بالصيغة الآتية، كما مر معا سابقـًا:

$$S_{\bar{Y}_{i\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

و القيمة ($t\alpha/_2$) هي القيمة الجدولية لتوزيع تي بدرجات حرية مقدارها:

$$df = df_E = k(n-1)$$

تقدير الفرق بين متوسطي معالجتين ($\mu_i - \mu_j$):

- التقدير النقطي:

يرمز لتقدير (أو مقدر) الفرق بين متوسطي معالجتين ($\mu_i - \mu_j$) بالرمز ($\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j$)، وقيمته تساوي قيمة الفرق بين متوسطي عينتي المعالجتين ($\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}$)، أي أن:

$$\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j = \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}$$

- التقدير بفترة:

فترة الثقة، بمستوى ثقة $(1-\alpha)100\%$، للفرق بين متوسطي معالجتين ($\mu_i - \mu_j$) هي:

$$(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}) \pm t\alpha/_2\, S_{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet}}$$

أي أن:

$$(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}) - t\alpha/_2\, S_{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet}} < \mu_i - \mu_j < (\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}) + t\alpha/_2\, S_{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet}}$$

حيث أن ($S_{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet}}$) هو الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي عينتي المعالجتين ($\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}$)، والذي يعطى بالصيغة الآتية، كما مر معا سابقـًا:

$$S_{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet}} = \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

مثال (١)

في إحدى التجارب المتعلقة بدراسة تأثير ٤ أنواع من الأسمدة المختلفة (A و B و C و D) على كمية محصول الذرة، قام الباحث بتقسيم أحد الحقول الزراعية ذات التربة المتجانسة إلى ٢٠ قطعة زراعية (وحدة تجريبية) متساوية المساحات والأشكال، ووزعت المعالجات الأربع

عشوائيًا؛ بحيث تم تطبيق كل نوع من أنواع الأسمدة على ٥ قطع أختيرت بشكل عشوائي.
والجدول الآتي يوضح بيانات الدراسة (طن/هكتار).

	المعالجات (الأسمدة)				المشاهدات
	$T_4 = D$	$T_3 = C$	$T_2 = B$	$T_1 = A$	
	3.16	2.52	3.84	3.96	1
	3.68	2.28	3.36	1.70	2
	3.50	3.24	3.28	2.52	3
	3.47	2.36	4.16	2.92	4
	3.12	2.56	3.95	3.04	5
$Y_{\bullet\bullet}$ 62.62	$Y_{4\bullet}$ 16.93	$Y_{3\bullet}$ 12.96	$Y_{2\bullet}$ 18.59	$Y_{1\bullet}$ 14.14	المجموع
$\bar{Y}_{\bullet\bullet}$ 3.131	$\bar{Y}_{4\bullet}$ 3.386	$\bar{Y}_{3\bullet}$ 2.592	$\bar{Y}_{2\bullet}$ 3.718	$\bar{Y}_{1\bullet}$ 2.828	المتوسط

ويرغب الباحث فيما يأتي:

١. اختبار تساوي متوسطات كميات المحصول لأنواع السماد الأربعة عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).
٢. إيجاد فترة الثقة، بمستوى ثقة 95%، لمتوسط المعالجة الأولى (μ_1) (كمثال لفترات ثقة المتوسطات).
٣. إيجاد فترة ثقة، بمستوى ثقة 95%، للفرق بين متوسطي المعالجتين الثانية والأولى ($\mu_2 - \mu_1$). (كمثال لفترات ثقة الفروق بين المتوسطات).

أولاً: نلاحظ ما يأتي:

- المعالجات هي أنواع الأسمدة المختلفة.
- عدد المعالجات يساوي $k = 4$.
- الوحدة التجريبية هي القطعة الزراعية الواحدة.
- عدد القطع الزراعية (الوحدات التجريبية) لكل معالجة (تكرار المعالجة) يساوي $n = 5$.

وفيما يأتي حساب الكميات اللازمة لجدول تحليل التباين:

$$N = kn = 4 \times 5 = 20$$

$$CF = \frac{{Y_{\bullet\bullet}}^2}{N} = \frac{62.62^2}{20} = 196.0632$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} {Y_{ij}}^2 = 3.96^2 + 1.70^2 + \cdots + 3.12^2 = 204.1146$$

$$\sum_{i=1}^{k} Y_{i\bullet}^{2} = 14.14^2 + 18.59^2 + 12.96^2 + 16.93^2 = 1000.1142$$

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^{2} - CF = 204.1146 - 196.0632 = 8.0514$$

$$df_{Total} = N - 1 = 19$$

$$SS_{Trt} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{i\bullet}^{2}}{n} - CF = \frac{1000.1142}{5} - 196.0632 = 200.02284 - 196.0632 = 3.96$$

$$df_{Trt} = k - 1 = 3$$

$$MSTrt = \frac{SS_{Trt}}{k-1} = \frac{3.96}{3} = 1.32$$

$$SS_E = SS_{Total} - SS_{Trt} = 8.0514 - 3.96 = 4.0914$$

$$df_E = k(n-1) = 4(5-1) = 16$$

$$MSE = \frac{SS_E}{k(n-1)} = \frac{4.0914}{16} = 0.2557$$

$$F^* = \frac{MSTrt}{MSE} = \frac{1.32}{0.2557} = 5.162$$

القيم الجدولية لمستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) ولمستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$):

$(\alpha = 0.05)$: $\quad F_{\alpha}\big(k-1, k(n-1)\big) = F_{0.05}(3,16) = 3.29$

$(\alpha = 0.01)$: $\quad F_{\alpha}\big(k-1, k(n-1)\big) = F_{0.01}(3,16) = 5.24$

جدول تحليل التباين:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio
المعالجات Treatments	3.96	3	1.32	5.162*
الخطأ التجريبي Experimental Error	4.0914	16	0.2557	
المجموع (Total)	8.0514	19		

*: تعني أن القيمة معنوية عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.05$)

**: تعني أن القيمة معنوية عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.01$)

(١) اختبار تساوي متوسطات كميات المحصول لأنواع السماد الأربعة:

$H_o: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

H_1: يوجد (μ_i) متوسط واحد على الأقل مختلف

نظرًا لأن قيمة إف المحسوبة $(F^* = 5.162)$، أكبر من القيمة الجدولية $(F_{0.05}(3,16) = 3.29)$، فإننا نرفض فرض العدم القائل بتساوي متوسطات كميات المحصول لأنواع السماد الأربعة عند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.05)$، ونستنتج أن هناك فروقًا معنوية بين المتوسطات.

ملاحظة:

لا نرفض فرض العدم عند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.01)$، وذلك لأن:

$$F^* = 5.16 < F_{0.01}(3,16) = 5.24$$

(٢) لإيجاد فترة الثقة، بمستوى ثقة 95%، لمتوسط المعالجة الأولى (μ_1)، نوجد أولاً $(S_{\bar{Y}_{1\bullet}})$، وهو الخطأ المعياري لمتوسط عينة المعالجة الأولى $(\bar{Y}_{1\bullet})$:

$$S_{\bar{Y}_{1\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{0.2557}{5}} = 0.2261$$

وتعطى فترة الثقة بالصيغة:

$$\bar{Y}_{1\bullet} \pm t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{1\bullet}}$$

حيث أن $(t\alpha_{/2} = t_{0.025} = 2.12)$ هي القيمة الجدولية لتوزيع تي عند درجات الحرية $(df_E = 16)$.

لذا فإن فترة الثقة هي:

$$2.828 \pm (2.12)(0.2261) = 2.828 \pm 0.4793$$
$$2.349 < \mu_1 < 3.307$$

لذا، سنكون واثقين بمقدار (95%) بأن القيمة الحقيقية لمتوسط المعالجة الأولى (μ_1) تترواح بين ٢,٣٤٩ و ٣,٣٠٧ .

وبعبارة أكثر دقة، لو كررنا التجربة ١٠٠ مرة، وفي كل مرة نحسب فترة الثقة للمتوسط (μ_1)، فسنجد أن ٩٥ فترة من هذه الفترات تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط (μ_1).

(٣) لإيجاد فترة الثقة، بمستوى ثقة 95%، للفرق بين متوسطي المعالجتين الثانية والأولى $(\mu_2 - \mu_1)$، نوجد أولاً $(S_{\bar{Y}_{2\bullet} - \bar{Y}_{1\bullet}})$، وهو الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي عينتي المعالجتين $(\bar{Y}_{2\bullet} - \bar{Y}_{1\bullet})$:

$$S_{\bar{Y}_{2\bullet}-\bar{Y}_{1\bullet}} = \sqrt{\frac{2MSE}{n}} = \sqrt{\frac{2(0.2557)}{5}} = 0.3198$$

وتعطى فترة الثقة بالصيغة:

$$(\bar{Y}_{2\bullet} - \bar{Y}_{1\bullet}) \pm t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{2\bullet}-\bar{Y}_{1\bullet}}$$

حيث أن $(t\alpha_{/2} = t_{0.025} = 2.12)$ هي القيمة الجدولية لتوزيع تي عند درجات الحرية $(df_E = 16)$.

لذا فإن فترة الثقة هي:

$$(3.718 - 2.828) \pm (2.12)(0.3198) = 0.89 \pm 0.67798$$
$$0.212 < \mu_2 - \mu_1 < 1.570$$

تحليل بيانات التصميم تام العشوائية في حالة عدم تساوي التكرارات:

Completely Randomized Design with Unequal Replications

في بعض الحالات يكون من الصعب أو من غير الممكن إجراء التصميم تام العشوائية بعدد متساوي من التكرارات لجميع المعالجات.

وقد يعود السبب في ذلك إلى محدودية الوحدات التجريبية، أو إلى تلف بعض الوحدات التجريبية خلال تنفيذ التجربة.

ويمتاز التصميم تام العشوائية بإمكانية تطبيقه في حالة عدم تساوي تكرارات المعالجات.

لنفرض أن لدينا (k) من المعالجات.

ولنفرض أن تكرار المعالجة (T_i) هو (n_i).

أي أن المعالجة (T_i) طُبقت على (n_i) من الوحدات التجريبية، حيث أن (i) هو رقم المعالجة ويأخذ القيم من (١) حتى (k).

والجدول الآتي يوضح الشكل العام لبيانات التصميم تام العشوائية في حالة عدم تساوي التكرارات:

المشاهدات	المعالجات						
	T_1	T_2	$\cdots$	T_i	$\cdots$	T_k	
1 2 $\vdots$ j $\vdots$ n_i	Y_{11} Y_{12} $\vdots$ Y_{1j} $\vdots$ Y_{1n_1}	Y_{21} Y_{22} $\vdots$ Y_{2j} $\vdots$ Y_{2n_2}	$\cdots$ $\cdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\vdots$ $\cdots$	Y_{i1} Y_{i2} $\vdots$ Y_{ij} $\vdots$ Y_{in_i}	$\cdots$ $\cdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\vdots$ $\cdots$	Y_{k1} Y_{k2} $\vdots$ Y_{kj} $\vdots$ Y_{kn_k}	
حجم العينة	n_1	n_2	$\cdots$	n_i	$\cdots$	n_k	
المجموع	$Y_{1\bullet}$	$Y_{2\bullet}$	$\cdots$	$Y_{i\bullet}$	$\cdots$	$Y_{k\bullet}$	المجموع العام $Y_{\bullet\bullet}$
المتوسط	$\bar{Y}_{1\bullet}$	$\bar{Y}_{2\bullet}$	$\cdots$	$\bar{Y}_{i\bullet}$	$\cdots$	$\bar{Y}_{k\bullet}$	المتوسط العام $\bar{Y}_{\bullet\bullet}$

إن إجراءات تحليل بيانات هذا التصميم هي نفس الإجراءات المتبعة في الحالة التي تكون فيها التكرارات متساوية، فيما عدا بعض التعديلات البسيطة على طريقة حساب كميات جدول تحليل التباين.

والتعديلات هي كما يأتي:

الكمية	طريقة الحساب
عدد المشاهدات الكلي	$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$
مجموع مشاهدات المعالجة رقم (i)	$Y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$
متوسط مشاهدات المعالجة رقم (i)	$\bar{Y}_{i\bullet} = \frac{Y_{i\bullet}}{n_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n_i}$
المجموع العام	$Y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{k} Y_{i\bullet} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$
المتوسط العام	$\bar{Y}_{\bullet\bullet} = \frac{Y_{\bullet\bullet}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$
معامل التصحيح	$\mathrm{CF} = \frac{{Y_{\bullet\bullet}}^2}{N}$
مجموع المربعات الكلي	$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2$
مجموع مربعات المعالجات	$SS_{Trt} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2$
مجموع مربعات الخطأ التجريبي	$SS_E = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet}\right)^2$
درجات الحرية الكلي	$df_{Total} = N - 1$
درجات حرية المعالجات	$df_{Trt} = k - 1$
درجات حرية الخطأ التجريبي	$df_E = N - k$
الخطأ المعياري لمتوسط عينة معالجة $(\bar{Y}_{i\bullet})$	$S_{\bar{Y}_{i\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{n_i}}$

$S_{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet}} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$	الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي عينتي معالجتين $(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet})$
$\bar{Y}_{i\bullet} \pm t_{\alpha/2}\, S_{\bar{Y}_{i\bullet}}$; $(df = N-k)$	فترة ثقة للمتوسط (μ_i)
$(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}) \pm t_{\alpha/2}\, S_{\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet}}$; $(df = N-k)$	فترة ثقة للفرق $(\mu_i - \mu_j)$

وأما الصيغ الحسابية لمجاميع المربعات فهي:

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} {Y_{ij}}^2 - CF$$

$$SS_{Trt} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{{Y_{i\bullet}}^2}{n_i} - CF$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} {Y_{ij}}^2 - \sum_{i=1}^{k}\frac{{Y_{i\bullet}}^2}{n_i}$$

$$= SS_{Total} - SS_{Trt}$$

مثال (٢):

في إحدى التجارب المتعلقة بمقارنة خمسة أصناف من العدس تحت الظرف الطبيعية، تم استخدام التصميم تام العشوائية بخمس تكرارات لكل معالجة (صنف العدس). ولكن أثناء إجراء التجربة حصل تلف في بعض الوحدات التجريبية، ولذلك تم إلغاء بيانات الوحدات التالفة. والجدول أدناه يلخص بيانات الدراسة مع بعض الحسابات.

ويرغب الباحث فيما يأتي:

١. اختبار تساوي متوسطات كميات محصول أصناف العدس الخمسة عند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.05)$ وعند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.01)$.
٢. إيجاد الخطأ المعياري لمتوسطات العينات $(\bar{Y}_{i\bullet})$.
٣. إيجاد فترة الثقة، بمستوى ثقة 95%، لمتوسط المعالجة الأولى (μ_1) (كمثال لفترات ثقة المتوسطات).
٤. إيجاد فترة ثقة، بمستوى ثقة 95%، للفرق بين متوسطي المعالجتين الأولى والثانية $(\mu_1 - \mu_2)$. (كمثال لفترات ثقة الفروق بين المتوسطات).

المشاهدات	المعالجات (أصناف العدس)					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
1 2 ⋮ ⋮ n_i	770 630 750 670 790	540 390 440 475	320 310 355	730 890 750 725	550 660 510 460	
n_i	5	4	3	4	4	N=20
$Y_{i\bullet}$	3610	1845	985	3095	2180	$Y_{\bullet\bullet}$=11715
$\bar{Y}_{i\bullet}$	722	461.25	328.33	773.75	545	$\bar{Y}_{\bullet\bullet}$ = 585.75

وفيما يأتي حساب الكميات اللازمة لجدول تحليل التباين:

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i = 5 + 4 + 3 + 4 + 4 = 20$$

$$\mathrm{CF} = \frac{\mathrm{Y}_{\bullet\bullet}^{\,2}}{\mathrm{N}} = \frac{11715^2}{20} = 6862061.25$$

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \sum_{\mathrm{j=1}}^{n_i} \mathrm{Y_{ij}}^2 = 770^2 + 630^2 + \cdots + 460^2 = 7435675$$

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \frac{\mathrm{Y_{i\bullet}}^2}{n_i} = \frac{3610^2}{5} + \frac{1845^2}{4} + \frac{985^2}{3} + \frac{3095^2}{4} + \frac{2180^2}{4} = 7363690.833$$

$$SS_{Total} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \sum_{\mathrm{j=1}}^{n_i} \mathrm{Y_{ij}}^2 - \mathrm{CF} = 7435675 - 6862061.25 = 573613.75$$

$$df_{Total} = N - 1 = 19$$

$$SS_{Trt} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \frac{\mathrm{Y_{i\bullet}}^2}{\mathrm{n_i}} - \mathrm{CF} = 7363690.833 - 6862061.25 = 501629.583$$

$$df_{Trt} = k - 1 = 4$$

$$MSTrt = \frac{SS_{Trt}}{k-1} = \frac{501629.583}{4} = 125407.3958$$

$$SS_E = SS_{Total} - SS_{Trt} = 573613.75 - 501629.583 = 71984.167$$

$$df_E = N - k = 20 - 5 = 15$$

$$MSE = \frac{SS_E}{N-k} = \frac{71984.167}{15} = 4798.944467$$

$$F^* = \frac{MSTrt}{MSE} = \frac{125407.3958}{4798.944467} = 26.1323$$

$(\alpha = 0.05)$: $\quad F_\alpha(k-1, N-k) = F_{0.05}(4, 15) = 3.06$

$(\alpha = 0.01)$: $F_\alpha(k-1, N-k) = F_{0.01}(4,15) = 4.89$

جدول تحليل التباين:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio
المعالجات Treatments	501629.583	4	125407.3958	26.1323*
الخطأ التجريبي Experimental Error	71984.167	15	4798.944467	
المجموع (Total)	573613.75	19		

*: تعني أن القيمة معنوية عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.05)$
**: تعني أن القيمة معنوية عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.01)$

(١) اختبار تساوي متوسطات كميات المحصول لأصناف العدس الخمسة:

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

H_1: يوجد (μ_i) متوسط واحد على الأقل مختلف

نظرًا لأن قيمة إف المحسوبة $(F^* = 26.1323)$، أكبر من القيمة الجدولية $(F_{0.05}(4,15) = 3.06)$، فإننا نرفض فرض العدم القائل بتساوي متوسطات كميات المحصول لأصناف العدس الخمسة عند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.05)$، ونستنتج أن هناك فروقًا معنوية بين المتوسطات.

كما نلاحظ أن قيمة إف المحسوبة $(F^* = 26.1323)$، هي أيضًا أكبر من القيمة الجدولية $(F_{0.01}(4,15) = 4.89)$، لذا، فإننا نرفض فرض العدم القائل بتساوي متوسطات كميات المحصول لأصناف العدس الخمسة عند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.01)$.

(٢) الخطأ المعياري لمتوسط العينة $(\bar{Y}_{i\bullet})$ هو:

$$S_{\bar{Y}_{i\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{n_i}}$$

والجدول الآتي يحتوي على متوسطات العينات والأخطأ المعيارية لمتوسطات العينات:

رقم العينة	1	2	3	4	5
$\bar{Y}_{i\bullet}$	722	461.25	328.33	773.75	545
$S_{\bar{Y}_{i\bullet}}$	$\sqrt{\frac{4798.94}{5}} =$ 30.981	$\sqrt{\frac{4798.94}{4}} =$ 34.637	$\sqrt{\frac{4798.94}{3}} =$ 39.9956	$\sqrt{\frac{4798.94}{4}} =$ 34.637	$\sqrt{\frac{4798.94}{4}} =$ 34.637

(٣) فترة الثقة، بمستوى ثقة 95%، لمتوسط المعالجة الأولى (μ_1) هي:

$$\bar{Y}_{1\bullet} \pm t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{1\bullet}}$$

حيث أن $(t\alpha_{/2} = t_{0.025} = 2.131)$ هي القيمة الجدولية لتوزيع تي عند درجات الحرية $(df_E = 15)$.

لذا فإن فترة الثقة هي:

$$722 \pm (2.131)(30.981) = 722 \pm 66.021$$
$$655.979 < \mu_1 < 788.021$$

لذا، سنكون واثقين بمقدار (95%) بأن القيمة الحقيقية لمتوسط المعالجة الأولى (μ_1) تتراوح بين 655.979 و 788.021 .

(4) لإيجاد فترة الثقة، بمستوى ثقة 95%، للفرق بين متوسطي المعالجتين الأولى والثانية $(\mu_2 - \mu_1)$، نوجد أولاً $(S_{\bar{Y}_{1\bullet}-\bar{Y}_{2\bullet}})$، وهو الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي عينتي المعالجتين $(\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})$:

$$S_{\bar{Y}_{1\bullet}-\bar{Y}_{2\bullet}} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)} = 46.471$$

وتعطى فترة الثقة بالصيغة:

$$(\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet}) \pm t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{1\bullet}-\bar{Y}_{2\bullet}}$$

حيث أن $(t\alpha_{/2} = t_{0.025} = 2.131)$ هي القيمة الجدولية لتوزيع تي عند درجات الحرية $(df_E = 15)$.

لذا فإن فترة الثقة هي:

$$(722 - 461.25) \pm (2.131)(46.471) = 260.75 \pm 99.0297$$
$$161.72 < \mu_2 - \mu_1 < 359.78$$

النماذج الثابتة والنماذج العشوائية للتصميم تام العشوائية:

Fixed and Random Models for C.R.D

ذكرنا سابقًا، أن أي قيمة لمتغير الاستجابه (Y_{ij}) في التصميم تام العشوائية يمكن تمثيلها بالنموذج الخطي الآتي:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

$$\mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{n} \quad ; \ \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{k}$$

حيث أن (Y_{ij}) هي المشاهدة رقم (j) للمعالجة (أو للمجموعة) رقم (i)، والمركبات الثلاث هي:

١. μ = المتوسط العام؛ وهو قيمة ثابتة ومجهولة.
٢. τ_i = تأثير المعالجة رقم (i) وهي قيمة مجهولة.
٣. ϵ_{ij} = مركبة الخطأ العشوائي للمشاهدة رقم (j) للمعالجة رقم (i).

فالنموذج الخطي يصف المشاهدة (Y_{ij})، وكذلك يحدد مصادر الاختلاف في جدول تحليل التباين.

إن طبيعة تأثيرات المعالجات $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ هي التي تحدد نوع النموذج؛ إما ثابتًا وإما عشوائيًا.

النموذج الثابت (Fixed Model):

إذا كان الباحث مهتمًا بمقارنة المعالجات المحددة التي تم إدخالها في التجربة بعينها $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ دون الاهتمام بأي معالجات أخرى غيرها، فإن تأثيراتها $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ تكون ثابتة، و يعتبر النموذج نموذجًا ثابتًا. ويكون الاهتمام منصبًا على التحقق من وجود فروق معنوية بين متوسطات المعالجات الداخلة في التجربة بعينها، وتقدير متوسطات هذه المعالجات، وكذلك تقدير الفروق بين المتوسطات.

فعلى سبيل المثال، إذا كان الباحث مهتمًا بمقارنة خمسة أصناف محددة من السماد، فيكون النموذج في هذه الحالة نموذجًا ثابتًا.

وفي حالة النموذج الثابت، فإننا نضع الشرط الآتي:

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$$

وتعطى متوسطات المربعات كما في الصيغ الآتية (وكما مر معنا سابقًا):

$$E(MSTrt) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2}{k-1}$$

$$E(MSE) = \sigma^2$$

والفروض الأساسية التي نود اختبارها في هذا النموذج هي:

$H_o: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k = 0$

$H_1:$ يوجد (τ_i) تأثير واحد على الأقل لا يساوي الصفر

ويتم اختبار الفروض السابقة، كما مر معنا سابقًا، باستخدام اختبار إف المعطى بالصيغة:

$$F^* = \frac{MSTrt}{MSE}$$

كما أننا نكون مهتمين بتقدير متوسطات المعالجات والفروق بينها. حيث يتم تقدير متوسط المعالجة $(\mu_i = \mu + \tau_i)$ بالتقدير المنصف (أو غير المنحاز):

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_{i\bullet}$$

كما يتم تقدير الفرق بين متوسطي المعالجتين $(\mu_i - \mu_j)$ بالتقدير المنصف (أو غير المنحاز):

$$\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j = \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}$$

النموذج العشوائي (Random Model):

إذا كان الباحث مهتمًا بدراسة عدد كبير من المعالجات (مجتمع من المعالجات)، وإذا كان من الصعب إدخال جميع هذه المعالجات في التجربة، فإن الباحث في هذه الحالة يقوم باختيار عينة بشكل عشوائي من هذه المعالجات. ولنفرض أن المعالجات المختارة التي سوف تطبق في التجربة هي $(T_1, T_2, \dots, T_k)$.

وتجدر الإشارة إلى أنه لو أعيد إجراء التجربة مرة أخرى، فسيتم اختيار عينة عشوائية أخرى من المعالجات، وستكون مختلفة عن المعالجات في العينة الأولى.

في هذه الحالة تعتبر تأثيرات هذه العينة من المعالجات $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ تأثيرات عشوائية، ويعتبر النموذج نموذجًا عشوائيًا.

إن أحد افتراضات النموذج العشوائي هو اشتراط أن تكون تأثيرات المعالجات المختارة $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ عبارة عن عينة عشوائية من مجتمع التأثيرات الموزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (σ_τ^2)، أي أن $\tau_i \sim N(0, \sigma_\tau^2)$. كما يفترض أن تكون التأثيرات مستقلة عن بعضها البعض، وتكون أيضًا مستقلة عن مركبة الخطأ العشوائي (ϵ_{ij}).

وفي حالة النموذج العشوائي، يكون الباحث مهتمًا بمجتمع المعالجات ككل، وليس فقط بعينة المعالجات الداخلة في التجربة.إذ انه يرغب في التحقق من وجود (أو عدم وجود) فروق بين جميع المعالجات في مجتمع المعالجات، ليس فقط بين المعالجات الداخلة في التجربة.

إن اهتمام الباحث هنا يكون منصبًا على تباين متوسطات المعالجات وليس على متوسطات المعالجات. وبشكل محدد، يكون اهتمامه منصبًا حول التحقق من وجود (أو عدم وجود) تباين بين تأثيرات جميع المعالجات من خلال اختبار الفروض الآتية:

$$H_o: \sigma_\tau^2 = 0$$
$$H_1: \sigma_\tau^2 > 0$$

لاحظ أن ($\sigma_\tau^2 = 0$) يعني عدم وجود اختلافات بين جميع التأثيرات (τ_i) في المجتمع.

فعلى سبيل المثال، لو كان هناك ٢٠ صنفًا من الأسمدة، ويرغب الباحث في التحقق من وجود اختلافات بين هذه الأصناف من حيث كمية المحصول، فسيكون من الصعب إدخال جميع هذه الأصناف في التجربة كمعالجات. وسيضطر الباحث إلى اختيار عينة عشوائية مكونة من خمسة أصناف (مثلاً) من هذه الأصناف ويدخلها في التجربة كمعالجات.

وبالرغم من أن المعالجات الداخلة في التجربة هي فقط هذه الأصناف الخمسة، إلا أن اهتمام الباحث لا ينصب فقط على هذه الأصناف الخمسة، بل على مجتمع جميع أصناف السماد.

وتعطى متوسطات المربعات لهذا النموذج كما في الصيغ الآتية:

$$E(MSTrt) = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$$

$$E(MSE) = \sigma^2$$

ويتم اختبار الفروض السابقة باستخدام اختبار إف المعطى بالصيغة التي مرت معنا سابقًا:

$$F^* = \frac{MSTrt}{MSE}$$

وفي هذا النموذج نكون مهتمين أيضًا بتقدير تباين التأثيرات (σ_τ^2).

ولتقدير (σ_τ^2)، نلاحظ ما يأتي:

من الصيغة ($E(MSTrt)$) أعلاه، نجد أن:

$$\sigma_\tau^2 = \frac{E(MSTrt) - \sigma^2}{n}$$

وبالتعويض عن قيمة (σ^2) من الصيغة ($E(MSE)$) أعلاه، نجد أن:

$$\sigma_\tau^2 = \frac{E(MSTrt) - E(MSE)}{n}$$

ولذلك، يتم تقدير تباين التأثيرات (σ_τ^2) بالتقدير المنصف الآتي:

$$\widehat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MSTrt - MSE}{n}$$

وفيما يخص حساب مكونات جدول تحليل التباين لكلا النموذجين (الثابت والعشوائي)، فإننا نستخدم نفس الطريقة ونفس القوانين والصيغ الحسابية. إلا أن هناك اختلافـًا في صياغة الفروض وفي تفسير النتائج.

مثال (٣)

لنفرض أن أنواع السماد (المعالجات) المستخدمة في مثال (١) عبارة عن عينة عشوائية من مجتمع من الأنواع الكثيرة. ويرغب الباحث في التحقق من وجود (أو عدم وجود) اختلاف في كميات المحصول لجميع أنواع السماد في المجتمع (وليس فقط للأنواع الداخلة في التجربة).

في هذه الحالة فإن الفروض الإحصائية التي نرغب في اختبارها هي:

$$H_o: \sigma_\tau^2 = 0$$
$$H_1: \sigma_\tau^2 > 0$$

حيث أن (σ_τ^2) هو تباين مجتمع تأثيرات جميع المعالجات.

لاحظ أنه لو كان $(\sigma_\tau^2 = 0)$، فلن يكون هناك اختلاف بين تأثيرات المعالجات. وأما إذا كان $(\sigma_\tau^2 > 0)$ فسيكون هناك اختلاف بينها.

في مثال (١)، وجدنا أن قيمة إحصاءة الاختبار هي $(F^* = 5.162)$. ووجدنا أيضـًا أن القيمة الجدولية هي $(F_{0.05}(3, 16) = 3.29)$.

ونظرًا لأن:

$$F^* = 5.162 > F_{0.05}(4, 15) = 3.29$$

فإننا نرفض فرض العدم $(H_o: \sigma_\tau^2 = 0)$، ونستنتج أن تباين مجتمع التأثيرات (σ_τ^2) أكبر من الصفر. وبناءً على ذلك فإن هناك اختلافـًا معنويًا بين أنواع السماد في كميات الانتاج.

والآن نريد تقدير تباين مجتمع التأثيرات (σ_τ^2).

وجدنا في مثال (١) أن:

$$n = 5 \quad \text{و} \quad MSE = 0.2557 \quad \text{و} \quad MSTrt = 1.32$$

وباستخدام هذه القيم، نجد أن القيمة التقديرية للتباين (σ_τ^2) تساوي:

$$\widehat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MSTrt - MSE}{n} = \frac{1.32 - 0.2557}{5} = 0.2129$$

التصميم تام العشوائية مع معاينة الوحدات التجريبية:

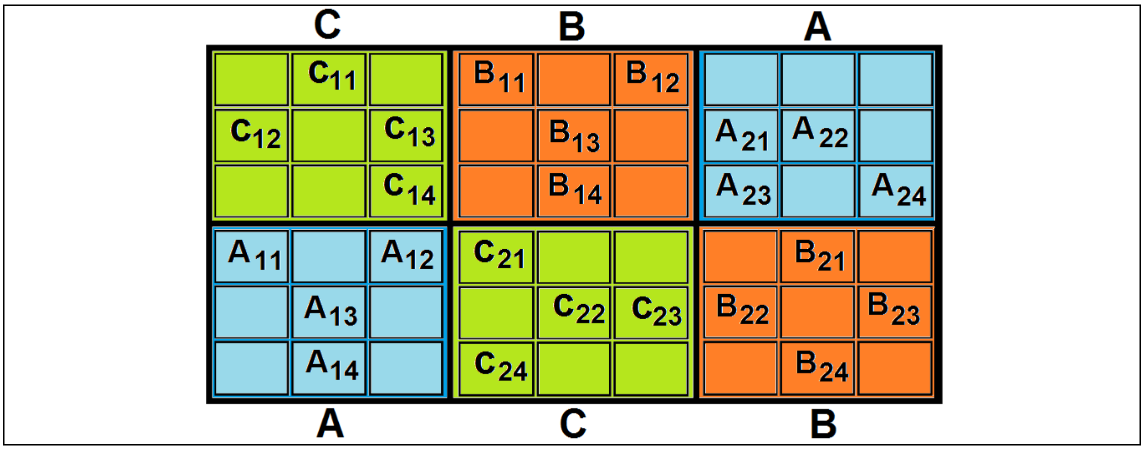
C.R.D. with Sampling Experimental Units

ذكرنا سابقًا أن وحدة المعاينة (Sampling Unit) هي الجزء من الوحدة التجريبية الذي يؤخذ عليه قياس تأثير المعالجة.

وقد تكون وحدة المعاينة هي كامل الوحدة التجريبية أو جزء منها.

فإذا كان قياس تأثير المعالجة يؤخذ على كامل الوحدة التجريبية، فتكون وحدة المعاينة هي كامل الوحدة التجريبية. أما إذا كان قياس تأثير المعالجة يؤخذ على عينة عشوائية من داخل الوحدة التجريبية، فتكون وحدة المعاينة جزء من الوحدة التجريبية.

فعلى سبيل المثال، لنفرض أن أحد الباحثين يرغب في مقارنة ثلاثة أنواع من السماد (A و B و C) على محصول أحد أنواع القمح. وكانت أرض التجربة عبارة عن حقل زراعي مستطيل الشكل ومتجانس التربة. قام الباحث بتقسيم هذا الحقل إلى ست قطع زراعية متماثلة. وبشكل عشوائي قام بتطبيق كل نوع من أنواع السماد على قطعتين زراعيتين. وفي موسم الحصاد، قام الباحث بتقسيم كل قطعة زراعية إلى تسعة أجزاء متساوية، ومن كل قطعة زراعية اختار بشكل عشوائي أربعة أجزاء فقط، ثم قام بحصد هذه الأجزاء المختارة وقياس كمية المحصول فيها. والشكل الآتي يوضح طريقة تقسيم الحقل إلى قطع زراعية وطريقة تقسيم كل قطعة زراعية إلى تسعة أجزاء، مع ملاحظة أن الأجزاء المرقمة في كل وحدة تجريبية (قطعة زراعية) هي وحدات المعاينة.



إن الوحدات التجريبية في هذا المثال هي القطع الزراعية، وذلك لأن المعالجات تم تطبيقها على القطع الزراعية. ويلاحظ أن القياسات لم تؤخذ على كامل القطعة الزراعية وإنما على بعض أجزائها.

وأما وحدات المعاينة فهي الأجزاء من القطعة الزراعية التي أُخذت منها القياسات، حيث أن القياسات أُخذت على أجزاء من القطع الزراعية وليس على كامل القطع.

من المثال السابق نلاحظ أن هناك مصدرين للأخطاء العشوائية؛ هما:

١. الخطأ بسبب الاختلافات بين وحدات المعاينة داخل الوحدات التجريبية.
يسمى بخطأ المعاينة (Sampling Error)، وهو ناتج عن الاختلافات بين وحدات المعاينة داخل الوحدات التجريبية، ويُعزى إلى الاختلافات الحيوية الفردية بين وحدات المعاينة.

٢. الخطأ بسبب الاختلافات بين الوحدات التجريبية التي أخذت نفس المعالجة.
ويسمى بالخطأ التجريبي (Experimental Error)، وهو ناتج عن الاختلافات بين الوحدات التجريبية، ويُعزى إلى الاختلافات الحيوية الفردية بين الوحدات التجريبية والظروف المحيطة بتطبيق المعالجات على الوحدات التجريبية.

البيانات:

لنفرض أن لدينا (t) معالجة $(T_1, T_2, \dots, T_t)$، وتم تكرار كل معالجة بشكل عشوائي على (n) وحدة تجريبية، وتم سحب عينة عشوائية حجمها (s) من داخل كل وحدة تجريبية، ثم أُخذت القياسات على وحدات المعاينة.

ولنفرض أن المشاهدة (Y_{ijk}) هي المشاهدة المحصلة من حدة المعاينة رقم (k) للوحدة التجريبية رقم (j) للمعالجة رقم (i).

حيث أن:

$$k = 1, 2, \dots, s \quad ; \quad \mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{n} \quad ; \quad \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{t}$$

والجدول الآتي يوضح الشكل العام لمشاهدات التجربة:

المعالجات	الوحدة التجريبية	المشاهدات				مجموع الوحدة التجريبية $Y_{ij\bullet}$	متوسط الوحدة التجريبية $\bar{Y}_{ij\bullet}$	مجموع المعالجة $Y_{i\bullet\bullet}$	متوسط المعالجة $\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$
		1	2	…	s				
1	1	Y_{111}	Y_{112}	$\cdots$	Y_{11s}	$Y_{11\bullet}$	$\bar{Y}_{11\bullet}$		
	2	Y_{121}	Y_{122}	$\cdots$	Y_{12s}	$Y_{12\bullet}$	$\bar{Y}_{12\bullet}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	n	Y_{1n1}	Y_{1n2}	$\cdots$	Y_{1ns}	$Y_{1n\bullet}$	$\bar{Y}_{1n\bullet}$	$Y_{1\bullet\bullet}$	$\bar{Y}_{1\bullet\bullet}$
2	1	Y_{211}	Y_{212}	$\cdots$	Y_{21s}	$Y_{21\bullet}$	$\bar{Y}_{21\bullet}$		
	2	Y_{221}	Y_{222}	$\cdots$	Y_{22s}	$Y_{22\bullet}$	$\bar{Y}_{22\bullet}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	n	Y_{2n1}	Y_{2n2}	$\cdots$	Y_{2ns}	$Y_{2n\bullet}$	$\bar{Y}_{2n\bullet}$	$Y_{2\bullet\bullet}$	$\bar{Y}_{2\bullet\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1	Y_{k11}	Y_{k12}	$\cdots$	Y_{k1s}	$Y_{k1\bullet}$	$\bar{Y}_{k1\bullet}$		
	2	Y_{k21}	Y_{k22}	$\cdots$	Y_{k2s}	$Y_{k2\bullet}$	$\bar{Y}_{k2\bullet}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	n	Y_{kn1}	Y_{kn2}	$\cdots$	Y_{kns}	$Y_{kn\bullet}$	$\bar{Y}_{kn\bullet}$	$Y_{k\bullet\bullet}$	$\bar{Y}_{k\bullet\bullet}$
								المجموع العام $Y_{\bullet\bullet\bullet}$	المتوسط العام $\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$

ويتم حساب المجاميع والمتوسطات في الجدول أعلاه بالصيغ الآتية:

طريقة الحساب	المجموع أو المتوسط
$Y_{ij\bullet} = \sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}$	مجموع الوحدة التجريبية رقم (j) للمعالجة رقم (i)
$\bar{Y}_{ij\bullet} = \frac{Y_{ij\bullet}}{s}$	متوسط الوحدة التجريبية رقم (j) للمعالجة رقم (i)
$Y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij\bullet} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}$	مجموع المعالجة رقم (i)
$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{Y_{i\bullet\bullet}}{ns}$	متوسط المعالجة رقم (i)
$Y_{\bullet\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} Y_{ij\bullet} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}$	المجموع العام (الكلي)
$\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}}{tns} = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}}{N}$	المتوسط العام (الكلي)
$N = tns$	عدد المشاهدات الكلي

النموذج الخطي للتصميم تام العشوائية مع معاينة الوحدات التجريبية:

بشكل مشابه للنموذج الخطي لتحليل التباين الأحادي، فإننا نفترض أن قيمة متغير الاستجابه (Y_{ijk}) يمكن تفكيكها إلى أربع مركبات وفقًا للصيغة الآتية:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} + \eta_{ijk}$$

$$k = 1, 2, \dots, s \quad ; \quad \mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{n} \quad ; \ \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{t}$$

حيث أن:

Y_{ijk} = المشاهدة رقم (k) من الوحدة التجريبية رقم (j) من المعالجة رقم (i).

والمركبات الأربع هي:

١. μ = المتوسط العام؛ وهو قيمة ثابتة ومجهولة.
٢. τ_i = تأثير المعالجة رقم (i) وهي قيمة مجهولة.
وقد تكون ثابتة أو عشوائية، ويعتمد ذلك على نوع التصميم.
٣. ϵ_{ij} = الخطأ العشوائي للوحدة التجريبية رقم (j) من المعالجة رقم (i).
٤. η_{ijk} = الخطأ العشوائي لوحدة المعاينة رقم (k) من الوحدة التجريبية رقم (j) من المعالجة رقم (i).

والافتراضات الأساسية لهذا النموذج هي:

١. إذا كانت التأثيرات (τ_i) ثابتة، فلا بد أن تحقق الشرط: $\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$.
وأما إن كانت عشوائية، فلا بد أن تكون متوزعة وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (σ_τ^2)، أي أن $\tau_i \sim \mathrm{N}(0\,, \sigma_\tau^2)$، وتكون مستقلة عن بعضها البعض، وتكون أيضًا مستقلة عن مركبات الخطأ العشوائي.
٢. الأخطاء العشوائية (ϵ_{ij}) تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (σ_ϵ^2)، أي أن $\epsilon_{ij} \sim \mathrm{N}(0\,, \sigma_\epsilon^2)$.
٣. الأخطاء العشوائية (η_{ijk}) تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (σ_η^2)، أي أن $\eta_{ijk} \sim \mathrm{N}(0\,, \sigma_\eta^2)$.

جدول تحليل التباين:

هناك ثلاثة مصادر للاختلاف في التصميم تام العشوائية مع معاينة الوحدات التجريبية، وهي:

١. اختلاف بسبب اختلاف المعالجات (بين المعالجات) (Between Treatments).
٢. اختلاف بسبب اختلاف الوحدات التجريبية داخل المعالجة (الخطأ التجريبي) (Experimental Error)

٣. اختلاف بسبب اختلاف وحدات المعاينة داخل الوحدة التجريبية (خطأ المعاينة) (Sampling Error)

والجدول الآتي يوضح مكونات جدول تحليل التباين وكيفية حسابها:

المكونة	الصيغة
مجموع المربعات الكلي	$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} \left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$
درجات الحرية الكلية	$df_{Total} = N - 1 = tns - 1$
مجموع مربعات المعالجات	$SS_{Trt} = ns \sum_{i=1}^{t} (\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$
درجة حرية المعالجات	$df_{Trt} = t - 1$
مجموع مربعات الخطأ التجريبي	$SS_E = s \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{Y}_{ij\bullet} - \bar{Y}_{i\bullet\bullet}\right)^2$
درجة حرية الخطأ التجريبي	$df_E = tn - t = t(n-1)$
مجموع مربعات خطأ المعاينة	$SS_S = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} \left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet}\right)^2$
درجة حرية خطأ المعاينة	$df_S = tns - tn = tn(s-1)$

ملاحظة: هناك أخطأ في بعض الصيغ في الكتاب ص ٩٩.

ويمكن بشكل أسهل حساب مجاميع المربعات بالصيغ الحسابية الآتية:

$$CF = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N} = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{tns}$$

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - CF$$

$$SS_{Trt} = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{t} Y_{i\bullet\bullet}^2 - CF$$

$$SS_E = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=}^{n} Y_{ij\bullet}^2 - CF - SS_{Trt}$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=}^{n} Y_{ij\bullet}^2 - \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{t} Y_{i\bullet\bullet}^2$$

$$SS_S = SS_{Total} - SS_{Trt} - SS_E$$

ويتم تجزيئ مجموع المربعات الكلي ودرجات الحرية المقابلة كما يأتي:

$$SS_{Total} = SS_{Trt} + SS_E + SS_S$$

$$df_{Total} = df_{Trt} + df_E + df_S$$

ونحسب أيضًا متوسطات المربعات كما يأتي:

متوسط مربعات المعالجات هو:

$$MSTrt = \frac{SS_{Trt}}{df_{Trt}}$$

ومتوسط مربعات الخطأ التجريبي هو:

$$MSE = \frac{SS_E}{df_E}$$

ومتوسط مربعات خطأ المعاينة هو:

$$MSS = \frac{SS_S}{df_S}$$

توقعات متوسطات المربعات:

الجدول الآتي يعطي توقعات متوسطات المربعات للنموذج الثابت وللنموذج العشوائي:

التوقع (المتوسط)	للنموذج الثابت	للنموذج العشوائي
$E(MSTrt)$	$\sigma_\eta^2 + s\sigma_\epsilon^2 + ns\frac{\sum_{i=1}^{t}\tau_i^2}{t-1}$	$\sigma_\eta^2 + s\,\sigma_\epsilon^2 + ns\sigma_\tau^2$
$E(MSE)$	$\sigma_\eta^2 + s\,\sigma_\epsilon^2$	$\sigma_\eta^2 + s\,\sigma_\epsilon^2$
$E(MSS)$	σ_η^2	σ_η^2

الفروض المراد اختبارها:

كما ذكرنا سابقًا، إن الهدف هو التحقق من وجود فروق معنوية بين متوسطات المعالجات.

لذا، نحن نرغب في اختبار الفروض الآتية في حالة النموذج الثابت:

$$H_o: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0$$

H_1: يوجد تأثير (τ_i) واحد على الأقل لا يساوي الصفر

وأما في حالة النموذج العشوائي، فإننا نرغب في اختبار الفروض الآتية:

$$H_o: \sigma_\tau^2 = 0$$
$$H_1: \sigma_\tau^2 > 0$$

ومن جدول توقعات متوسطات المربعات، نلاحظ أنه لو كان فرض العدم (H_o) صحيحًا لكان:

$$E(MSTrt) = E(MSE)$$

وأما إذا كان فرض العدم غير صحيح، فإن:

$$E(MSTrt) > E(MSE)$$

لذلك، فإننا نقارن المقدارين $(MSTrt)$ و (MSE) من خلال إحصاءة الاختبار (اختبار إف) المعطاة بالصيغة الآتية:

$$F^* = \frac{MSTrt}{MSE}$$

إذا كان فرض العدم (H_o) صحيحًا، فإن الإحصاءة (F^*) تتوزع وفق توزيع إف بدرجتي حرية $(df_1 = df_{trt})$ و $(df_2 = df_E)$، أي أن:

$$F^* \sim F(t-1, t(n-1))$$

ولذلك، فإننا نرفض فرض العدم $(H_o: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0)$ عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت قيمة إحصاءة الاختبار (F^*) أكبر من القيمة الجدولية $(F_\alpha(t-1, t(n-1)))$؛ أي إذا كان:

$$F^* > F_\alpha(t-1, t(n-1))$$

ويمكن تلخيص الحسابات في جدول تحليل التباين كما يأتي:

مصادر الاختلاف S.O.V.	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات MS	قيمة إف F - ratio
المعالجات Treatments	SS_{Trt}	$t-1$	$MSTrt$	$F^* = \frac{MSTrt}{MSE}$
الخطأ التجريبي Experimental Error	SS_E	$t(n-1)$	MSE	
خطأ المعاينة Sampling Error	SS_S	$tn(s-1)$	MSS	
المجموع (Total)	SS_{Total}	$tns-1$		

الأخطاء المعيارية لمتوسطات المعالجات وللفروق بينها:

الخطأ المعياري لمتوسط عينة معالجة $(\bar{Y}_{i\bullet\bullet})$ هو:

$$S_{\bar{Y}_{i\bullet\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{ns}}$$

الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي عينتي معالجتين $(\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet\bullet})$ هو:

$$S_{\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet\bullet}} = \sqrt{\frac{2MSE}{ns}}$$

تقديرات وفترات الثقة لمتوسطات المعالجات وللفروق بينها:

(١) يتم تقدير (μ_i) متوسط المعالجة رقم (i) بمتوسط عينة المعالجة ($\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$).

وأما فترة الثقة، بمستوى ثقة $100\%(1-\alpha)$، لمتوسط المعالجة (μ_i) فهي:

$$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} \pm t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{i\bullet\bullet}}$$

أي أن:

$$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{i\bullet\bullet}} < \mu_i < \bar{Y}_{i\bullet\bullet} + t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{i\bullet\bullet}}$$

حيث أن القيمة ($t\alpha_{/2}$) هي القيمة الجدولية لتوزيع تي بدرجات حرية مقدارها:

$$df = df_E = t(n-1)$$

(٢) يتم تقدير الفرق بين متوسطي معالجتين ($\mu_i - \mu_j$) بالفرق بين متوسطي عينتي المعالجتين ($\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet\bullet}$).

وأما فترة الثقة، بمستوى ثقة $100\%(1-\alpha)$، للفرق بين متوسطي المعالجتين ($\mu_i - \mu_j$) فهي:

$$(\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet\bullet}) \pm t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet\bullet}}$$

أي أن:

$$(\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet\bullet}) - t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet\bullet}} < \mu_i - \mu_j < (\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet\bullet}) + t\alpha_{/2}\, S_{\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet\bullet}}$$

مثال:

أُجريت تجربة على الفئران لدراسة تأثير دوائين على استجابة الجهاز العصبي مع استخدام دواء مراقبة / أو معالجة ضابطة (Control Treatment). استخدم في هذه التجربة ١٨ فأرًا وضعت في أقفاص مختلفة ومتشابهة، وتم توزيعها بشكل عشوائي إلى ثلاث مجموعات بواقع ٦ فئران لكل مجموعة. وبشكل عشوائي استلمت كل مجموعة معالجة من المعالجات الثلاث. وسجلت لكل فأر ثلاث قياسات في أوقات مختلفة، فأصبح لدينا ثلاث مشاهدات لكل فأر (لكل وحدة تجريبية). وفي نهاية التجربة لخصت البيانات في الجدول أدناه.

ويرغب الباحث فيما يأي:

(١) التحقق من وجود اختلافات بين تأثيرات هذه الأدوية الثلاثة على استجابة الجهاز العصبي عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$)؛ أي اختبار الفروض:

$$H_o: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

يوجد تأثير (τ_i) واحد على الأقل لا يساوي الصفر :H_1

(٢) تقدير متوسط المعالجة الثالثة (الدواء الثاني) (μ_3).

(٣) تقدير الفرق بين متوسط المعالجة الضابطة ومتوسط المعالجة الثالثة $(\mu_1 - \mu_3)$.

المعالجات	الوحدة التجريبية	المشاهدات			مجموع الوحدة التجريبية $Y_{ij\bullet}$	متوسط الوحدة التجريبية $\bar{Y}_{ij\bullet}$	مجموع المعالجة $Y_{i\bullet\bullet}$	متوسط المعالجة $\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$
T_1	1	41	42	40	123	41		
	2	50	51	52	153	51		
(C.T.)	3	46	47	45	138	46		
الضابطة	4	53	51	52	156	52		
	5	45	44	46	135	45		
	6	52	50	51	153	51	858	47.667
T_2	1	34	33	35	102	34		
	2	37	39	38	114	38		
الدواء	3	30	31	32	93	31		
الأول	4	42	41	41	124	41.33		
	5	35	34	36	105	35		
	6	27	28	26	81	27	619	34.389
T_3	1	35	36	37	108	36		
	2	32	31	31	94	31.33		
الدواء	3	44	43	45	132	44		
الثاني	4	45	44	44	133	44.33		
	5	35	36	37	108	36		
	6	40	39	38	117	39	692	38.444
							$Y_{\bullet\bullet\bullet}$ 2169	$\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$ 40.167
$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 = 89875$								

أولاً: نلاحظ ما يأتي:

المعالجات هي الأدوية الثلاثة المختلفة (t=3).

الوحدات التجريبية هي الفئران (١٨ فأرًا).

وحدات المعاينة هي القياسات الثلاثة المختلفة (s=3).

تكرار المعالجات (n=6).

ثانيًا: الحسابات:

$N = tns = 3 \times 3 \times 6 = 54$

$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 = 41^2 + 42^2 + \cdots + 39^2 = 89875$

$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=}^{n} Y_{ij\bullet}^2 = 123^2 + 153^2 + \cdots + 117^2 = 269529$

$\sum_{i=1}^{t} Y_{i\bullet\bullet}^2 = 858^2 + 619^2 + 692^2 = 1598189$

$CF = \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N} = \frac{2169^2}{54} = 87121.5$

$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - CF = 89875 - 87121.5 = 2753.5$

$df_{Total} = N - 1 = 53$

$SS_{Trt} = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{t} Y_{i\bullet\bullet}^2 - CF = \frac{1598189}{6\times3} - 87121.5 = 1666.7778$

$df_{Trt} = t - 1 = 2$

$MSTrt = \frac{SS_{Trt}}{df_{Trt}} = \frac{1666.7778}{2} = 833.3889$

$SS_E = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=}^{n} Y_{ij\bullet}^2 - CF - SS_{Trt} = \frac{269529}{3} - 87121.5 - 1666.7778 = 1054.7222$

$df_E = t(n-1) = 15$

$MSE = \frac{SS_E}{df_E} = \frac{1054.7222}{15} = 70.3148$

$SS_S = SS_{Total} - SS_{Trt} - SS_E = 2753.5 - 1666.7778 - 1054.7222 = 32.00$

$df_S = tn(s-1) = 36$

$MSS = \frac{SS_S}{df_S} = \frac{32.0}{36} = 0.88889$

$F^* = \frac{MSTrt}{MSE} = \frac{833.3889}{70.3148} = 11.8523$

$F_\alpha(df_{Trt}, df_E) = F_{0.05}(2,15) = 3.68$

ثالثًا: جدول تحليل التباين:

يمكن تلخيص الحسابات في جدول تحليل التباين كما يأتي:

S.O.V.	SS	df	MS	F - ratio
المعالجات Treatments	1666.7778	2	833.3889	11.8523
الخطأ التجريبي (الحيوانات داخل المعالجات) Experimental Error	1054.7222	15	70.3148	
خطأ المعاينة (القياسات داخل الحيوانات) Sampling Error	32.00	36	0.88889	
المجموع (Total)	2753.5	53		

رابعًا: الاستنتاجات:

(١) اختبار الفروض:

نظرًا لأن:

$$F^* = 11.8523 > F_{0.05}(2,15) = 3.68$$

فإننا نرفض فرض العدم $(H_o: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0)$ عند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.05)$. ونستنتج أن هناك فروقًا معنوية بين تأثيرات الأدوية الثلاثة على استجابة الجهاز العصبي.

(٢) تقدير متوسط المعالجة الثالثة (الدواء الثاني) (μ_3):

يتم تقدير متوسط المعالجة الثالثة (μ_3) بمتوسط عينتها:

$$\hat{\mu}_3 = \bar{Y}_{3\bullet\bullet} = 38.444$$

وأما فترة الثقة، بمستوى ثقة 95%، لمتوسط المعالجة (μ_3) فهي:

$$\bar{Y}_{3\bullet\bullet} \pm t\alpha/_2\, S_{\bar{Y}_{3\bullet\bullet}}$$

حيث أن درجات الحرية للقيمة الجدولية $(t\alpha/_2)$ هي $(df_E = 15)$.

والخطأ المعياري للمتوسط $(\bar{Y}_{3\bullet\bullet})$ هو:

$$S_{\bar{Y}_{3\bullet\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{ns}} = \sqrt{\frac{70.3148}{18}} = 1.9765$$

لذا، فإن فترة الثقة هي:

$$38.444 \pm t_{0.025} \times 1.9765$$
$$38.444 \pm 2.131 \times 1.9765$$

$$38.444 \pm 4.2119$$
$$34.232 < \mu_3 < 42.656$$

(٣) تقدير الفرق بين متوسط المعالجة الضابطة ومتوسط المعالجة الثالثة $(\mu_1 - \mu_3)$:

يتم تقدير الفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_3)$ بالفرق بين متوسطي العينتين:

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3 = \bar{Y}_{1\cdot\cdot} - \bar{Y}_{3\cdot\cdot} = 47.667 - 38.444 = 9.223$$

وأما فترة الثقة، بمستوى ثقة 95%، للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_3)$ فهي:

$$(\bar{Y}_{1\cdot\cdot} - \bar{Y}_{3\cdot\cdot}) \pm t_{\alpha/2}\, S_{\bar{Y}_{1\cdot\cdot}-\bar{Y}_{3\cdot\cdot}}$$

حيث أن الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{Y}_{1\cdot\cdot} - \bar{Y}_{3\cdot\cdot})$ هو:

$$S_{\bar{Y}_{1\cdot\cdot}-\bar{Y}_{3\cdot\cdot}} = \sqrt{\frac{2MSE}{ns}} = \sqrt{\frac{2 \times 70.3148}{18}} = 2.7951$$

لذا، فإن فترة الثقة هي:

$$9.223 \pm t_{0.025} \times 2.7951$$
$$9.223 \pm 2.131 \times 2.7951$$
$$9.223 \pm 5.95636$$
$$3.267 < \mu_1 - \mu_3 < 15.179$$