المصفوفات
Matrices

في هذا الفصل سوف نتعلم :

1) كيفية إدخال عناصر المصفوفة.
2) العمليات الجبرية على المصفوفات:
   - الجمع .
   - الطرح .
   - الضرب .
3) إيجاد المصفوفة المبدلة Transpose.
4) إيجاد مقلوب المصفوفة Invert.
5) المصفوفة القطرية Diagonal.
6) تحليل الإيجن Eigen Analysis.

أولاً : إدخال البيانات :

مثال [1] :

المطلوب إدخال بيانات المصفوفات التالية :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 7\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

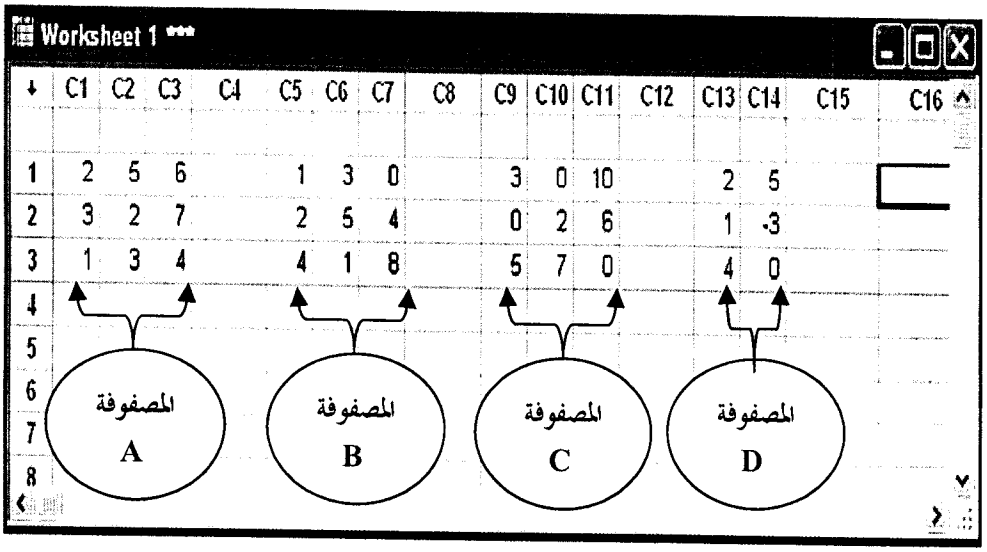
$$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 4\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

الخطوات :

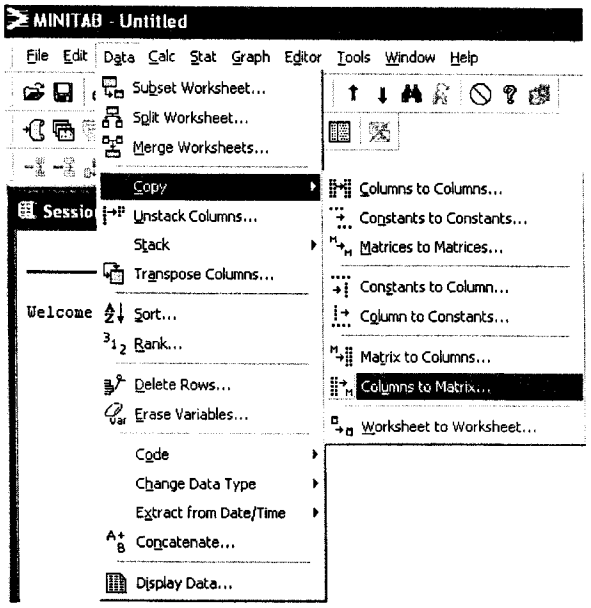
أ) يتم إدخال البيانات في ورقة العمل Worksheet كما يلى:



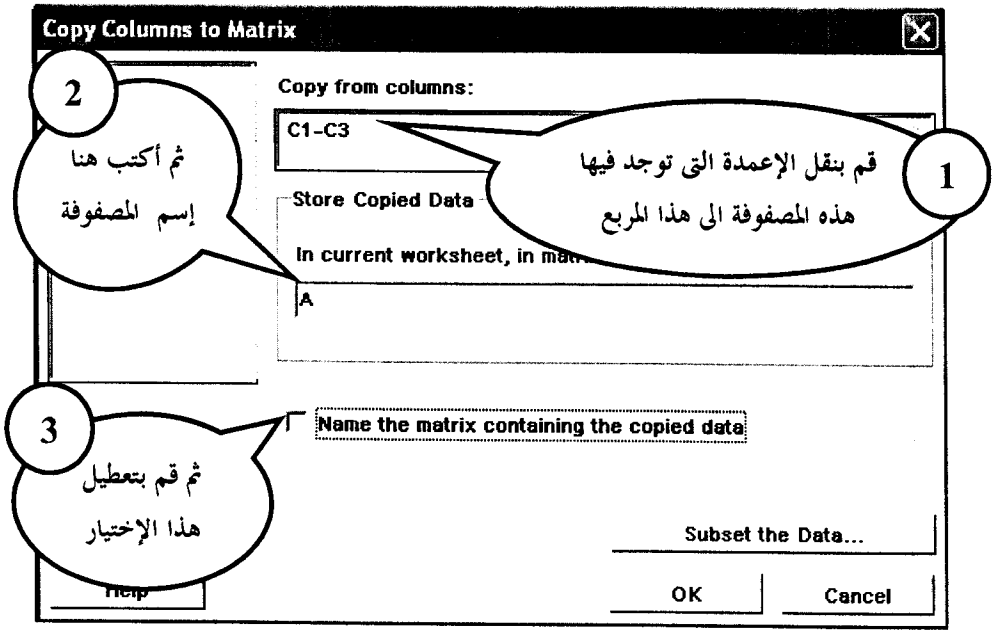
ملحوظة هامة :

يفضل أن يكون هناك فاصل (عمود فارغ) بين المصفوفة والأخرى.

2) افتح قائمة Data ، ومن القائمة الفرعية لـ Copy اختر الأمر Columns to Matrix ، كما هو موضح بالشكل التالي:

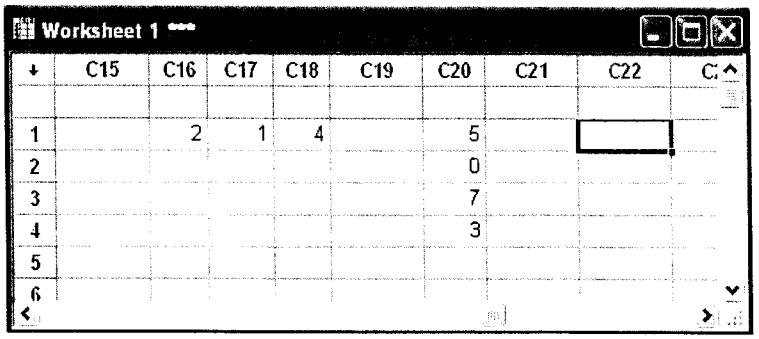


سوف يظهر المربع الحواري التالي:



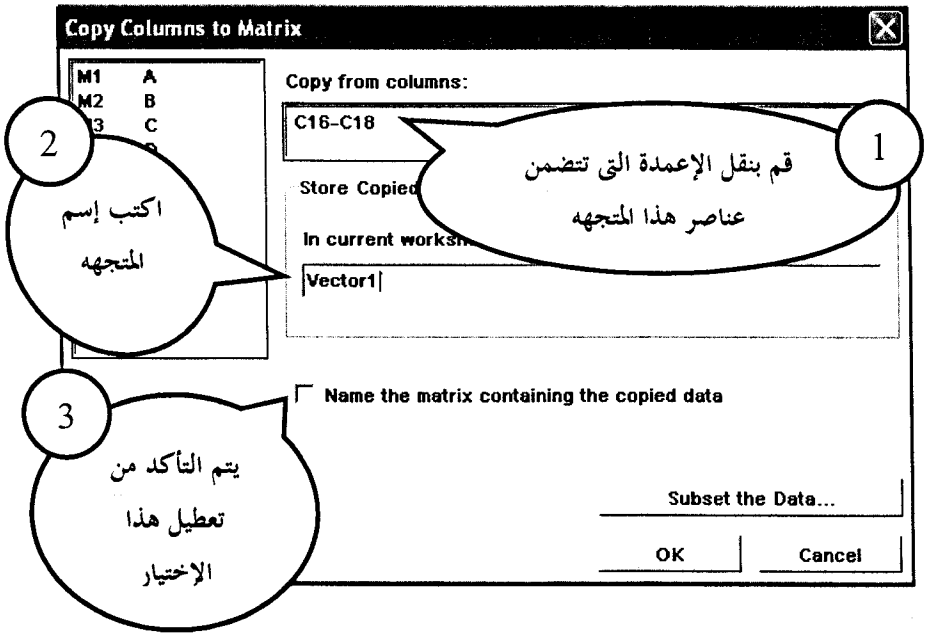
3) ثم اضغط ok. بهذا الشكل نكون قد أدخلنا بيانات المصفوفة الأولى (A).

4) ثم قم بعد ذلك بتكرار نفس الخطوات السابقة بالنسبة لباقي المصفوفات.



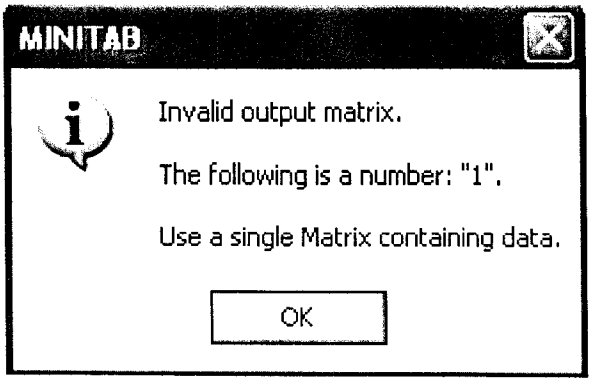
2) **بالنسبة للمتجهه الأفقى** $Vector1 = [2 \quad 1 \quad 4]$

أ- افتح قائمة Data ، ومن القائمة الفرعية لـ Copy اختر الأمر Columns to Matrix ، سوف يظهر المربع الحواري التالي:



ملحوظة :

يشترط عند كتابة إسم المصفوفة أو المتجهه عدم وجود مسافات، بمعنى أنه – في المربع الحواري الحالى – لو كنا قد كتابنا إسم هذا المتجهه مع وجود مسافة بين Vector و **1** ، بحيث يكون على الشكل (Vector 1) ، نجد أنه تظهر رسالة تخبرنا بوجود خطأ، كما هوموضح بالشكل التالي .

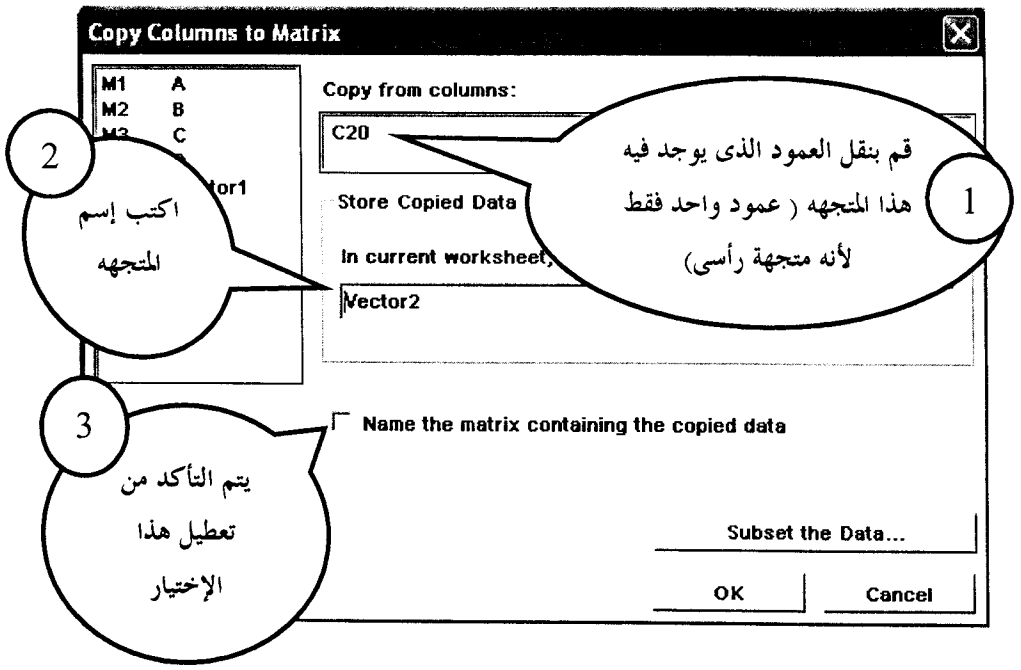


ب- في الرسالة التي أمامك، اضغط Ok للعودة الى المربع الحواري الأصلي لتعديل الاسم من خلال إزالة المسافة لكى يصبح Vector1 كلمة واحدة بدون مسافات.

ج- ثم اضغط OK .

3) **أما النسبة للمتجهه الرأسي** $Vector2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

أ- افتح قائمة Data، ومن القائمة الفرعية لـ Copy اختر الأمر Columns to Matrix، سوف يظهر المربع الحواري التالي:

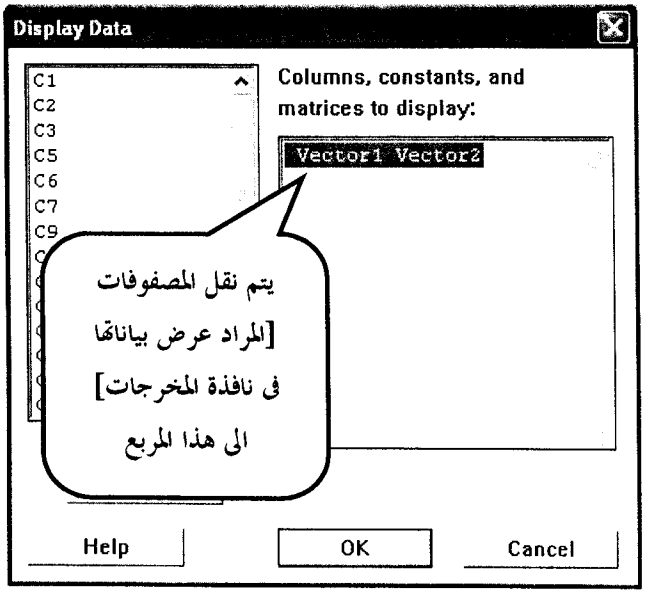


ب- ثم اضغط OK .

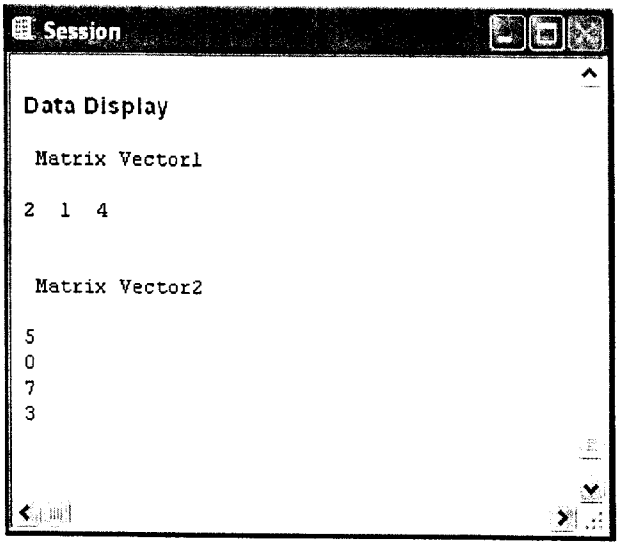
لعرض المصفوفات التي تم تعريفها للبرنامج مؤخرا (المتجهه الأفقي والمتجهه الرأسي) في نافذة المخرجات للمراجعة والتأكد من عدم وجود أخطاء عند الإدخال. نتبع الخطوات التالية:

الخطوات:

1) افتح قائمة Data ، ومنها اختر الأمر Display Data ، سوف يظهر المربع الحواري التالي:



2) ثم اضغط Ok . نجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



ثانياً : العمليات الجبرية على المصفوفات :

- الجمع .
- الطرح .

○ الضرب .

ملاحظات هامة :

(أ) في حالة جمع أو طرح مصفوفتين يشترط أن تكون عدد صفوف وأعمدة المصفوفة الأولى تساوى عدد صفوف وأعمدة المصفوفة الثانية.

(ب) أما في حالة الضرب فيشترط أن يكون عدد أعمدة المصفوقة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية.

مثال [3] :

في المثال رقم (1) : المطلوب إيجاد ناتج ما يلى:

(أ) $A + B$

(ب) $A + B + C$

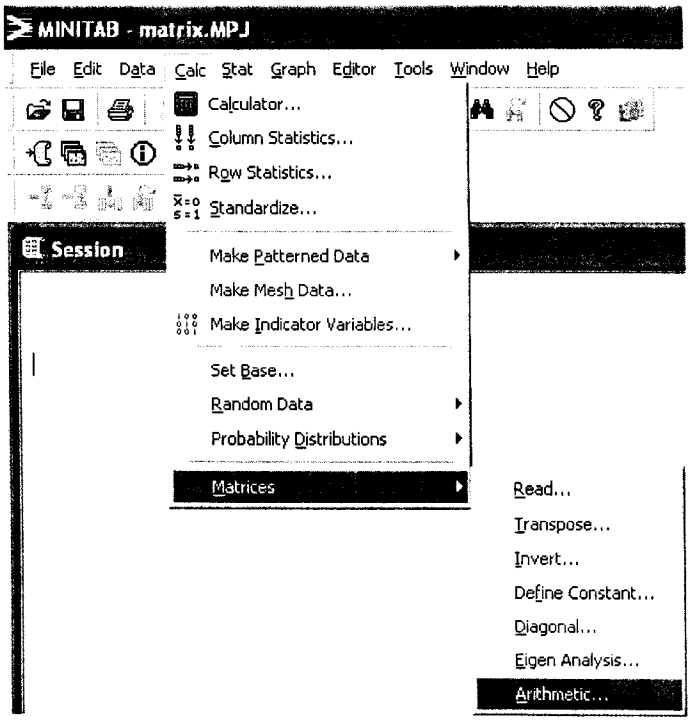
(ج) $A - B$

(د) $(A+B) - C$

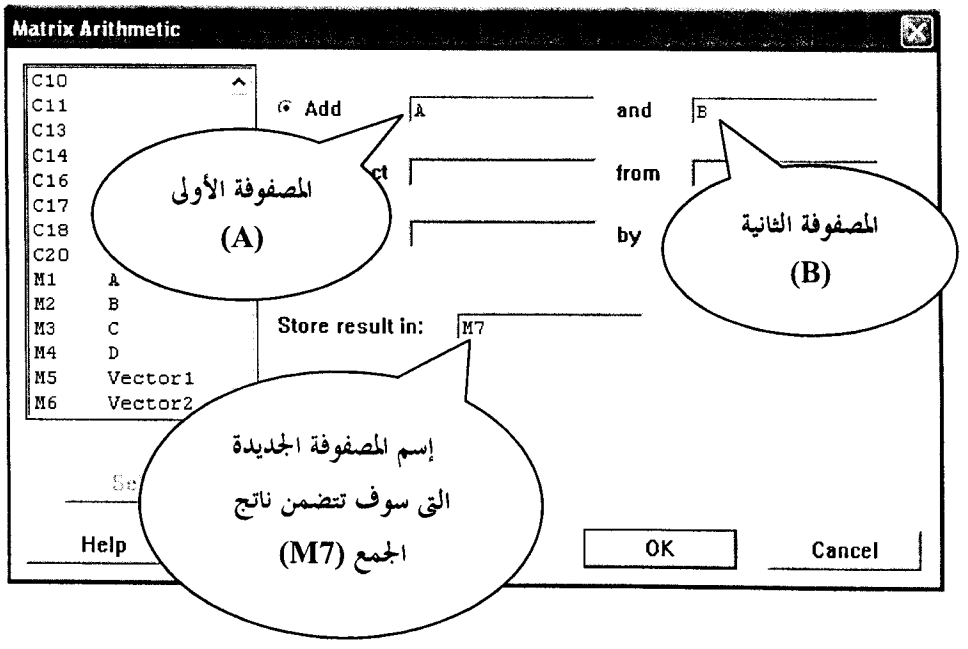
الخطوات :

(أ) إيجاد [A + B]

أ) افتح قائمة Calc، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Arithmetic كما يلى:



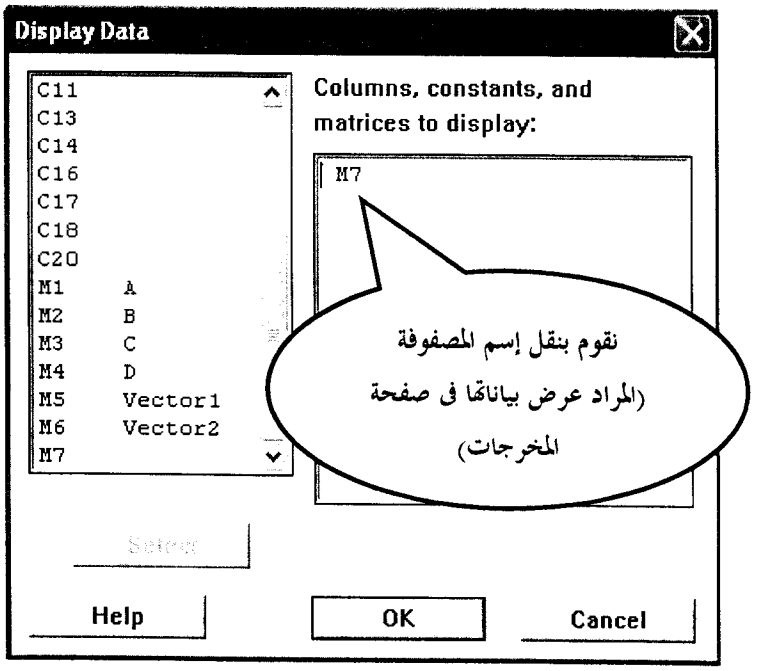
سوف يظهر المربع الحواري التالي:



2) ثم اضغط Ok .

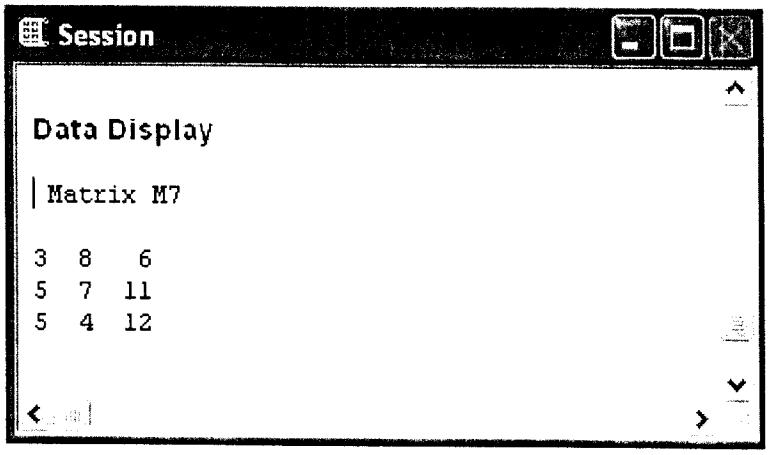
ولعرض ناتج الجمع (المصفوفة **M7**) في نافذة المخرجات **Session** نقوم بالأتي:

1) افتح قائمة Data ، ومنها اختر Display Data ، سوف يظهر المربع الحواري التالي:



2) ثم اضغط Ok.

3) ستجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



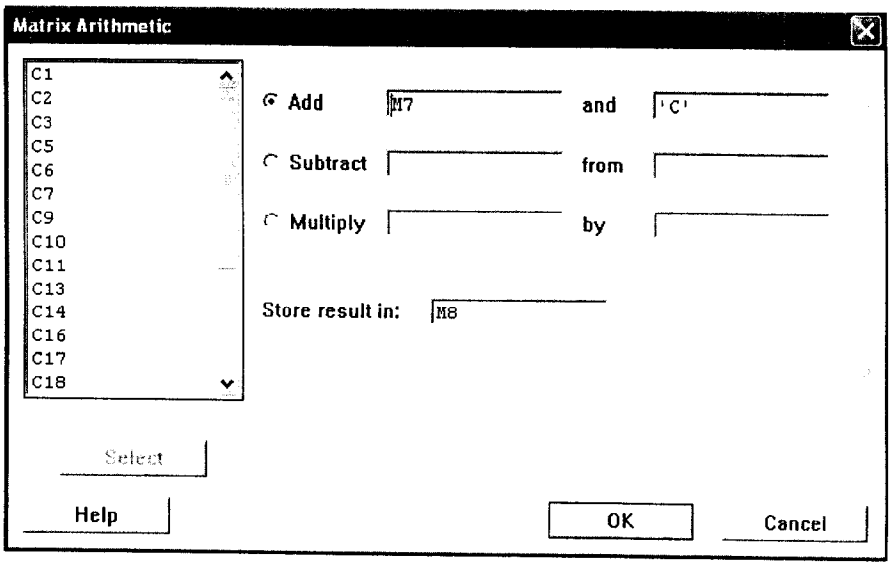
(ب) إيجاد [A + B + C]

يتم بإيجاد حاصل جمع المصفوفة (A) مع المصفوفة (B) [وهو ما تم حسابه في المثال السابق وكان ناتج الجمع (M7)] ثم نقوم بجمع المصفوفة (M7) مع المصفوفة (C) للحصول على مجموع (A+B+C) كما يلى:

الخطوات:

أ) افتح قائمة Calc، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Arithmetic

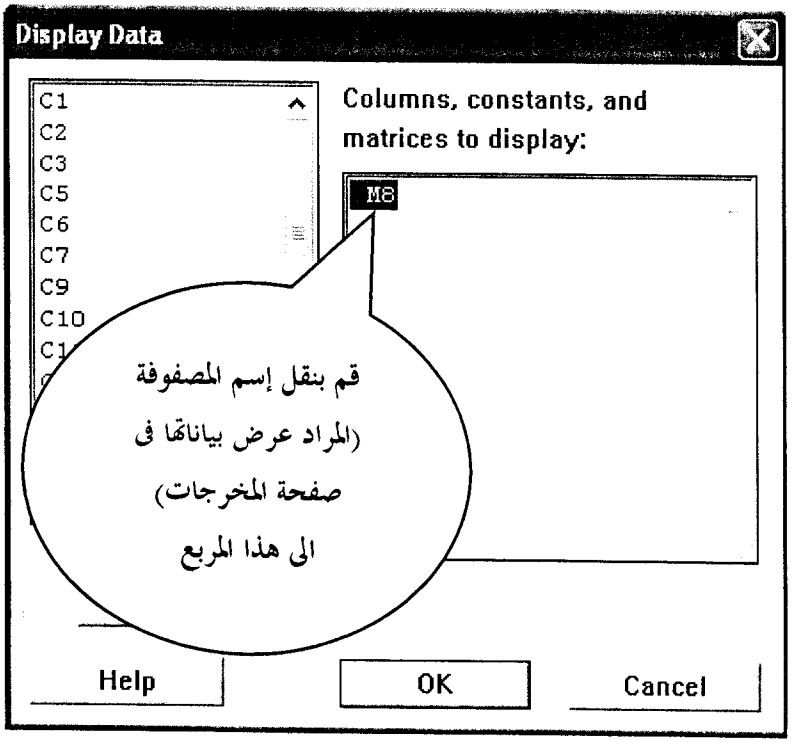
سوف يظهر المربع الحواري التالي:



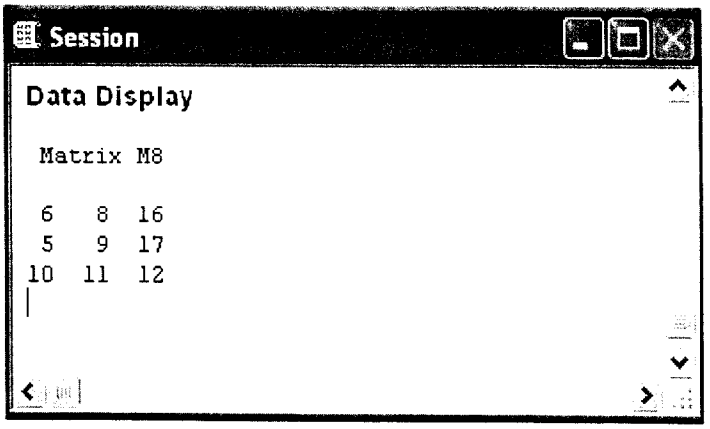
2) ثم اضغط OK ، تكون المصفوفة (M8) تتضمن ناتج جمع المصفوفات الثلاثة **(A+B+C)** .

ولعرض مكونات المصفوفة **(M8)** في نافذة المخرجات **Session** نقوم بالأتي:

أ) افتح قائمة Data ومنها اختر Display Data سوف يظهر المربع الحواري التالي:



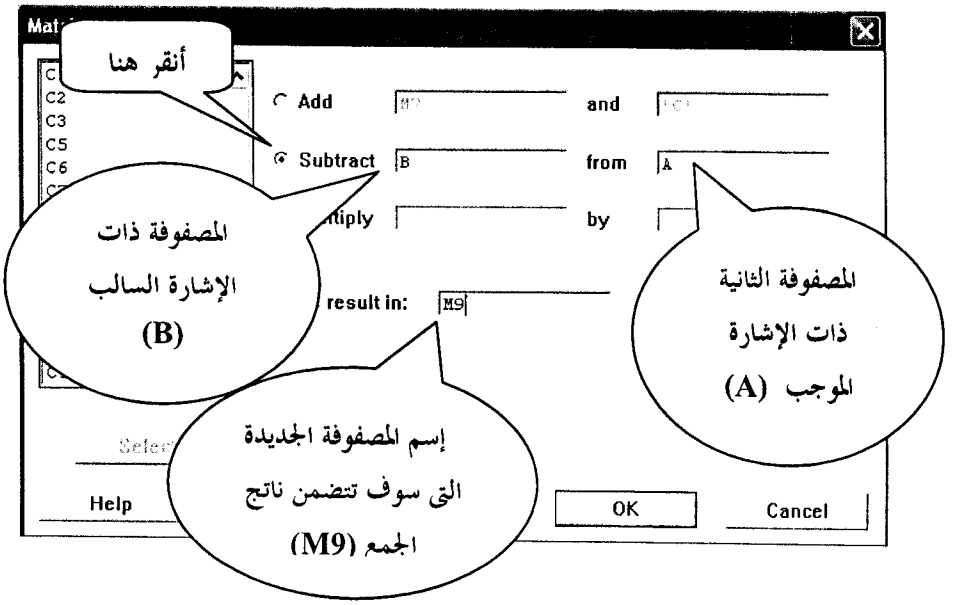
2) ثم اضغط Ok، ستجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



(ج) إيجاد [A – B]

الخطوات

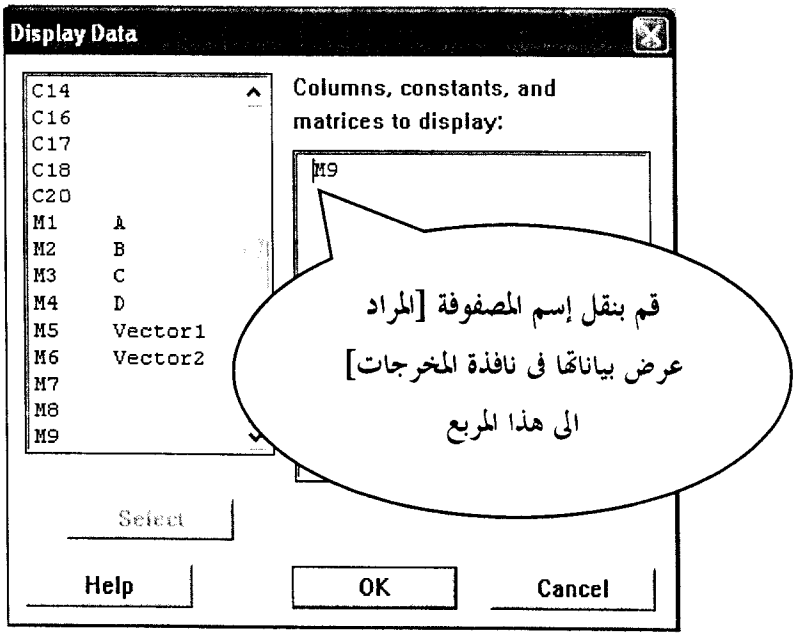
1) افتح قائمة **Calc** ، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Arithmetic سوف يظهر المربع الحواري التالي:



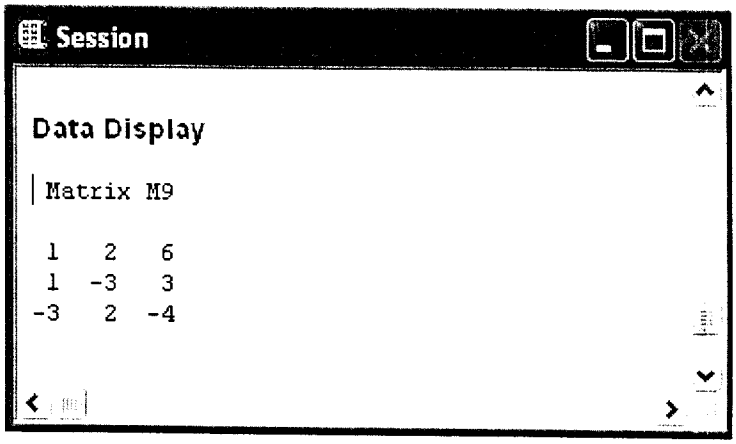
2) ثم اضغط OK .

ولعرض مكونات المصفوفة (M9) [التي تتضمن ناتج الطرح المطلوب في نافذة المخرجات Session] نقوم بالأتي:

1) افتح قائمة Data ومنها اختر Display Data سوف يظهر المربع الحواري التالي:

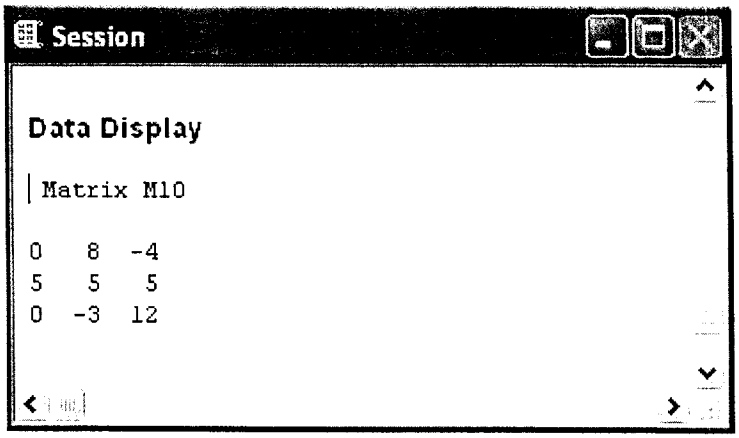


2) ثم اضغط Ok . ستجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



(د) إيجاد [(A+B) - C]

بإتباع نفس الخطوات السابقة: يمكن إيجاد هذا الناتج [سنترك للقارىء تنفيذ تلك الخطوات]، وفي النهاية سنجد أن الناتج في نافذة المخرجات كما يلى :



مثال [4] :

المطلوب إيجاد :

(أ) حاصل ضرب مصفوفة في مقدار ثابت [5 × A].

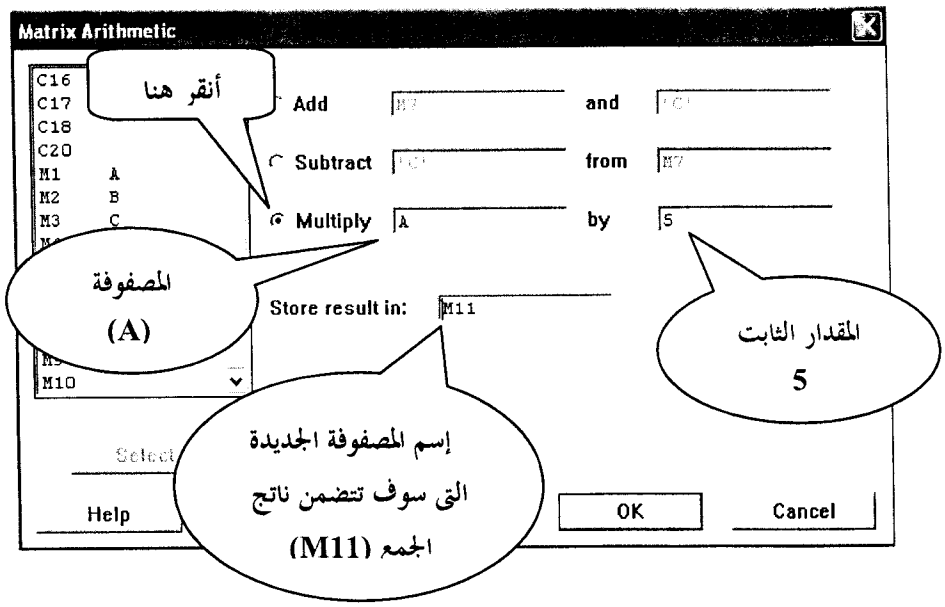
(ب) حاصل ضرب مصفوفتين [A × D].

(ج) مربع مصفوفة [C] أى أوجد [C^2].

(أ) حاصل ضرب [5 × A]

الخطوات :

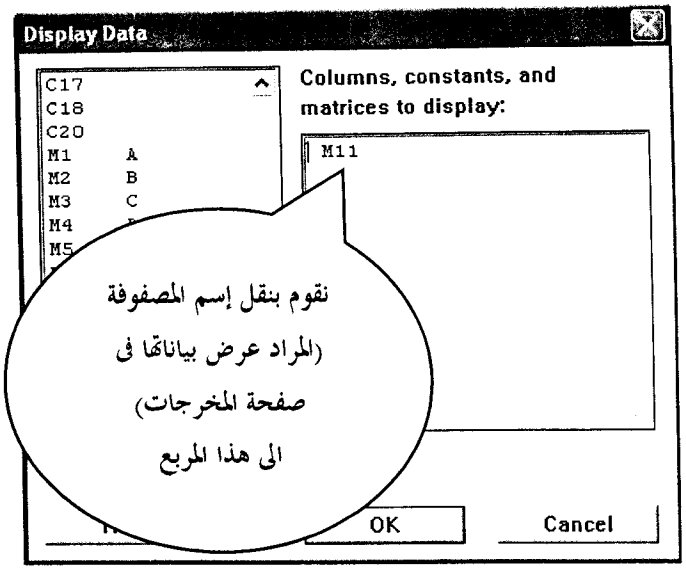
1) افتح قائمة Calc ، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Arithmetic سوف يظهر المربع الحواري التالي:



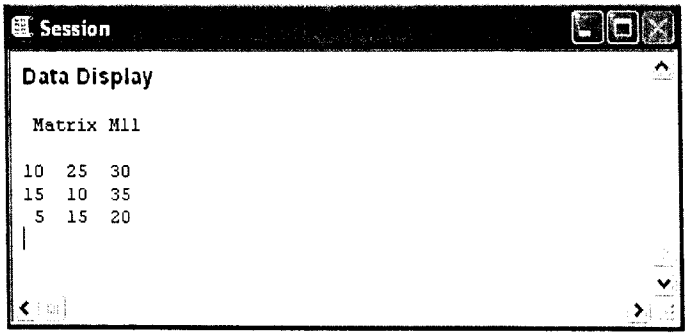
2) ثم اضغط OK .

<u>ولعرض مكونات المصفوفة (M11) التي تتضمن ناتج الضرب المطلوب في نافذة المخرجات Session نقوم بالأتى:</u>

1) افتح قائمة Data ومنها اختر Display Data سوف يظهر المربع الحواري التالي



2) ثم اضغط OK . ستجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



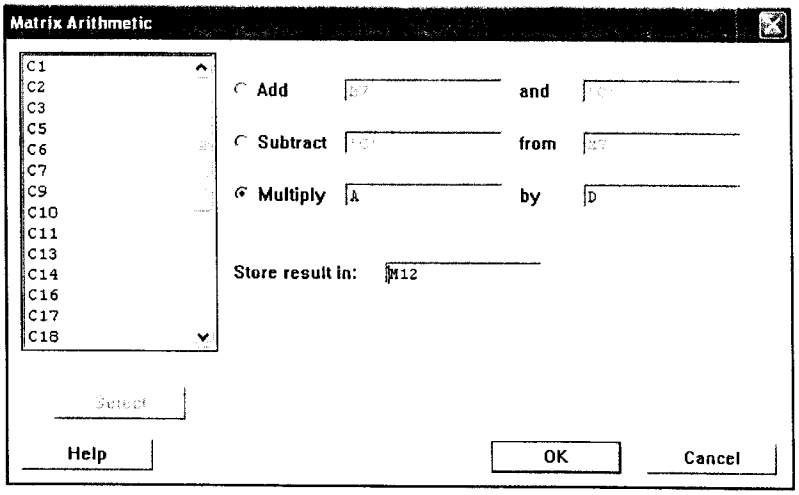
(ب) حاصل ضرب [D × A]

يلاحظ هنا أن الشرط الواجب توافره عند ضرب مصفوفتين [عدد أعمدة المصفوفة الأولى (A) يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية (D)]، هو متوافر بالفعل.

الخطوات :

1) افتح قائمة Calc ، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Arithmetic

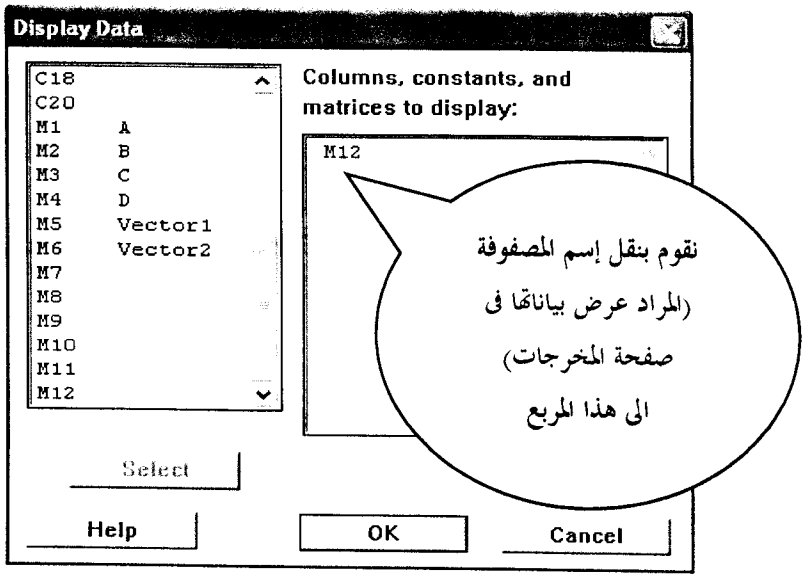
سوف يظهر المربع الحواري التالي:



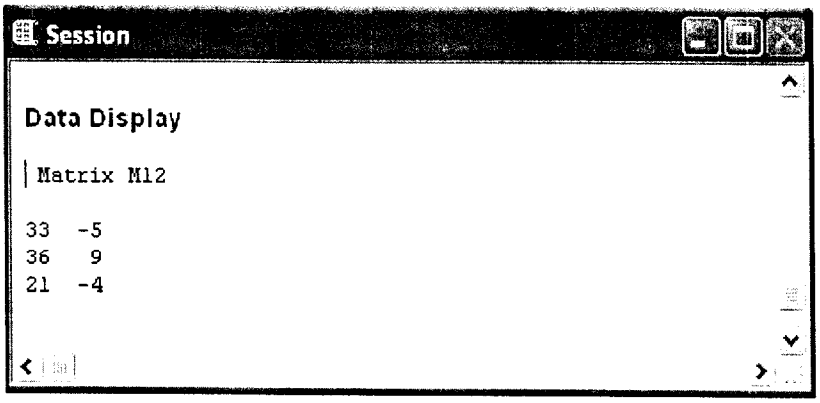
2) ثم اضغط **OK** .

ولعرض مكونات المصفوفة **(M12)** [التي تتضمن ناتج الضرب المطلوب] في نافذة المخرجات **Session** نقوم بالأتي:

أ) افتح قائمة Data ، ومنها اختر Display Data سوف يظهر المربع الحواري التالي:



3) ثم اضغط OK، ستجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



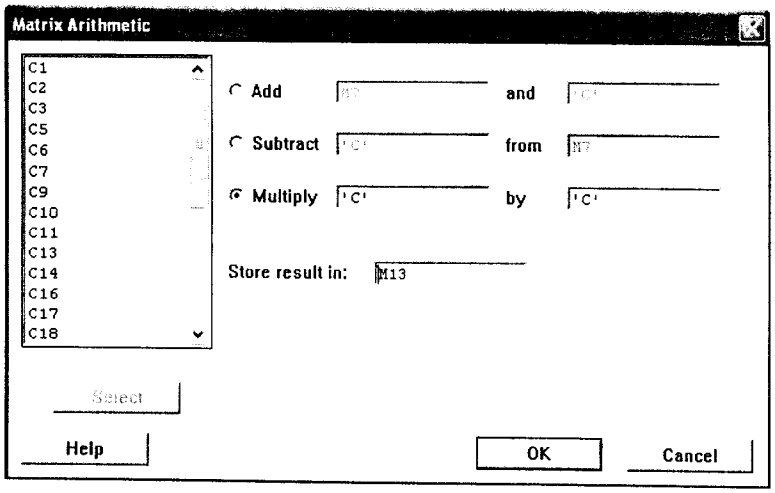
(ج) إيجاد مربع المصفوفة (C):

يلاحظ هنا أن شرط ضرب مصفوفتين (إذ أنه لإيجاد حاصل ضرب مصفوفة في نفسها لابد وأن تكون هذه المصفوفة مربعة بمعنى عدد الأعمدة تساوى عدد الصفوف) .

الخطوات :

أ) افتح قائمة Calc ، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Arithmetic

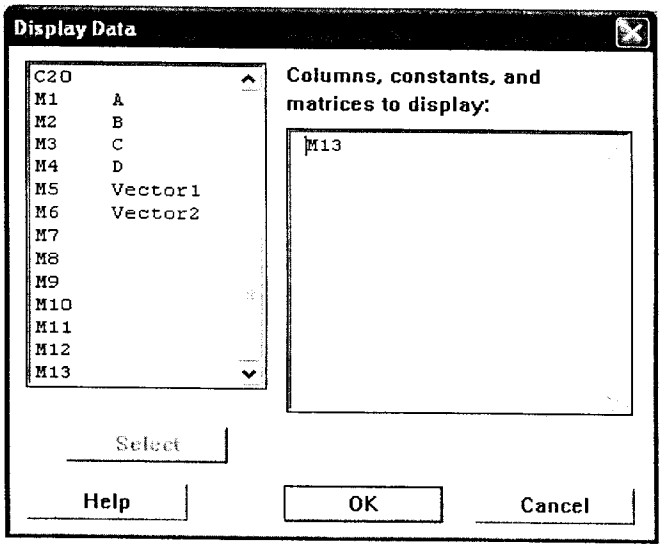
سوف يظهر المربع الحواري التالي:



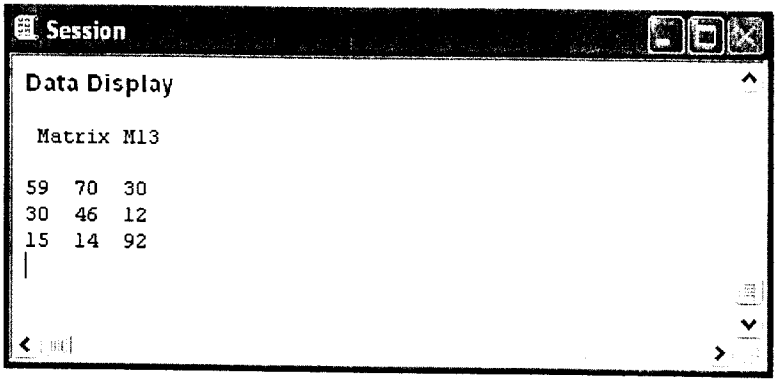
2) ثم اضغط OK .

ولعرض مكونات المصفوفة **(M13)** [التي تتضمن ناتج الضرب المطلوب] في نافذة المخرجات **Session** نقوم بالأتي :

1) افتح قائمة Data ومنها اختر Display Data سوف يظهر المربع الحواري التالي:



2) ثم اضغط OK . سنجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



ثالثاً : إيجاد المصفوفة المبدلة Transpose

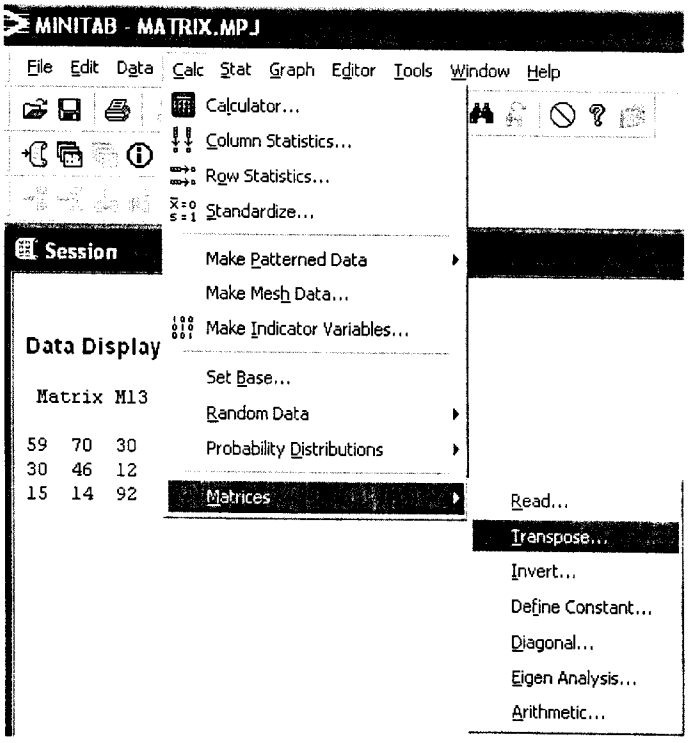
يقصد بالمصفوفة المبدلة: المصفوفة التي نحصل عيها من خلال تبديل الصفوف مكان الأعمدة أو العكس.

مثال [5]

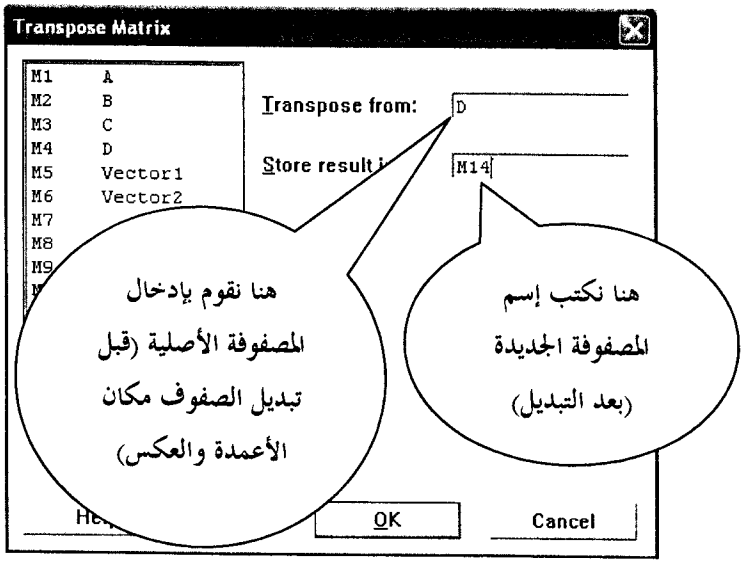
المطلوب إيجاد المصفوفة المبدلة **Transpose** للمصفوفة [D].

الخطوات:

أ) افتح قائمة Calc ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Transpose



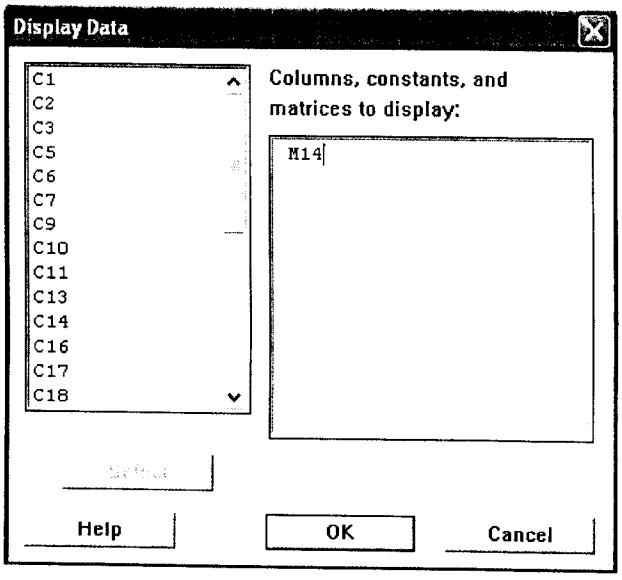
سوف يظهر المربع الحواري التالي:



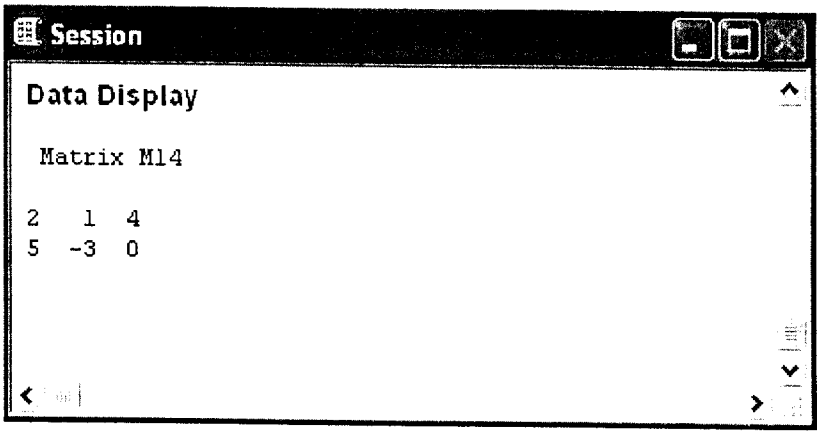
2) ثم اضغط OK .

ولعرض مكونات المصفوفة **(M14)** [المصفوفة المبدلة] في نافذة المخرجات **Session** نقوم بالأتي :

أ) افتح قائمة Data ، ومنها اختر Display Data سوف يظهر المربع الحواري التالي:



2) ثم اضغط OK . ستجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



رابعاً : إيجاد مقلوب المصفوفة Invert

[أ] الحل اليدوي :

تتمثل خطوات إيجاد مقلوب أى مصفوفة يدوياً في :

1) إيجاد محدد المصفوفة (Δ) المراد إيجاد مقلوبها، [طبعاً بشرط ألا يكون ناتج هذا المحدد يساوى صفر].

2) إيجاد مصفوفة المرافقات.

3) إيجاد المصفوفة المبدلة.

4) ثم بضرب مقلوب قيمة المحدد × المصفوفة المبدلة نحصل على مقلوب المصفوفة.

5) وللتحقق من صحة الحل نقوم بضرب المصفوفة الأصلية × المصفوفة المبدلة، فإذا كان الناتج هو مصفوفة الوحدة (مصفوفة قطرية كل

العناصر التي تقع على القطر الرئيسى فيها تساوى الواحد الصحيح وباقي العناصر تساوي الصفر) .

كما يجب ألا ننسى أنه يشترط أن تكون المصفوفة المراد إيجاد مقلوبها مصفوفة مربعة (عدد الأعمدة يساوى عدد الصفوف).

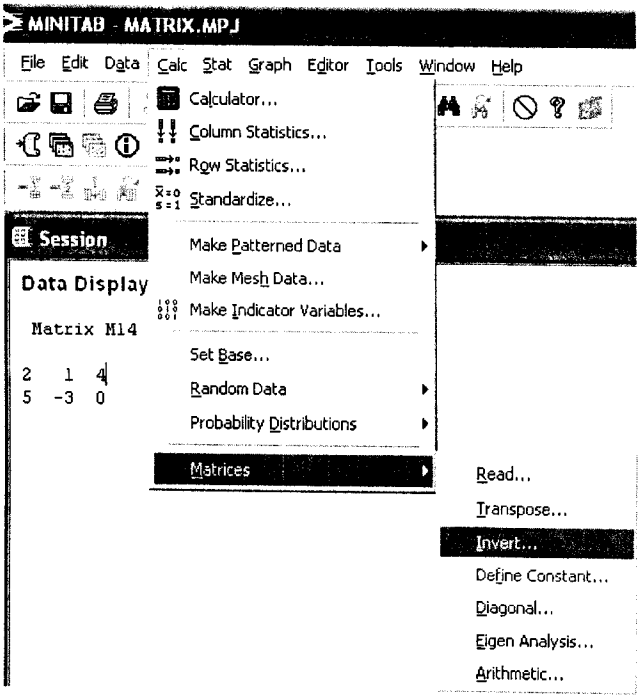
[ب] إيجاد مقلوب المصفوفة بإستخدام برنامج الـ Minitab :

مثال [6]:

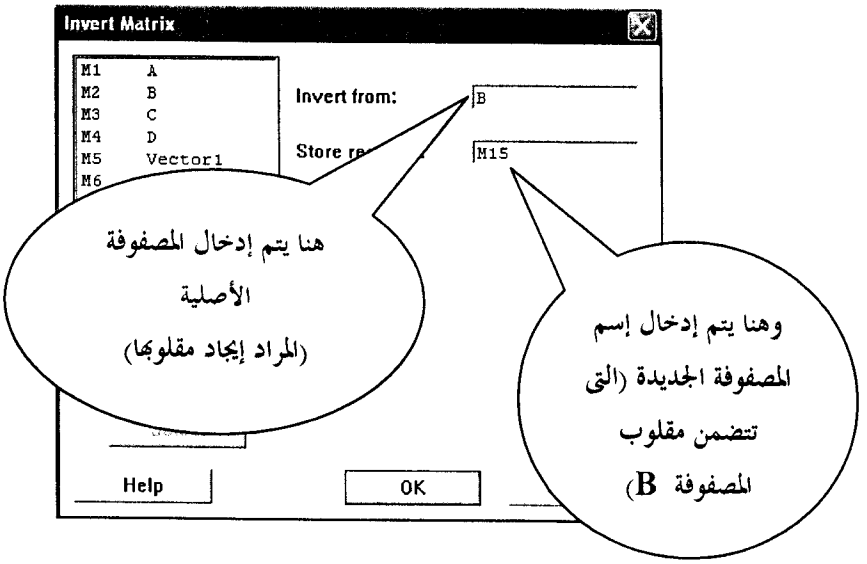
المطلوب إيجاد مقلوب المصفوفة [B].

الخطوات:

أ) افتح قائمة Calc ، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Invert .



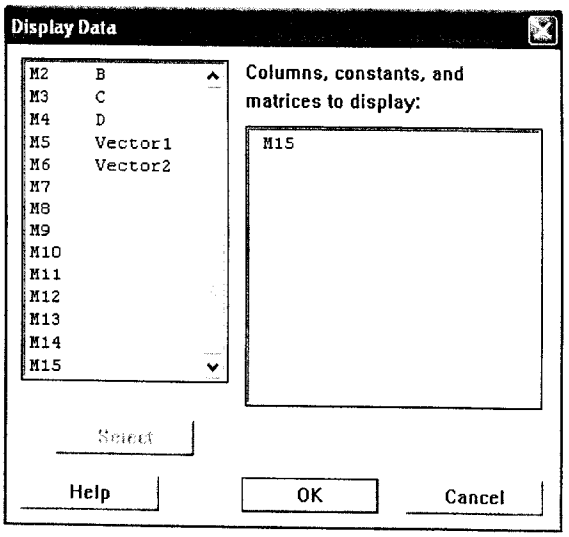
سوف يظهر المربع الحواري التالي:



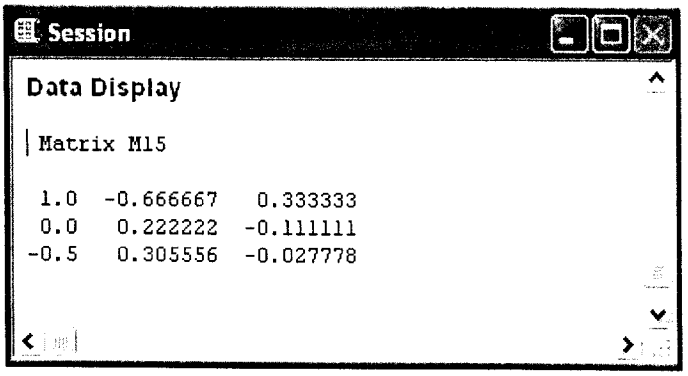
2) ثم اضغط OK .

ولعرض مكونات المصفوفة **(M15)** [التي تتضمن مقلوب المصفوفة] في نافذة المخرجات **Session** نقوم بالأتي :

أ) افتح قائمة Data ، ومنها اختر Display Data ، سوف يظهر المربع الحواري التالي:



2) ثم اضغط OK . ستجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي :

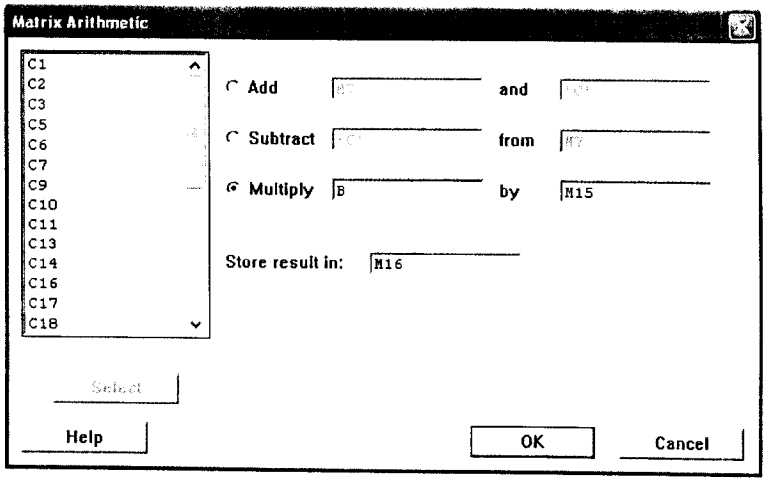


<u>للتأكد من صحة الحل نقوم بضرب المصفوفة الأصلية (**B**) في مقلوب المصفوفة (**M15**)، فإذا كان ناتج الضرب هو مصفوفة الوحدة ، فان هذا الحل صحيحاً :</u>

الخطوات :

أ) افتح قائمة Calc ، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices اختر Arithmetic

سوف يظهر المربع الحواري التالي :

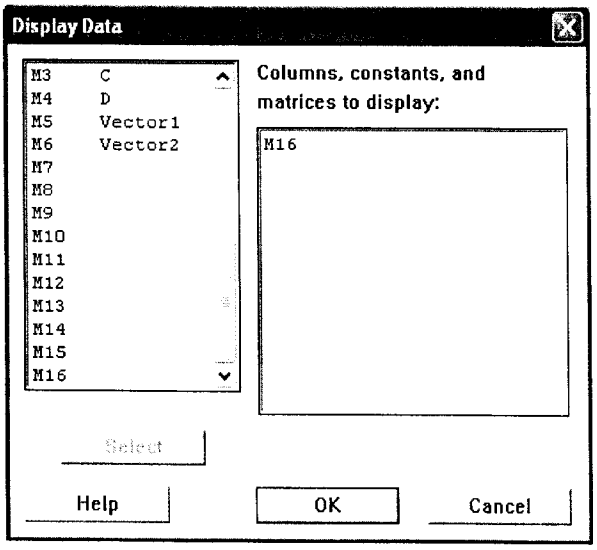


2) ثم اضغط OK .

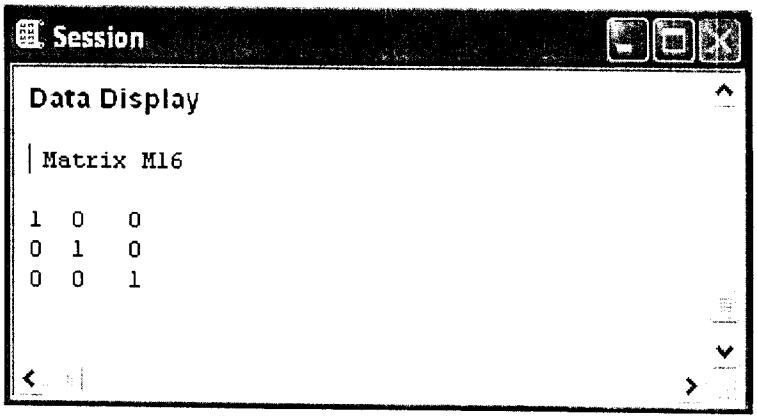
عرض المصفوفة (M16) [التي تتضمن ناتج الضرب المطلوب] في نافذة المخرجات Session نقوم بالأتى:

الخطوات :

1) افتح قائمة Data ، ومنها اختر Display Data سوف يظهر المربع الحواري التالي:



2) ثم اضغط OK، ستجد أنه قد تم عرض بيانات هذه المصفوفة في نافذة المخرجات، كما هو موضح بالشكل التالي:



يلاحظ هنا أن: ناتج الضرب هو مصفوفة الوحدة، وبالتـالي يكون الحل الذي توصلنا اليه صحيحاً .

خامساً : المصفوفة القطرية Diagonal

مفهوم المصفوفة القطرية:

هي مصفوفة مربعة (عدد الصفوف تساوى عدد الأعمدة) وجميع عناصرها تساوى الصفر فيما عدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسى، كما هو موضح بالمصفوفة التالية:

$$M=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}$$

من خلال برنامج الـ Minitab يمكننا عمل مصفوفة قطرية عندما تتوافر لدينا عناصر القطر الرئيسي.

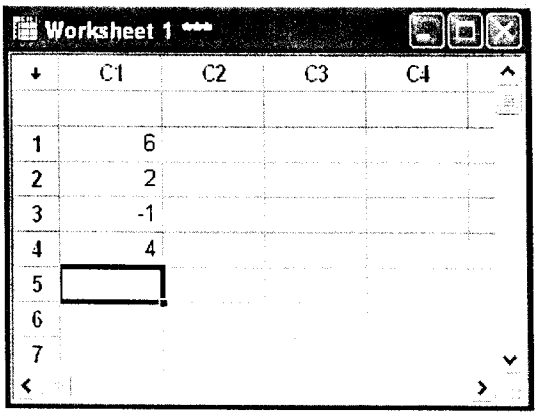
مثال [7] :

المطلوب إدخال مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسى كما يلي:

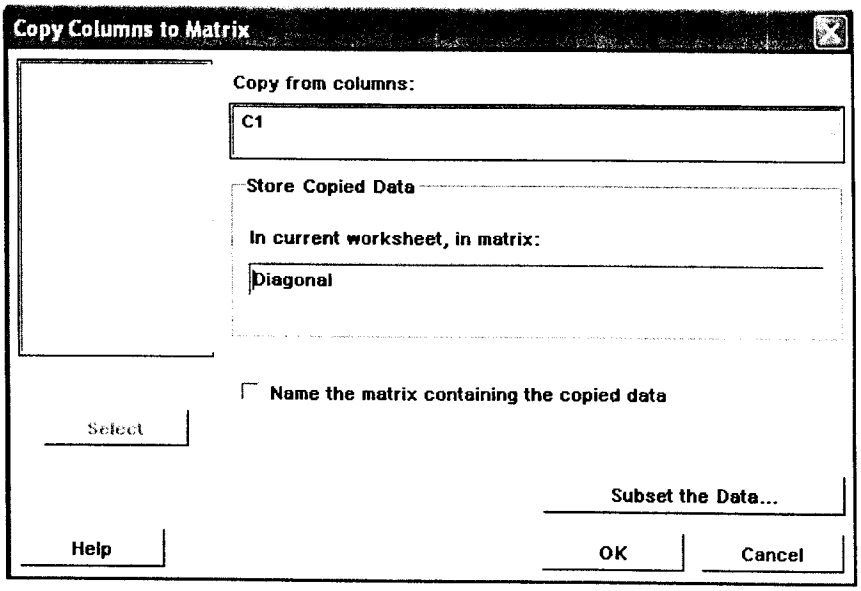
[6 2 1- 4]

الخطوات:

أ) إدخال البيانات الى ورقة العمل Worksheet كما يلى:



2) افتح قائمة Data ، ومن القائمة الفرعية لـ Copy ، اختر الأمر Columns to Matrix ، كما هو موضح بالشكل التالي:



في المربع الحواري الذي أمامك:

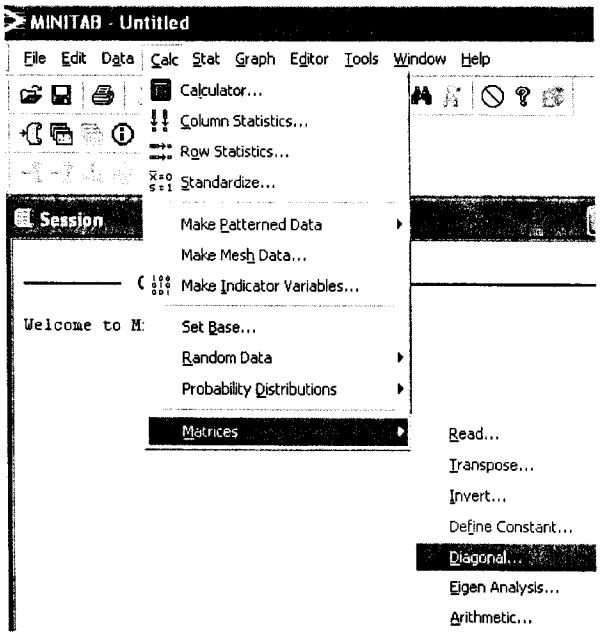
(أ) قم بنقل المتغير (C1) الى المربع الذي بعنوان Copy from columns.

(ب) في المربع الذي بعنوان In current worksheet , in matrix أدخل إسم هذه المصفوفة وهي Diagonal .

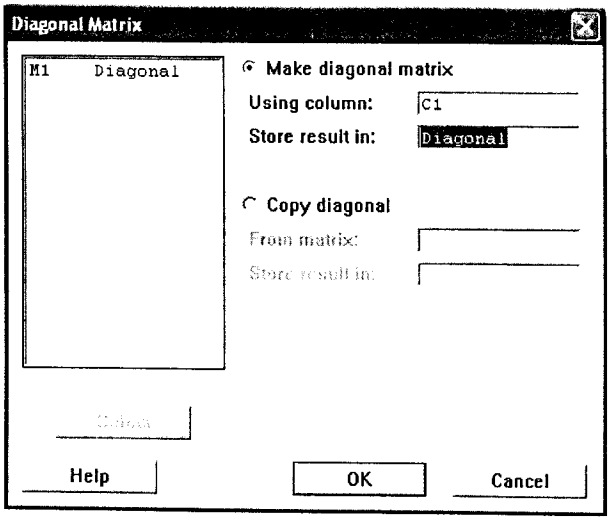
(ج) ثم قم بتعطيل الإختيار Name the matrix containing the copied data

3) ثم اضغط Ok .

4) ثم بعد ذلك: افتح قائمة Calc ، ومن القائمة الفرعية لـ Matrices ، اختر Diagonal .



سوف يظهر المربع الحواري التالي:



```
Welcome to Minitab, press F1 for help.

MTB > Read 2 2 M1.
DATA> 2 5
DATA> 5 7
2 rows read.
MTB > print M1
```

Data Display

```
 Matrix M1

2  5
5  7

MTB > invert m1 m2
MTB > print m2
```

Data Display

```
 Matrix M2

-0.636364   0.454545
 0.454545  -0.181818

MTB > Invert M1 M2.
MTB > print m2
```

Data Display

```
 Matrix M2

-0.636364   0.454545
 0.454545  -0.181818

MTB > Transpose M1 M3.
MTB > print M3
```

Data Display

```
 Matrix M3

2  5
5  7

MTB > transpose M2 M4
MTB > print m4
```

Data Display

```
 Matrix M4

-0.636364   0.454545
 0.454545  -0.181818

MTB > Add M1 M2 m5.
MTB > print m5
```

Data Display

```
 Matrix M5

1.36364  5.45455
5.45455  6.81818
```

Results for: Minitab1.MTW

```
MTB > WSave "C:\Users\melwakeel\Desktop\Minitab1.MTW";
SUBC>   Replace.
Saving file as: 'C:\Users\melwakeel\Desktop\Minitab1.MTW'
MTB > Save  "C:\Users\melwakeel\Desktop\Minitab1.MPJ";
SUBC>   Project;
SUBC>   Replace.
```

05/04/16 11:35:43 ص

```
Welcome to Minitab, press F1 for help.
Retrieving project from file: 'C:\Users\melwakeel\Desktop\Minitab1.MPJ'
```

Results for: Minitab1.MTW

```
MTB > let c3=c1
MTB > let c3=c1+c2
MTB > let c4= c2-c3
MTB > Let c51 = STDEV(C1)
MTB > print c51
```

Data Display

```
C51
   3.16228

MTB > Sample 100 C1 c5;
SUBC>   Replace.
MTB > Sample 100 C1 c5.

* ERROR * Sample size must be less than or equal to the length of the
        * columns when sampling without replacement.

MTB > Sample 4 C1 c6.
MTB > Random 500 c7;
SUBC>   Normal 2 0.5.
MTB > Random 50 c8;
SUBC>   Exponential 0.333.
MTB > CDF c7 c9;
SUBC>   Normal 0.0 1.0.
MTB > Name K1 "z"
MTB > InvCDF 0.975 'z';
SUBC>   Normal 0.0 1.0.
MTB > print z
```

Data Display

```
z    1.95996

MTB > InvCDF 0.995;
SUBC>   Normal 0.0 1.0.
```

Inverse Cumulative Distribution Function

```
Normal with mean = 0 and standard deviation = 1

P( X ≤ x )        x
     0.995  2.57583
```

```
MTB > PDF 3;
SUBC>   Normal 0.0 1.0.
```

Probability Density Function

```
Normal with mean = 0 and standard deviation = 1

x     f( x )
3  0.0044318

MTB > PDF c7 c10;
SUBC>   Normal 0.0 1.0.
MTB > PDF C1 c11;
SUBC>   Normal 0.0 1.0.
MTB > Stop.
```

18/10/16 10:03:56 ص

```
Welcome to Minitab, press F1 for help.
Retrieving project from file: 'C:\Users\melwakeel\Desktop\Minitab1.MPJ.BAK'
MTB >
```