

الفصل الأول

مفاهيم أساسية في علم الإحصاء والاحتمال

علم الإحصاء:

مجموعة من الطرق الرياضية التي تستخدم لجمع وتبويب وتنظيم وتلخيص وعرض المعلومات والبيانات ومن ثم تحليلها وفق طرق وأساليب علمية للحصول على استدلالات وقرارات سليمة.

فروع علم الإحصاء:

أولاً: الإحصاء الوصفي:

هو الفرع المتعلق بطرق جمع وتبويب وتنظيم وتلخيص وعرض المعلومات والبيانات ووصف توزيع البيانات

ثانياً: الإحصاء الاستدلالي:

هو الفرع المتعلق بالطرق المساعدة في إتخاذ قرارات حول مجتمع وذلك عن طريق دراسة عينة إحصائية من ذلك المجتمع.

المجتمع والعينة:

أولاً: المجتمع:

هو المجموعة الكلية من الأشياء (تسمى عناصر المجتمع) ذات خصائص مشتركة ويكون الباحث مهتماً بها حيث سيتم عمل بعض الاستدلالات والنتائج حولها.

ينقسم المجتمع إلى:

1. **المجتمع المحدود:** عدد عناصر هذا المجتمع يكون محدوداً أو منتهياً مثل طلاب كلية العلوم بجامعة الملك سعود.

2. **المجتمع غير المحدود:** عدد عناصر هذا المجتمع يكون غير محدود أو غير منته مثل المجتمع المكون من النجوم في السماء.

ثانياً: العينة:

هي مجموعة مكونة من عدد من أفراد المجتمع يتم اختيارهم بطريقة مناسبة بحيث تمثل المجتمع تمثلاً جيداً وذلك لدراسة صفات المجتمع إذ يستدل بصفات العينة على صفات المجتمع.

حجم العينة: يعرف حجم العينة على أنه عدد أفراد العينة ويرمز له عادة بالرمز n .

المتغيرات:

المتغير هو مقدار كمي أو وصفي ويستخدم لقياس خاصية معينة لعناصر مجتمع أو عينة والتي تختلف من عنصر لآخر.

ومن أمثلة المتغيرات: طول شخص، فصيلة دم لشخص، والمستوى التعليمي لشخص.

أنواع المتغيرات: يمكن تصنيف المتغيرات إلى فئتين رئيسيتين على النحو التالي:

1. متغير كمي:

إن قيم المتغير الكمي عبارة عن أرقام أو قيم عددية تدل على كميات أو أعداد أشياء معينة لأفراد المجتمع.

ومن أمثلة المتغيرات الكمية ما يلي: طول شخص وعدد أولاد شخص.

2. متغير وصفي (أو نوعي):

إن قيم المتغير الوصفي (أو النوعي) عبارة عن صفات أو كلمات تدل فقط على انتماء أفراد المجتمع إلى فئات أو أصناف معينة.

ومن أمثلة المتغيرات الوصفية ما يلي: فصيلة دم لشخص والمستوى التعليمي لشخص.

البيانات:

البيانات هي مجموعة المشاهدات أو الملاحظات المأخوذة من الدراسة الإحصائية.

وتنقسم البيانات إلى نوعين تبعاً لنوع المتغير:

1. بيانات كمية (مثل: بيانات أطوال مجموعة من الأشخاص)

2. بيانات وصفية (مثل: بيانات المستوى التعليمي لمجموعة من الأشخاص)

ومن أمثلة المتغيرات الوصفية ما يلي: فصيلة دم لشخص والمستوى التعليمي لشخص.

المعلمة والإحصاءة:

المعلمة:

هي مقدار (أو خاصية) يتميز بها المجتمع (مثل متوسط أعمار طلاب كلية العلوم). وتحسب المعلمة من المجتمع ولذلك فهي ممقدار مجهول في الغالب ونرغب في معرفته.

الإحصاءة:

مقدار (أو خاصية) تتميز بها العينة (مثل متوسط أعمار عشرة طلاب من طلاب كلية العلوم). وتحسب الإحصاءة من العينة ولذلك فهي مقدار معلوم.

الفصل الثاني

تنظيم البيانات وعرضها

تنظيم البيانات وتلخيصها وعرضها جدولياً:

بعد أن يتم تحديد مجتمع الدراسة والعينة وقياس قيم المتغير على أفراد العينة نحصل على البيانات في صورتها الأولية والتي تسمى **البيانات الخام**.

إن البيانات في صورتها الخام تحتاج إلى تنظيم وتلخيص لكي تتمكن من عرضها بطريقة مناسبة يمكن الاستفادة منها.

ولتصميم جدول التوزيع التكراري للبيانات يلزمنا التأكيد على أن البيانات تنقسم إلى نوعين هما:

1. **بيانات وصفية:** مثل لون الشعر، فصيلة الدم، الجنس، المستوى التعليمي، وغيرها.
 2. **بيانات كمية:** مثل الطول، الوزن، العمر، عدد الأولاد، وغيرها.
- والبيانات الإحصائية سواءً كانت وصفية أو كمية فهي تنظم وتلخص في جداول تسمى الجداول التكرارية. والجدول التكراري عبارة عن جدول يلخص البيانات فيوزعها على فئات (أو فترات) ويحدد عدد البيانات التي تنتمي لكل فئة (تكرار الفئة).

الجدول التكرارية للبيانات الوصفية:

أولاً: الجدول التكراري للبيانات الوصفية:

1. نحصر جميع الفئات وهي الصفات المختلفة في البيانات.
2. ننشئ جدول تفرغ البيانات وهو عبارة عن جدول مكون من ثلاثة أعمدة هي: عمود الفئة (أو الصفة) وعمود العلامات و عمود التكرار.
3. نوجد الجدول التكراري من جدول تفرغ البيانات وذلك بحذف عمود العلامات.

مثال 1: أوجد الجدول التكراري لتقديرات عينة من ستين طالباً معطاة فيما يلي:

D B E C D B D C E A D B C C C
B E C D B D D A E C A D E C C
C D A C E D C C D B B C D E D
D E D D A D D C D C D D B D A

الحل:

التكرار	الفئة أو الصفة (التقدير)

ثانياً: الجدول التكراري النسبي والجدول التكراري المنوي للبيانات الوصفية:

نهتم كثيراً بمعرفة التكرارات النسبية والتكرارات المئوية لكل فئة من فئات الجدول التكراري. فمعرفة التكرار النسبي للفئة أكثر فائدة من مجرد معرفة التكرار.

نعرف التكرار النسبي والتكرار المنوي للفئة كما يلي:

1. التكرار النسبي للفئة = تكرار الفئة \ عدد البيانات

= تكرار الفئة \ مجموع التكرارات

2. التكرار المنوي للفترة = التكرار النسبي x 100%

مثال 2: أوجد الجدول التكراري النسبي والجدول التكراري المنوي في مثال (1).

التكرار المنوي = $(f/n) * 100\%$	التكرار النسبي = f/n	التكرار (f)	الفئة أو الصفة (التقدير)
		6	A
		8	B
		16	C
		22	D
		8	E
		n=60	المجموع

عدد أفراد الأسرة	التكرار
3	5
4	4
5	8
6	3

الجدول يمثل اعداد أفراد الأسرة لـ 20 أسرة أوجدي :

1. عدد الأسر التي عدد أفرادها أقل من 5.

A) 3. B) 5. C) 8. D) 9.

2. النسبة المئوية للأسر التي عدد أفرادها 3 .

A) 25%. B) 45%. C) 35%. D) 5%.

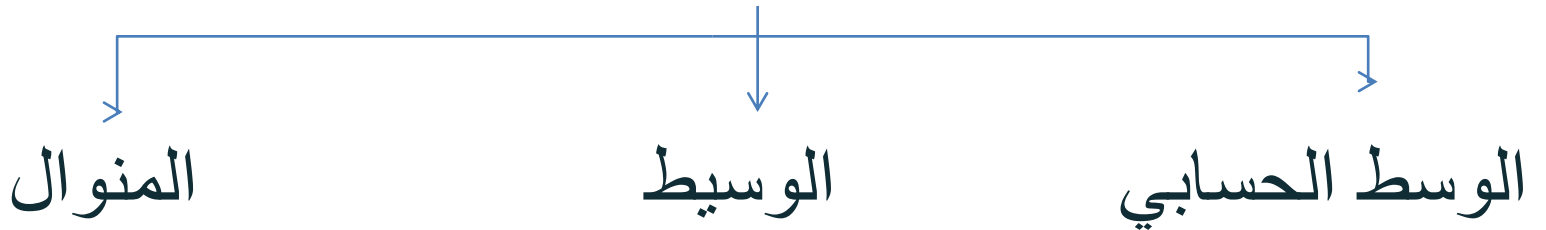
الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

تنقسم المقاييس الإحصائية إلى قسمين:

- مقاييس النزعة المركزية.
- مقاييس التشتت.

أولاً: مقاييس النزعة المركزية



1) الوسط الحسابي

- وهو من أهم مقاييس النزعة المركزية والأكثر استخداماً في الإحصاء و في الحياة العملية.

تعريف:

- إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات للمتغير X وهي x_1, x_2, \dots, x_n فإن الوسط الحسابي (ويرمز له \bar{X}) يساوي مجموع المشاهدات مقسوماً على عددها.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

مثال

أوجد المتوسط الحسابي للملاحظات التالية والتي هي عبارة عن أوزان (بالكيلو جرام)

25 30 40 45 50 55 50

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{25 + 30 + \dots + 50}{7} = 40 \text{ كيلو جرام}$$

• خصائص الوسط الحسابي

• المجموع الجبري لإنحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

• إذا جمعنا أو طرحنا من المشاهدات الأصلية جميعها قيمة ثابتة ولتكن a فإن الوسط الحسابي للملاحظات بعد الجمع يساوي الوسط الحسابي قبل الجمع مضافاً إليه الثابت a .

• أي أن

• الوسط الحسابي (بعد الجمع) = الوسط الحسابي (قبل الجمع) + a

• الوسط الحسابي (بعد الطرح) = الوسط الحسابي (قبل الطرح) - a

• إذا ضربنا أو قسمنا من المشاهدات الأصلية جميعها قيمة ثابتة ولتكن b فإن الوسط الحسابي للملاحظات بعد الضرب يساوي الوسط الحسابي قبل الضرب مضروباً في الثابت b .

• أي أن:

• الوسط الحسابي (بعد الضرب) = الوسط الحسابي (قبل الضرب) * b

• الوسط الحسابي (بعد القسمة) = الوسط الحسابي (قبل القسمة) / b

• مثال

• إذا كان المتوسط الحسابي للملاحظات x_1, x_2, \dots, x_n هو 15

فإن المتوسط الحسابي للملاحظات $\frac{x_1 - 10}{2}, \frac{x_2 - 10}{2}, \dots, \frac{x_n - 10}{2}$

هو

مميزات الوسط الحسابي

- مقاييس سهل ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.
- يأخذ في الإعتبار جميع القيم محل الدراسة.
- المتوسط وحيد لمجموعة البيانات الواحدة

عيوب الوسط الحسابي

- يتأثر بالقيم المتطرفة (وهي القيم الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً)
- يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية.

المتوسط المرجح:

في بعض الأحيان تكون المشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n مقرونة بالأوزان w_1, w_2, \dots, w_n على التوالي وفي هذه الحالة نعرف الوسط المرجح

$$\bar{x}_w = \frac{\sum x w}{\sum w} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

• مثال

أوجد المتوسط المرجح لدرجات أحد الطلاب في مقررات الإحصاء والفيزياء والرياضيات باعتبار أن الوزن هو عدد الساعات للمقرر كما يلي

الدرجة x	عدد الساعات w	المقرر
40	2	إحصاء
65	4	فيزياء
70	3	رياضيات

الحل :

2) الوسيط:

عند ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً يكون الوسيط هي القيمة التي تقع قبلها 50% من المشاهدات في الترتيب و 50% من المشاهدات بعدها في الترتيب أي أنها القيمة التي تقسم البيانات إلى قسمين متساويين (المشاهدة التي تقع المنتصف).

• مثال:

• أوجد الوسط لمجموعة الأوزان (بالكيلو جرام) التالية

8.3 5.4 2.5 2.5 7.1

مثال:

أوجد الوسط لمجموعة الأوزان (بالكيلو جرام) التالية

7.1 2.5 2.5 5.4 9.2 8.3

مميزات الوسيط

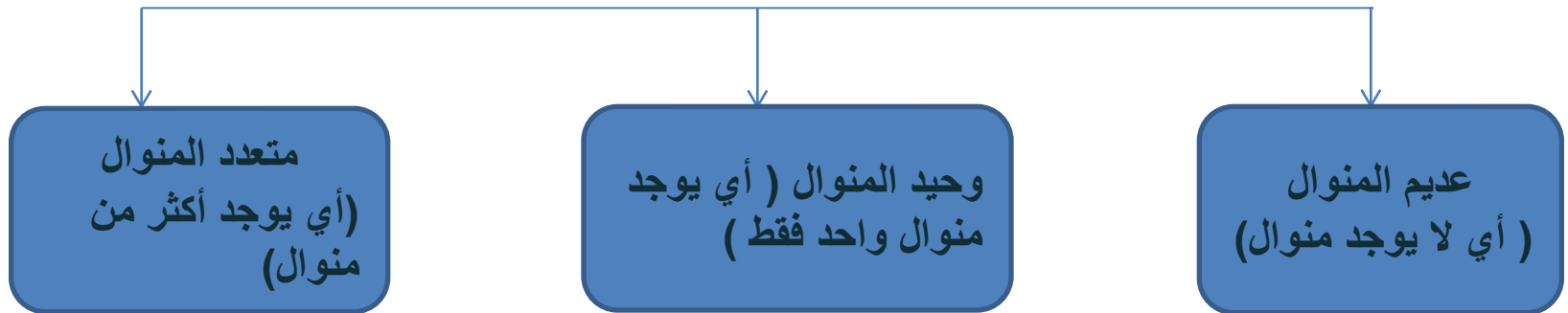
1. لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
2. يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية التي يمكن ترتيبها.
3. الوسيط وحيد لمجموعة البيانات الواحدة.
4. الوسيط سهل التعريف والحساب

عيوب الوسيط

1. لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.
2. لا يمكن حساب الوسيط للبيانات الوصفية الغير قابلة للترتيب

3) المنوال

- وهو القيمة الأكثر تكراراً بين البيانات (المشاهدات).
وينقسم المنوال إلى:



• مثال

الجدول التالي يتضمن بيانات إحدى الدراسات التي طبقت على خمسة أشخاص لقياس العمر بالسنة والوزن بالكيلوجرام والطول بالسنتيمتر وفصيلة الدم. أوجد المنوال للبيانات المختلفة:

رقم الشخص	1	2	3	4	5
العمر	25	20	25	30	35
الوزن	70	55	65	70	65
الطول	164	162	155	165	158
فصيلة الدم	O	A	B	A	AB

مميزات المنوال

- هو مقياس من السهل حسابه.
- اقل تأثر من المتوسط بالقيم الشاذة.
- يمكن إيجاده للبيانات الكمية والوصفية.

عيوب المنوال

- لا يأخذ جميع القيم في الإعتبار عند حسابه.
- قد يكون لبعض البيانات أكثر من منوال وبذلك لا يمكن تحديد قيمة واحدة للمنوال.
- بعض البيانات لا يكون لها منوال.

الربيعات والعشيرات والمئينات

- حيث هناك ثلاث ربيعات (Quartiles) وهي كالتالي
- Q_1 : الربع الأول : القيمة التي تكون فيها 25% من البيانات أقل منها (قبلها) و 75% من البيانات أكبر منها (بعدها).
- Q_2 : الربع الثاني : القيمة التي تكون فيها 50% من البيانات أقل منها (قبلها) و 50% من البيانات أكبر منها (بعدها) وهو يساوي الوسيط.
- Q_3 : الربع الثالث : القيمة التي تكون فيها 75% من البيانات أقل منها (قبلها) و 25% من البيانات أكبر منها (بعدها).

- $D1 =$ العشير الأول
- $=$ القيمة التي يسبقها $\frac{1}{10}$ من البيانات أو 10% من البيانات
- $D2 =$ العشير الثاني
- $=$ القيمة التي يسبقها $\frac{2}{10}$ من البيانات أو 20% من البيانات
- وهكذا
- $D9 =$ العشير التاسع
- $=$ القيمة التي يسبقها $\frac{9}{10}$ من البيانات أو 90% من البيانات

• $P1 =$ المئين الأول

• = القيمة التي يسبقها $\frac{1}{100}$ من البيانات أو 1 % من البيانات

• $P2 =$ المئين الثاني

• = القيمة التي يسبقها $\frac{2}{100}$ من البيانات أو 2 % من البيانات

..... وهكذا

• $P99 =$ المئين التاسع والتسعين

• = القيمة التي يسبقها $\frac{99}{100}$ من البيانات أو 99% من البيانات

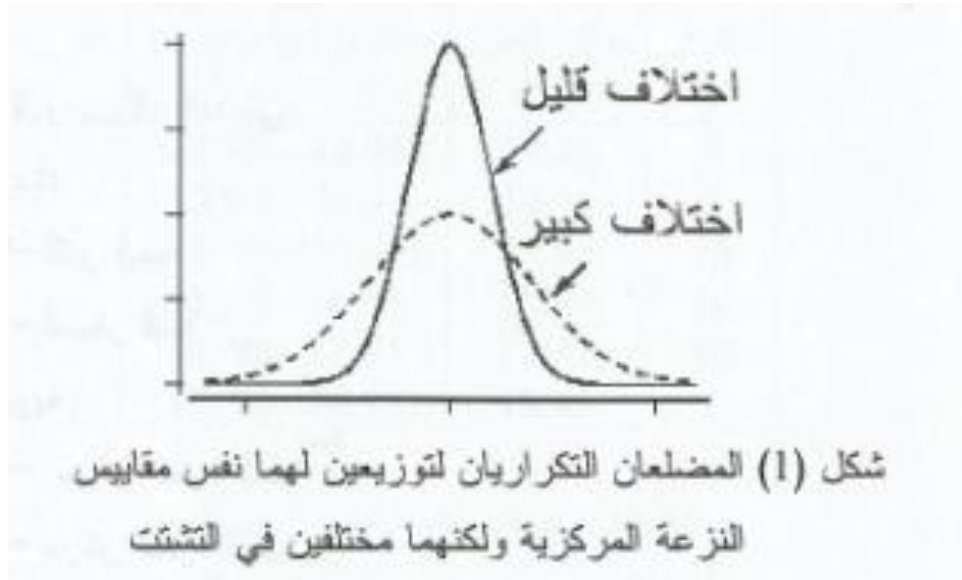
الفصل الرابع

مقاييس التشتت

مثال 1: الجدول التالي يوضح مجموعتين لهما نفس المتوسط $\bar{x} = 60$ ونفس الوسيط $Med=60$ ونفس المنوال $Mod=60$ ولكنهما مختلفان في طبيعة التشتت.

المجموعة	البيانات	شكل انتشار البيانات
الأولى	59,61,62,60,58,60	<p>60</p>
الثانية	50,60,66,54,60,70	<p>60</p>

مثال 2: الشكل التالي يوضح المصلعين التكرارين لمجموعتين من البيانات لهما نفس مقاييس النزعة المركزية ولكنهما مختلفان في طبيعة التشتت.



مقاييس التشتت:

- المدى Range
- نصف المدى الربيعي Semi-Inter-quartile Range
- التباين Variance
- الانحراف المعياري Standard deviation
- معامل الاختلاف (التغير) Coefficient of Variation

المدى (Range):

يعرف المدى لمجموعة من البيانات أنه الفرق بين أكبر قيمه و أصغر قيمه أي

$$Range = X_{max} - X_{min}$$

مثال 3: أوجدى المدى للمشاهدات التالية والتي هي عبارة عن أوزان (بالكيلوجرام) مجموعته من
مكونه من سبعة أشخاص 25 30 40 45 35 55 50 .

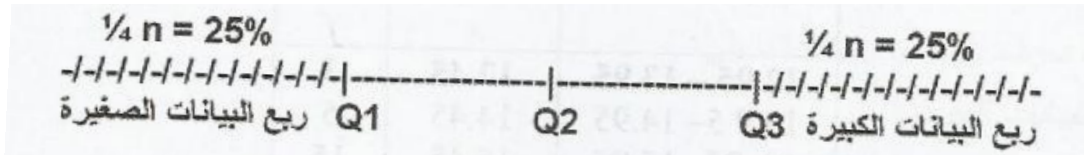
مميزات وعيوب المدى:

- يتميز المدى بسهولة التعريف والحساب .
- يعيب المدى العيوب التالية :
 1. يتأثر المدى بالقيم الشاذة أو المتطرفه
 2. لا يأخذ المدى في الاعتبار جميع البيانات

ملاحظة:

- 1- وحدة المدى هي نفس وحدة البيانات الأصلية.
- 2- نظرا لان المدى يعتمد فقط على أكبر وأصغر قيمة ولا يأخذ في الاعتبار القيم الأخرى فهو مقياس غير جيد لقياس التشتت.

نصف المدى الربيعي:



ويعرف بالصيغة التالية:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

حيث Q_1 هو الربع الأول و Q_3 هو الربع الثالث.

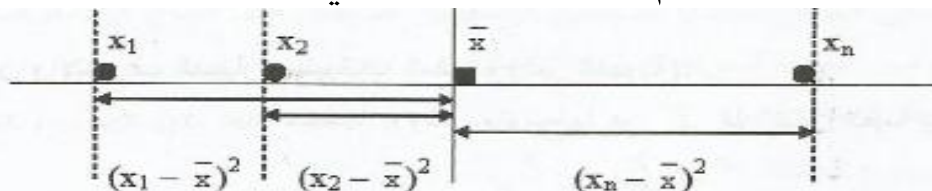
مميزات و عيوب نصف المدى الربيعي :

- 1- من المميزات أنه لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
- 2- من العيوب أنه لا يأخذ في الاعتبار جميع البيانات .

ملاحظة: وحدة نصف المدى الربيعي هي نفس وحدة البيانات الأصلية.

التباين:

يعرف التباين أنه متوسط مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي ويرمز له S^2 الشكل التالي يبين مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابي.



والجدول التالي يلخص طريقة حساب انحرافات ومربعات انحرافات القيم عن المتوسط.

x_1	x_2	...	x_n	القيم (البيانات)
$x_1 - \bar{x}$	$x_2 - \bar{x}$...	$x_n - \bar{x}$	انحرافات القيم عن المتوسط
$(x_1 - \bar{x})^2$	$(x_2 - \bar{x})^2$...	$(x_n - \bar{x})^2$	مربع انحرافات القيم عن المتوسط

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

أي قانون التباين يصبح

$$S^2 = \frac{1}{n - 1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 \right)$$

وهناك صيغ أخرى:

حيث الصيغة الثانية تستخدم أكثر لسهولة ولأنها أكثر دقة.

الانحراف المعياري:

الجذر التربيعي الموجب للتباين ويرمز له بالرمز S .

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

ملاحظة:

1. $S^2 \geq 0$ (دائماً) وكذلك $S \geq 0$ (دائماً).
2. $S = 0 \Leftrightarrow S^2 = 0 \Leftrightarrow$ جميع قيم العينة متساوية.
3. وحدة التباين هي نفس وحدة البيانات الأصلية مربعة.
4. وحدة الانحراف المعياري هي نفس وحدة البيانات الأصلية.

بعض خصائص التباين والانحراف المعياري

الانحراف	التباين	المشاهدات
S	s^2	x_1, x_2, \dots, x_n
S	s^2	$x_1 \pm b, x_2 \pm b, \dots, x_n \pm b$
$ a s$	$a^2 s^2$	ax_1, ax_2, \dots, ax_n
$ a s$	$a^2 s^2$	$ax_1 \pm b, ax_2 \pm b, \dots, ax_n \pm b$

مثال 6: أوجد تباين وانحراف العينة لمجموعة الأوزان (بالكيلوجرام) التالية:

7.1, 2.5, 2.5, 5.4, 8.3

أولاً: نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{25.8}{5} = 5.16$$

نستخدم القانون $s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 \right)$ لحساب التباين

$$s^2 = \frac{1}{5-1} (160.96 - 5(5.16)^2)$$

$$s^2 = 6.958$$

حساب الانحراف $S = \sqrt{6.958} = 2.6378$

كما يمكن استخدام الآلة الحاسبة..

x_i	x_i^2
7.1	50.41
2.5	6.25
2.5	6.25
5.4	29.16
8.3	68.89
Total= 25.8	160.96

مقاييس التشتت التي ذكرت سابقا تكون غير مناسبة لمقارنة تجانس مجموعات البيانات المختلفة في الحالتين التاليتين:

- 1- إذا كانت وحدتا المتغيرين مختلفين حيث لا يستطيع مقارنة الوحدات المختلفة ببعض.
- 2- إذا كان متوسطا المتغيرين مختلفين وذلك لأن تباين توزيع المتغير ذي المتوسط الصغير ينزع لأن يكون صغيرا والعكس بالعكس.

معامل الاختلاف:

أحد مقاييس التشتت النسبي ويستخدم لمقارنة التشتت النسبي أو التجانس لمجموعة البيانات المختلفة

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}}$$

مثال 11: الجدول أدناه يتضمن بيانات إحدى الدراسات التي طبقت على خمسة أشخاص لقياس الوزن (بالكيلوجرام) والطول (السنتمتر). أي البيانات أكثر تشتتاً نسبياً (أقل تجانساً)؟ بيانات الأوزان أم بيانات الأطوال؟

رقم الشخص	1	2	3	4	5
الأوزان	69	59	65	67	65
الأطوال	164	162	155	165	158

نوجد المتوسط والانحراف من الآلة الحاسبة.

البيانات	المتوسط \bar{x}	الانحراف المعياري S	معامل الاختلاف C.V
الأوزان	65.0 kg	3.7417 kg	0.0576
الأطوال	160.8 cm	4.2071 cm	0.026

بما أن معامل الاختلاف لبيانات الأوزان أكبر من معامل الاختلاف لبيانات الأطوال فإن التشتت النسبي لبيانات الأوزان أكبر من التشتت النسبي لبيانات الأطوال . أي أن بيانات أقل تجانساً من بيانات الأطوال.

نظرية تشيبيشيف:

تعطي حد أدنى لنسبة البيانات الواقعة في فترة معينة عند معرفة متوسط البيانات وانحرافها المعياري دون الحاجة لمعرفة البيانات الأصلية.

■ نظرية:

إذا كان لدينا عينة من البيانات متوسطها \bar{x} و انحرافها المعياري S فإن نسبة البيانات الواقعة في الفترة $(\bar{x}-ks, \bar{x}+ks)$ لا يقل عن

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

حيث $k > 1$.

ملاحظات:

1. تطبق نظرية تشيبيشيف للفترة التي منتصفها هو المتوسط.

2. تستخدم نظرية تشيبيشيف بطريقتين

أ. تحديد النسبة التقريبية لعدد البيانات الواقعة في فترة معينة

ب. تحديد فترة تقع فيها ما لا يقل عن نسبة معينة

مثال 12: إذا كان لدينا مجموعة من البيانات متوسطها 7 وانحرافها المعياري 5 فما هي نسبة

البيانات الواقعة في الفترة (-4,18)



مثال 13: إذا كان لدينا مجموعة من البيانات متوسطها 7 وانحرافها المعياري 5 فأوجد فترة يقع فيها ما لا يقل عن 75% من البيانات.

الدرجات (القيم) المعيارية:

تستخدم لمقارنة البيانات في المجموعات المختلفة

لتكن x_1, x_2, \dots, x_n عينة من البيانات حجمها n ومتوسطها \bar{x} وانحرافها المعياري S . نعرف

الدرجة (القيمة) المعيارية للملاحظة x_i بالصيغة التالية:

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$$

ملاحظة: القيمة $Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$ هي الدرجة المعيارية للملاحظة الأصلية x_i

مثال 14: إذا كان لدينا مجموعة من البيانات متوسطها 7 وانحرافها المعياري 5 فأوجد:

1. الدرجة المعيارية للقيمة $x=9$.

2. القيمة الأصلية للدرجة المعيارية $z=0.1$.

مثال (15)

إذا كانت درجة أحد الطلاب في مقرر الاحصاء تساوي 82 ودرجته في مقرر الرياضيات 89 وإذا كان متوسط درجات الطلاب في مقرر الرياضيات يساوي 81 بانحراف معياري يساوي 16 ففي اي المقررين كان أداء الطالب أفضل

للبيانات التالية أوجد: 5, 7, 2, 5, 10, 14

(3) الوسط الحسابي

- A) 6.24. B) 7.17. C) 8.3. D) 8.91.

(4) الوسيط

- A) 5. B) 6. C) 7. D) 10.

(5) المنوال

- A) 2. B) 5. C) 14. D) 10.

(6) التباين

- A) 4.26. B) 18.17. C) 12.11. D) 5.65.

(7) المدى

- A) 9. B) 12. C) 14. D) 10.

الفصل الخامس

طرق العد

القواعد الأساسية لطرق العد:

أولاً: قاعدة الضرب:

$$n = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_r$$

مثال 1: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاثة مقررات: الأول في الإحصاء والثاني في الرياضيات والثالث في الفيزياء إذا علم أن هناك 3 مقررات مختلفة للإحصاء و مقررين مختلفين للرياضيات و مقررين مختلفين للفيزياء.

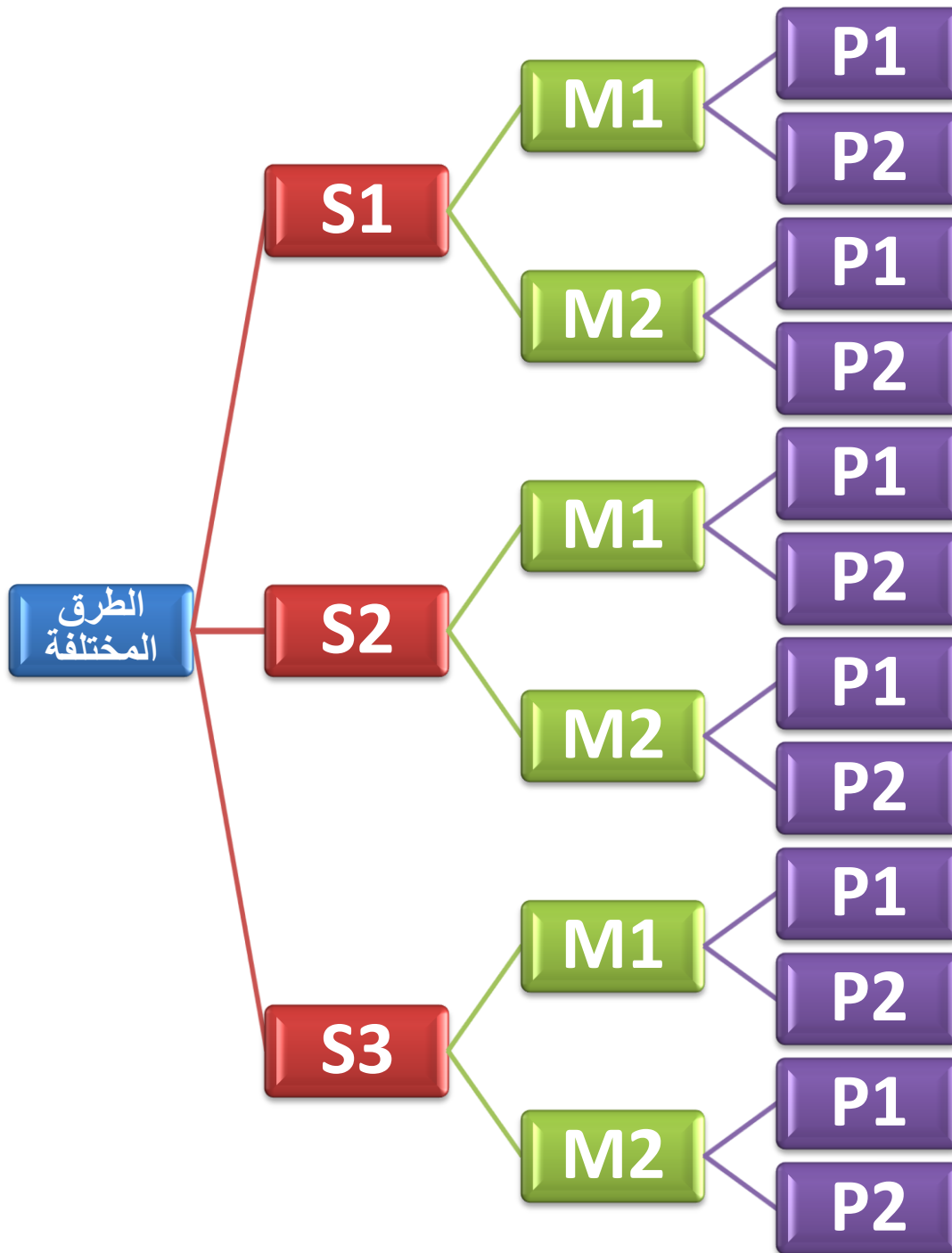
عدد طرق اختيار مقرر الإحصاء يساوي $n_1 = 3$

عدد طرق اختيار مقرر الرياضيات يساوي $n_2 = 2$

عدد طرق اختيار مقرر الفيزياء يساوي $n_3 = 2$

باستخدام قاعدة الضرب يكون عدد الطرق المختلفة لاختيار المقررات الثلاثة يساوي

$$n = 3 \times 2 \times 2 = 12$$



ثانياً: قاعدة الجمع:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

مثال 2: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقرراً واحداً فقط من الإحصاء أو الرياضيات أو الفيزياء إذا علم أن هناك 3 مقررات مختلفة للإحصاء و مقررين مختلفين للرياضيات و مقررين مختلفين للفيزياء.

عدد طرق اختيار مقرر الإحصاء يساوي $n_1 = 3$

عدد طرق اختيار مقرر الرياضيات يساوي $n_2 = 2$

عدد طرق اختيار مقرر الفيزياء يساوي $n_3 = 2$

وحيث أن العمليات متنافية وباستخدام قاعدة الجمع يكون عدد الطرق المختلفة لاختيار المقرر الثلاثة يساوي

$$n = 3 + 2 + 2 = 7$$

التباديل:

التبديلة هي ترتيب لعدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة مع مراعاة الترتيب.

مثال 3:

1. كم عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحتوي كل ترتيبية على حرفين؟ أو بعبارة أخرى بكم

طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C.

عدد طرق اختيار الحرف الأول $n_1 = 3$

عدد طرق اختيار الحرف الثاني $n_2 = 2$

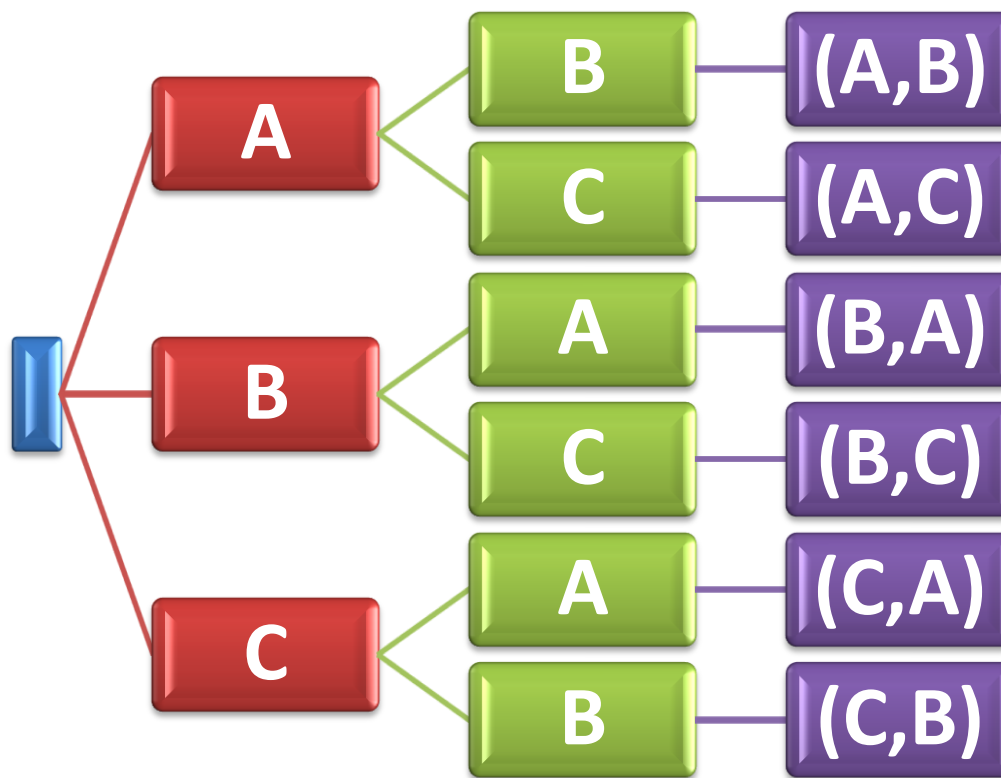
باستخدام قاعدة الضرب يكون عدد طرق ترتيب حرفين من الحروف يساوي:

$$n = n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6$$

مثال 3:

2. أوجد التباديل المختلفة لحرفين من الحروف A, B, C.

(A,B), (A,C), (B,A), (B,C), (C,A), (C,B)



نتيجة:

عدد تباديل n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة يرمز له بالرمز nPr ويعطى بالصيغة التالية:

$$nPr = \frac{n!}{(n - r)!}$$

ملاحظات:

1. يرمز لمضروب العدد n بالرمز $n!$ ويعرف

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$0! = 1 \quad .2$$

$$nPn = n! \quad .4$$

$$nP1 = n \quad .5$$

مثال 4: أوجد

$$7P3 =$$

$$5P5 =$$

$$5! =$$

مثال 6:

1. بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 طلاب على 5 مقاعد في صف واحد؟

$$5P5 =$$

❖ عدد ترتيب n من الأشياء المختلفة في صف هو: $n!$

2. بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 طلاب على 3 مقاعد في صف واحد؟

$$5P3 =$$

تطبيقات على التباديل:

1. السحب بإرجاع:

عدد الطرق المختلفة هو

2. السحب بدون إرجاع:

عدد الطرق المختلفة هو

$$n \times n \times \dots \times n = n^r$$

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 7: بكم طريقة يمكن سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة؟

مثال 8: بكم طريقة يمكن سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة؟

التوافيق:

التوفيقه هي كل مجموعه يمكن اختيارها من مجموعه من عدة اشياء بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة الترتيب.

نتيجة:

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة فإن عدد التوافيق التي يمكن تكوينها بحيث تحتوي كل توفيقه على r عنصر يرمز له بالرمز nCr أو $\binom{n}{r}$ ويعطى بالصيغة التالية:

$$\binom{n}{r} = nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

■ ملاحظة:

$$1. \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{0} = 1$$

$$2. \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

القاعدة الأساسية للعد

عمليات متنافية

قاعدة الجمع "+"

عملية تتم بمراحل

قاعدة الضرب "x"

ليس للترتيب أهمية

$${}_n C_r = \binom{n}{r}$$

التوافق

لترتيب أهمية

التباديل

السحب بدون إرجاع

$${}_n P_r$$

"التكرار غير ممكن"

السحب بإرجاع

$$n^r$$

"التكرار ممكن"

مثال 9:

1. ${}^5C_3 =$

2. ${}^4C_0 =$

3. ${}^7C_7 =$

4. ${}^7C_1 =$

مثال 10: بكم طريقة يمكن اختيار حرفين (بدون مراعاة الترتيب) من مجموعة الحروف A, B, C ؟

التباديل داخل أشياء متشابهة:

إذا كان هناك n من الأشياء مكونة من r مجموعة بحيث أن المجموعة رقم 1 مكونة من n_1 من العناصر المتشابهة والمجموعة رقم 2 مكونة من n_2 من العناصر المتشابهة وهكذا....

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

مثال 11: بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY.

مثال 12: بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة STATISTICS.

مثال 13: بكم طريقة يمكن توزيع 8 طلاب على النحو التالي: 4 طلاب لتخصص الإحصاء و 3 طلاب لتخصص الرياضيات و طالب واحد لتخصص الفيزياء.

8) شخص له 11 صديق بكم طريقة يمكن أن يدعو خمسة أصدقاء إلى العشاء.

A) 462. B) 11. C) 55440. D)48828125.

9) كم عدد الكلمات المكونة من 3 أحرف من 8 حروف (بشروط عدم تكرار الحرف)

A) 56. B) 336. C) 512. D)8.

10) كم عدد الكلمات المكونة من 3 أحرف من 8 حروف (مع إمكانية تكرار الحرف)

A) 56. B) 336. C) 512. D)8.

11) بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة deep.

A) 24. B) 12. C) 6. D)256.

مباديء الإحتمال

إن كلمة الاحتمال تستخدم كثيراً في حياتنا اليومية. فمثلاً يقال أن من المحتمل نزول المطر اليوم. ويقال من المستحيل نجاح من لم يحضر الاختبار, وهكذا. إن كلمة الاحتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة حدوث حادثة معينة غير مؤكدة الحدث. ولذلك نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس كمية تقيس بمقياس الاحتمال وقيمة هذا المقياس تتراوح بين الصفر والواحد. فكلما زادت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الواحد. وكلما قلت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الصفر.

□ التجربة العشوائية:

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

1. جميع النتائج للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.
2. لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.
3. يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

□ فضاء (فراغ) العينة:

فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة. ونرمز لفضاء العينة بالرمز S ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $n(S)$.

□ نقطة العينة:

هي أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنها عنصر من عناصر فضاء العينة S .

□ مثال (1):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

1. تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.
2. تجربة قذف قطعتي نقود معاً وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

□ مثال (2):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

1. تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.
2. تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكل رمية.

□ الحادثة أو الحدث:

تعرف الحادثة على أنها مجموعة جزئية من فضاء العينة S .

ملاحظة:

1. A حادثة إذا فقط إذا كانت $A \subseteq S$
2. يقال بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A .
3. الحادثة المستحقة $\emptyset \subseteq S$ حيث أن \emptyset هي المجموعة الخالية.
4. الحادثة المؤكدة $S \subseteq S$.
5. يرمز لعدد عناصر الحادثة A بالرمز $n(A)$. ونقول بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A .

□ مثال (3)

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي فإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة S .

$$A = \{ \text{ظهور عدد زوجي} \}$$

$$B = \{ \text{ظهور عدد فردي} \}$$

$$C = \{ \text{ظهور عدد أقل من ستة} \}$$

$$\phi = \{ \text{ظهور عدد سالب} \}$$

$$S = \{ \text{ظهور عدد موجب} \}$$

□ مثال (4)

أحسب الحوادث التالية و عدد عناصرها ثم مثلها باستخدام أشكال فن وذلك في تجربة قذف قطعة النقود مرتين متتاليتين:

$$A = \{ \text{الحصول على صورة في الرمية الأولى} \}$$

$$B = \{ \text{الحصول على كتابة في الرمية الأولى} \}$$

$$C = \{ \text{الحصول على صورة واحدة على الأقل} \}$$

□ مثال (5)

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و (y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية:

$$A = \{(x, y) : x + y < 4\}$$

$$B = \{(x, y) : x = y\}$$

$$C = \{(x, y) : x = 5\}$$

$$D = \{(x, y) : x + y = 1\}$$

□ العمليات على الحوادث:

بما أن فضاء العينة ما هو إلا مجموعة والحوادث عبارة عن مجموعات جزئية منها فإن جميع العمليات على المجموعات تنطبق على الحوادث.

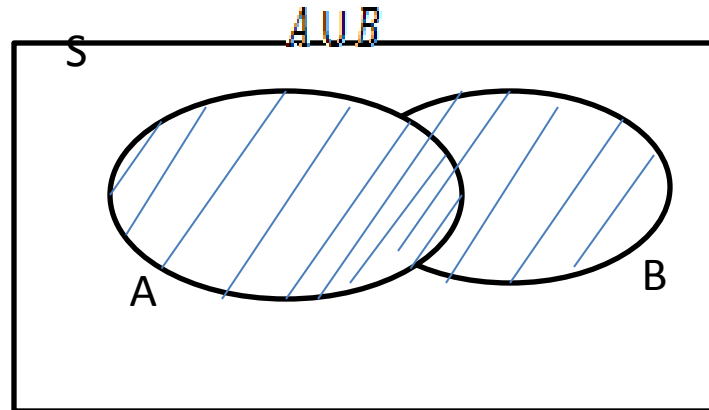
□ العمليات الأساسية على الحوادث

1. اتحاد حادثتين:

اتحاد حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A \cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معاً. وتقع الحادثة $A \cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل أي إذا وقعت A أو وقعت B أو إذا وقعت A و B معاً.

وباستخدام المجموعات فإن اتحاد الحادثتين A و B هو

$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

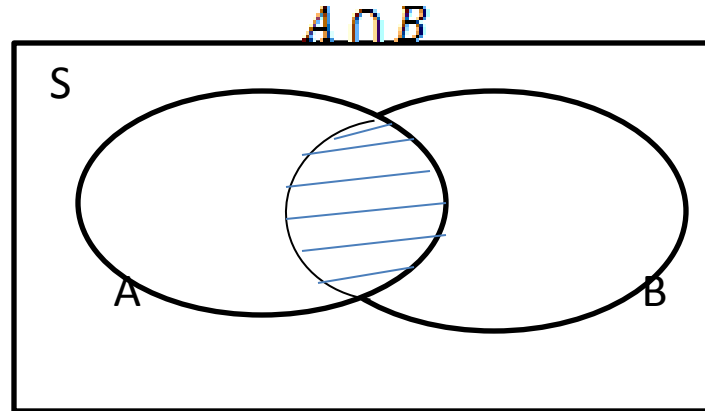


II. تقاطع حادثتين

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A \cap B$ أو بالرمز AB وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A وفي B معاً. وتقع الحادثة $A \cap B$ إذا وقعت الحادثتان A و B معاً في نفس الوقت.

وباستخدام المجموعات فإن تقاطع الحادثتين A و B هو

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

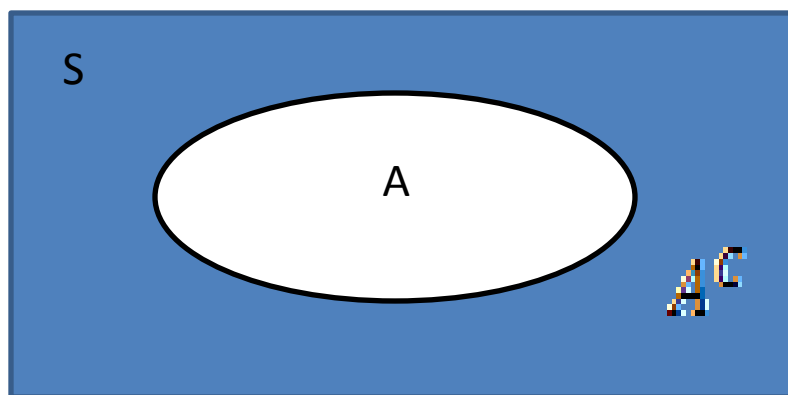


III. متممة أو مكملّة حادثة

متممة أو مكملّة الحادثة A هي حادثة يرمز لها بالرمز A^c أو \bar{A} هي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A . وتقع متممة الحادثة \bar{A} إذا لم تقع الحادثة A نفسها.

وباستخدام المجموعات فإن متممة الحادثة A هو

$$\bar{A} = A^c = \{x \in S : x \notin A\}$$



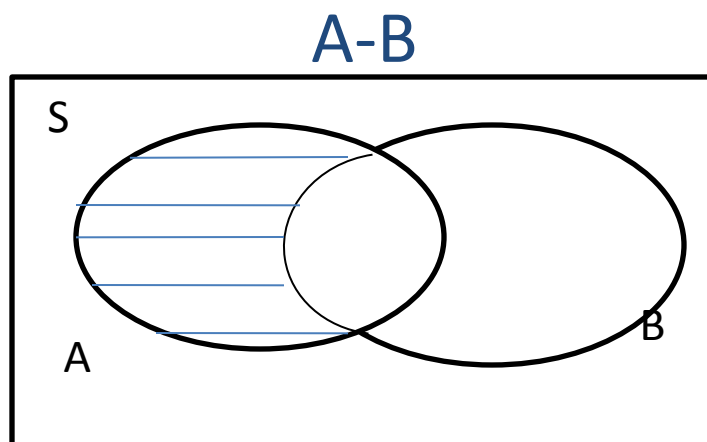
لاحظ أن: $n(A^c) = n(S) - n(A)$

IV. الفرق بين حادثتين

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز A-B وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B. وتقع الحادثة A-B إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B.

وباستخدام المجموعات فإن حادثة الفرق A-B هو

$$A - B = \{x \in S : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$



□ نتيجة (1)

$$(A^c)^c = A$$

$$S^c = \emptyset$$

$$\emptyset^c = S$$

$$A^c = S - A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap S = A$$

$$A \cup S = S$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

□ نتيجة (2)

حادثة الفرق A-B تكافئ حادثة التقاطع $A \cap B^c$ أي أن

$$A - B = A \cap B^c$$

□ مثال (6)

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.

1. أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

2. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصره:

A = الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى

B = الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل

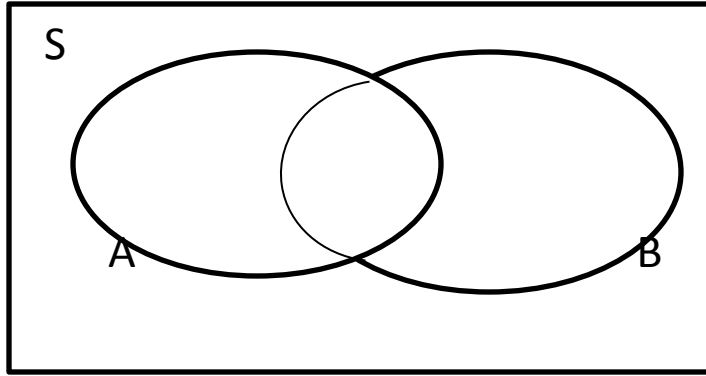
C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى و صورة في الرمية الثالثة.

3. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

$$A \cap B, A \cup C, A^c \cup B^c, (A \cap B)^c, A - B = A \cap B^c$$

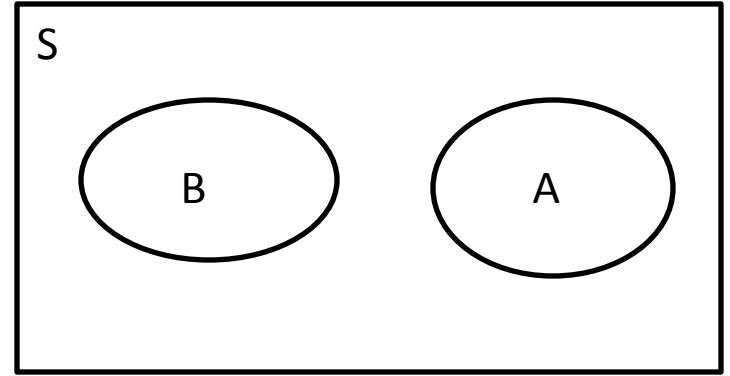
□ الحوادث المتنافية (المنفصلة)

يقال بأن الحادثين A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين , أي أن $A \cap B = \emptyset$ وهذا يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما وبالتالي لا يمكن وقوعهما معاً أي يستحيل وقوعهما معاً. فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الأخرى.



$$A \cap B \neq \emptyset$$

حدثان غير متنافيتين (غير منفصلتين)



$$A \cap B = \emptyset$$

حدثان متنافيتان (منفصلتان)

□ الحوادث الشاملة

□ يقال بأن الحوادث A_1, A_2, \dots, A_n حوادث شاملة إذا كان لا بد من وقوع إحداها (واحدة منها) على الأقل عند إجراء التجربة. أي إذا كان:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

مثال

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن

1. الحادثتان $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ حادثتان:

أ. متنافيتان لأن: $A \cap B = \emptyset$

ب. شاملتان لأن: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$

2. الحوادث $A_1 = \{1, 2, 3\}$ و $A_2 = \{2, 3, 4\}$ و $A_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ حوادث شاملة ولكنها غير متنافية. لماذا؟

□ الحالات متساوية (أو متكافئة) الفرص

إذا كانت فرصة ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لفرصة ظهور أي نتيجة أخرى فإننا نقول بأن نتائج التجربة متساوية (أو متكافئة) الفرصة.

□ الحالات المواتية للحادثة

الحالات المواتية لحادثة معينة هي الحالات التي تؤدي إلى تحقق (أو وقوع) هذه الحادثة وبالتالي فإن الحالات المواتية لحادثة معينة هي نتائج التجربة الممكنة التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة.

□ الإحتمال

نقرن كل حادثة (أو حدث) معرفة على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة حقيقية تقيس فرصة وقوع هذه الحادثة عند إجراء التجربة. تسمى هذه القيمة باحتمال الحادثة.

□ إحتمال الحادثة

احتمال الحادثة A هو مقياس عددي يرمز له بالرمز $P(A)$ ويقيس فرصة وقوع الحادثة A عند إجراء التجربة. وتتراوح قيمة هذا المقياس بين الواحد الصحيح والصفر.

□ التعريف التقليدي للاحتمال

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي $n(S)$ فإن احتمال الحادثة A يعرف بالصيغة التالية

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

□ مثال (7)

أوجد احتمال الحوادث في مثال تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة المعطى في مثال (3).

□ مثال (8)

احسب احتمالات الحوادث في مثال (4) لتجربة قذف قطعة النقود المتزنة مرتين متتاليتين.

□ مسلمات الاحتمال

إذا كان لدينا تجربة عشوائية فضاء عينتها هو S فإن الدالة الحقيقية $P(\cdot)$ والمعرفة لجميع الحوادث على فضاء العينة S تكون دالة احتمال ويسمى العدد $P(A)$ باحتمال الحادثة A لكل $A \subseteq S$ إذا تحققت المسلمات التالية:

1. لكل حادثة A يكون: $P(A) \geq 0$
2. احتمال الحادثة المؤكدة يساوي الواحد, أي أن $P(S)=1$.
3. إذا كانت الحوادث A_1, A_2, A_3, \dots حوادث متنافية (منفصلة) مثلى مثلى (أو تبادلياً) أي إذا كان $A_i \cap A_j = \emptyset$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

□ بعض نتائج مسلمات الاحتمال

1. احتمال الحادثة المستحيلة يساوي صفر, أي أن: $P(\emptyset) = 0$

2. إذا كانت الحوادث A_1, A_2, \dots, A_n حوادث متنافية (منفصلة) تبادلياً

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{فإن:}$$

3. لأي حادثة A , يكون: $P(A^c) = 1 - P(A)$

4. لأي حادثتين A و B يكون: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. لأي حادثتين A و B يكون: $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

6. إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \leq P(B)$

القوانين التالية يمكن بسهولة استنباطها

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^c)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$$

مثال 10: اذا كان احتمال نجاح محمد في مقرر الاحصاء يساوي 0.6
فاوجد احتمال رسوبه.

الحل:

مثال 11: اذا كان احتمال نجاح محمد في احد الاختبارات يساوي 0.6 و
احتمال نجاح محمد و احمد معا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فاوجد
احتمال نجاح محمد و رسوب احمد.

الحل:

مثال 12: اذا كان احتمال نجاح محمد في احد الاختبارات يساوي 0.25 و احتمال رسوب احمد في هذا الاختبار يساوي 0.3 و احتمال نجاح محمد و احمد معا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فاوجد احتمال نجاح احدهما على الاقل.

الحل:

مثال 13: اذا كان احتمال ان فصيلة دم احد المتبرعين بالدم تكون من النوع A هو 0.35 و احتمال ان هذا التبرع مصاب بضغط الدم هو 0.15 و احتمال ان هذا المتبرع مصاب بضغط الدم او ان فصيلة دمه من النوع A هو 0.40 . اوجد احتمال ان هذا المتبرع :

1- مصاب بضغط الدم و فصيلة دمه من النوع A

2- غير مصاب بضغط الدم

مثال 14: في تجربة رمي حجر نرد متزن مرة واحدة و تسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لنعرف الحوادث التالية:

A: الحادثة الدالة على ظهور عدد زوجي

B: الحادثة الدالة على ظهور عدد اقل من او يساوي 2

و المطلوب هو تعريف الحوادث التالية و حساب احتمالاتها

$A, B, A \cap B, A \cup B, A \cap B^c, A^c \cap B, (A \cup B)^c, A^c \cap B^c$

مثال 15: اذا كانت A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة بحيث:

$$P(A) = 0.2 , P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.5$$

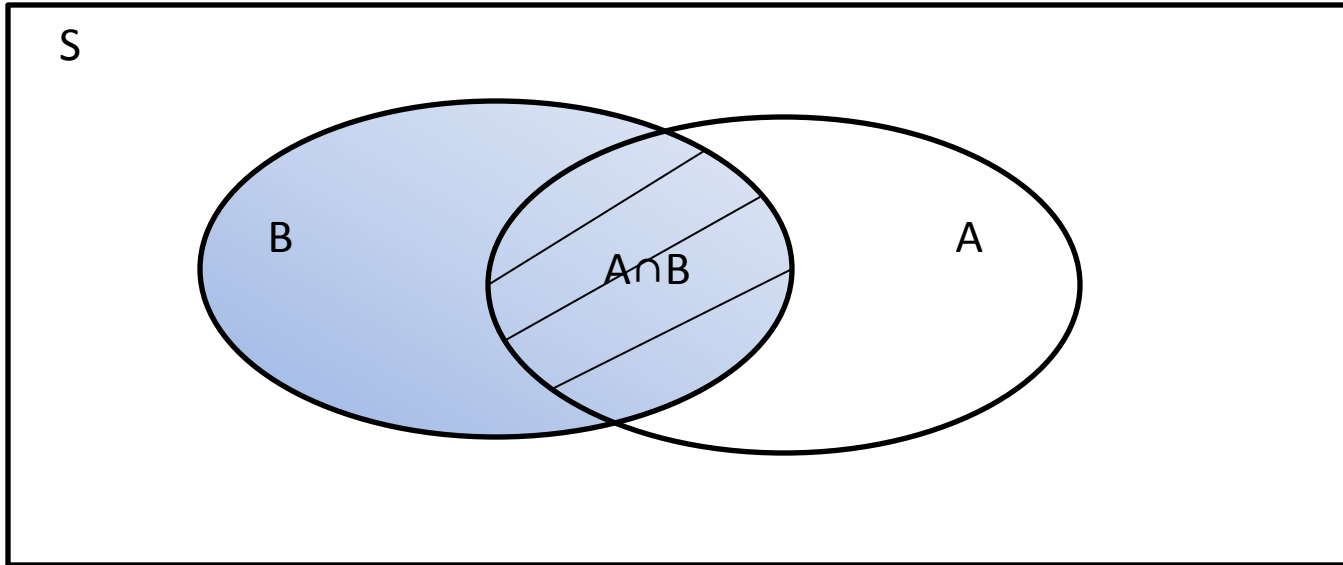
اوجد الاحتمالات التالية:

$$P(A \cap B), P(A \cap B^c), P(A^c \cap B), P(A^c \cap B^c)$$

مثال 16: اذا اخترنا ورقتين من اوراق اللعب بشكل عشوائي و بدون مراعاة الترتيب فما هو احتمال ان يكون لونهما اسود.

conditional probability الاحتمال الشرطي:

هو اننا نريد ايجاد احتمال الحادثة A منسوبا الى فضاء عينة جديد هو فضاء العينة المكون من عناصر الحادثة المشروطة B. و شكل فن يوضح فضاء العينة المشروط.



تعريف الاحتمال الشرطي:

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S بحيث $P(B) \neq 0$. ان الاحتمال الشرطي للحادثة A علما او مشروطا بوقوع الحادثة B يرمز له بالرمز $P(A|B)$ و يعرف كما يلي:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ملاحظة:

1. مقياس الاحتمال الشرطي $P(\cdot|B)$ يحقق مسلمات الاحتمال و نتائجها.
2. الاحتمال الشرطي للحادثة B معطى A هو:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

3. بشكل عام فان $P(A|B) \neq P(B|A)$

نتيجة:

1- اذا كانت عناصر فراغ العينة S متساوية الفرص فان:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

2- الاحتمال الشرطي للحادثة A^c معطى B يمكن حسابه من القانون التالي:

$$P(A^c | B) = 1 - P(A | B)$$

3- قاعدة الضرب في الاحتمال:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) P(A | B)$$

مثال 17:

الجدول التالي يصنف اربعمائة شخصا حسب عادة التدخين و مستوى ضغط الدم على النحو التالي:

	D يدخن	D ^c لا يدخن	المجموع
A مرتفع	40	10	50
B متوسط	70	130	200
C منخفض	55	95	150
المجموع	165	235	400

و لتكن التجربة هي اختيار احد هؤلاء الاشخاص بشكل عشوائي .
و لنعرف الحوادث التالية:

A: حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع.

D: حادثة اختيار شخص مدخن.

المطلوب هو ايجاد احتمال ان الشخص المختار:

- ضغط دمه مرتفع
- مدخن
- ضغط دمه مرتفع و يدخن
- ضغط دمه مرتفع علما بانه مدخن

الحوادث المستقلة: Independent Events

تعريف:

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S . يقال بان الحادثتين A و B مستقلتان اذا تحقق احد الشروط المتكافئة التالية:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

مثال 18: هل الحادثتان A و D في مثال 17 مستقلتان؟ ولماذا؟

نتيجة:

إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين, فإن:

- الحادثتان A و B^c مستقلتان
- الحادثتان A^c و B مستقلتان
- الحادثتان A^c و B^c مستقلتان

مثال 19: يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء و عشرين كرة بيضاء. سحبت عينة مكونة من كرتين من هذا الصندوق واحدة بعد الأخرى عشوائياً. أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض في كلا الحالتين التاليتين:

- إذا كان السحب بدون إرجاع
- إذا كان السحب بإرجاع

مثال 20: يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء و عشرين كرة بيضاء. اخترنا عينة مكونة من 4 كرات من هذا الصندوق عشوائياً دون مراعاة الترتيب. أوجد احتمال الحصول على ثلاثة كرات حمراء و كرة واحدة بيضاء.

تمرين صفحة 28: من بين 200 طالبة من طالبات العلوم وجد أن 100 طالبة
منهن يدرسن الرياضيات، 90 يدرسن الكيمياء، 20 لا يدرسن أي من
الرياضيات أو الكيمياء، اختيرت طالبة عشوائياً ما احتمال أن تكون:
12. تدرس الكيمياء فقط.

A) 0.05. B) 0.45. C) 0.40. D) 0.55.

13. تدرس الكيمياء والرياضيات.

A) 0.05. B) 0.45. C) 0.40. D) 0.55.

14. تدرس الكيمياء أو الرياضيات.

A) 0.85. B) 0.90. C) 0.95. D) 0.80.

مثال 23: إذا كان احتمال أن يصيب محمد هدفاً معين هو $\frac{3}{4}$ واحتمال أن يصيب أحمد الهدف نفسه هو $\frac{1}{3}$. أوجد :

(15) احتمال أن يصيبا الهدف معاً.

A) 0. B) 0.45. C) 1. D) 0.25.

(16) على الأقل أن يصيب الهدف أحدهما.

A) 0.83. B) 0.20. C) 1. D) 0.55.

(17) محمد يصيب الهدف وأحمد لا يصيبه.

A) 0.083. B) 0.55. C) 0.25. D) 0.50.

(18) إذا علم أن محمد لم يصب الهدف ما احتمال أن يصيبه أحمد.

A) 0.9. B) 0.33. C) 0.083. D) 0.11.

نظرية بايز:

قانون الاحتمال الكلي:

لتكن الحوادث A_1, A_2, \dots, A_n حوادث شاملة و متنافية مثنى مثنى و معرفة على فضاء العينة S اي ان:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

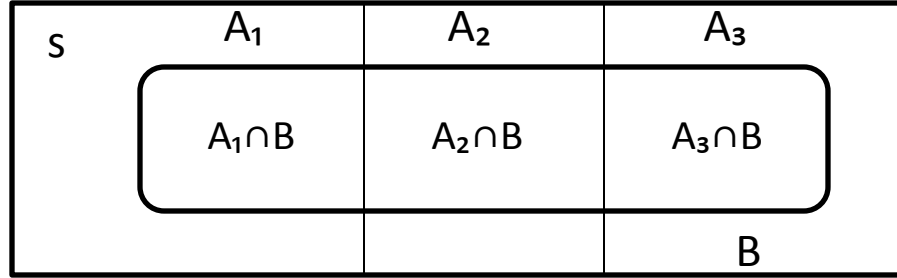
$$A_i \cap A_j = \emptyset; \quad \forall i \neq j$$

اذا كانت الحادثة B هي اي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S فان:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

$$= \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

ملاحظة 10: يمكن استنباط هذا القانون بشكل فن التالي (في حالة $n = 3$)



من شكل فن السابق يمكن استنباط ما يلي:

$$1 - B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$$

$$2 - (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

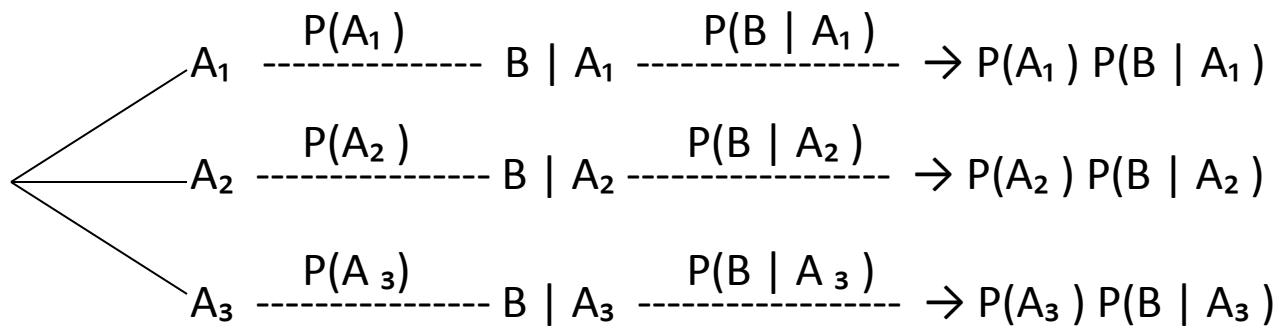
$$3 - P(B) = P\{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)\}$$

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$= \sum_{k=1}^n P(A_k \cap B)$$

$$= \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

2. يمكن تلخيص قانون الاحتمال الكلي بواسطة شكل الشجرة (للحالة $n=3$)



$$\text{Total} = P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) P(B | A_k)$$

مثال 21: يتم انتاج المصباح الكهربائي في احد المصانع بواسطة احدى ثلاث الات. تنتج الالة الاولى 20% من الانتاج الكلي للمصنع و تنتج الالة الثانية 30% من الانتاج الكلي للمصنع و تنتج الالة الثالثة 50% من الانتاج الكلي للمصنع. و معلوم من الخبرة السابقة ان نسبة الانتاج التالف للالة الاولى هي 1% و نسبة الانتاج التالف للالة الثانية هي 4% و نسبة الانتاج التالف للالة الثالثة هي 7%. اذا كانت التجربة هي اختيار مصباح واحد من انتاج هذا المصنع بشكل عشوائي فما هو احتمال ان يكون هذا المصباح تالف؟

مثال 22: باعتبار المثال السابق , مثال 21, لنفرض اننا علمنا ان المصباح المختار كان تالفا, فما هو احتمال ان يكون قد انتج بواسطة الالة الاولى؟

قانون بايز:

نتيجة:

لتكن الحوادث A_1, A_2, \dots, A_n شاملة و متنافية مثنى مثنى و معرفة على فضاء العينة S اي ان:

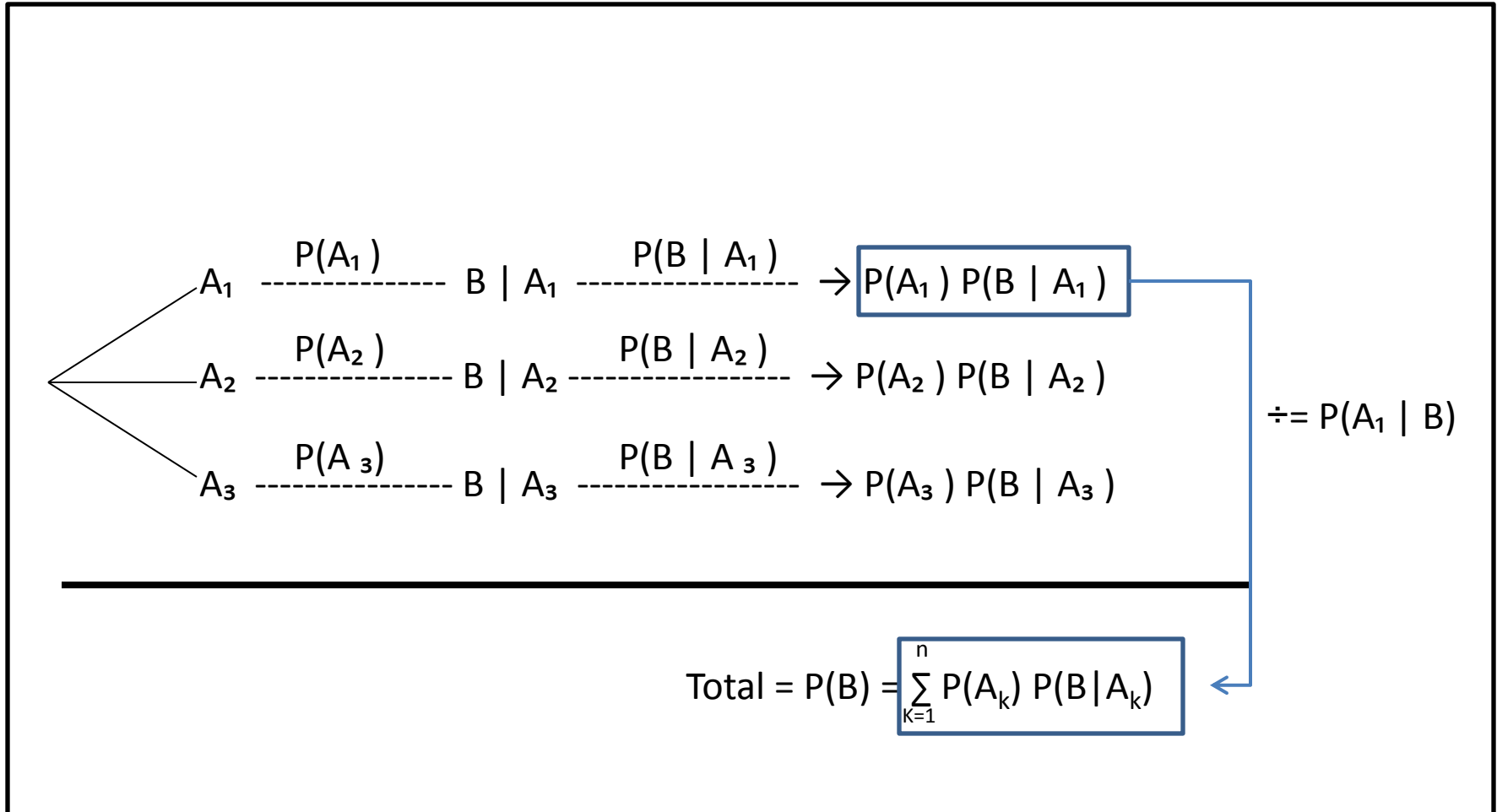
$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset; \quad \forall i \neq j$$

اذا كانت الحادثة B هي اي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S فان:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ملاحظة: يمكن تلخيص قانون بايز بواسطة شكل الشجرة (للحالة $n=3$)



مثال 23: باعتبار مثال 21, لنفرض اننا علمنا ان المصباح المختار كان تالفا , فما هو احتمال:

- ان يكون قد انتج بواسطة الالة الاولى؟
- ان يكون قد انتج بواسطة الالة الثانية؟
- ان يكون قد انتج بواسطة الالة الثالثة؟

مثال 24: لنفرض ان لدينا صندوقين. يحتوي الصندوق الاول على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء وبينما يحتوي الصندوق الثاني على 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء. اخترنا صندوق من هاذين الصندوقين بشكل عشوائي ثم سحبنا منه كرة واحدة بشكل عشوائي.

- احسب احتمال ان تكون الكرة المسحوبة سوداء.
- اذا علمنا ان الكرة المسحوبة سوداء, فما هو احتمال ان تكون من الصندوق الثاني؟

الفصل السابع

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

1. متغيرات عشوائية منفصلة أو متقطعة

2. متغيرات عشوائية متصلة أو مستمرة

المتغير العشوائي:

ليكن فضاء العينة للتجربة العشوائية هو S .

المتغير العشوائي X هو دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة S .

ملاحظة:

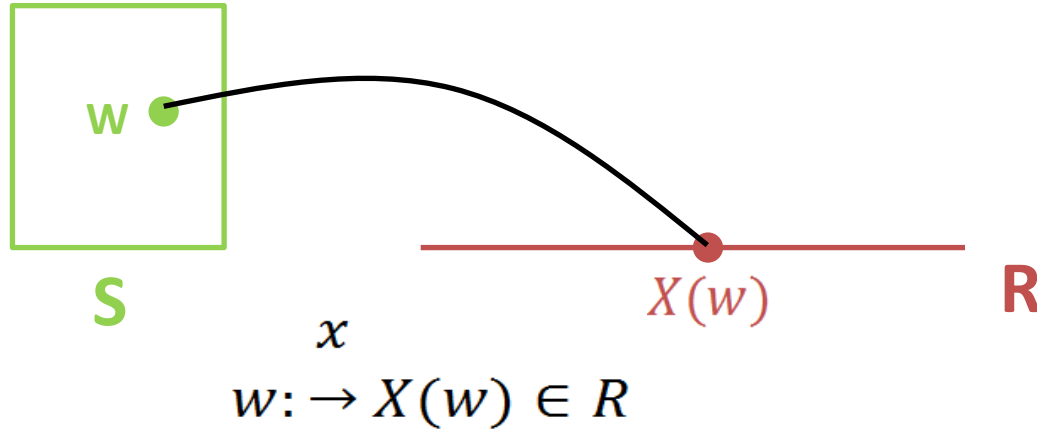
1. لابد أن تتحقق بعض الشروط على الدالة لكي تكون متغيراً عشوائياً ولكننا لن نتطرق إلى تلك الشروط لأن ذلك خارج نطاق كتابنا هذا.

2. المتغير العشوائي X يعطي قيمة حقيقية وحيدة لكل عنصر من عناصر فضاء العينة S .

3. المتغير العشوائي X هو تطبيق مجاله فضاء العينة S ومجاله المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية R ، أي

أن، $X:S \rightarrow R$.

إذا كانت $w \in S$ نقطة عينة فإن صورة w تحت تأثير المتغير العشوائي X هي $X(w)$ وهي قيمة حقيقية، أي أن $X(w) \in R$ ، والشكل التالي يوضح صورة نقطة العينة w تحت تأثير المتغير العشوائي X .



إن المجموعة $X(S) = \{x \in R: X(w) = x, w \in S\}$ هي مدى التطبيق X و تسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ، وهي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية أي أن $X(S) \subseteq R$.

مثال 1: لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل. ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهره في الرميتين.

1. عبر عن المتغير العشوائي X كدالة.

2. أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X . (المدى)

3. عبر عن الحوادث التالية باستخدام المتغير العشوائي X :

$\{TT\}$, $\{HT, TH\}$, $\{HH\}$, $\{HH, HT, TH\}$

4. عبر عن الحوادث التالية باستخدام نقاط العينة:

$\{X=0\}, \{X=1\}, \{X=2\}, \{X<1\}, \{X<1\}, \{X>5\}$

5. أوجد الاحتمالات التالية:

$P(X=0)=$

$P(X=1)=$

$P(X=2)=$

5. أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(X < 1) =$$

$$P(X \leq 1) =$$

$$P(X > 5) =$$

المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل):

يكون المتغير العشوائي X متقطعاً إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له مجموعة متقطعة.

ملاحظة:

مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع X تأخذ إحدى حالتين:

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} .1$$

$$X(S) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} .2$$

مثال 2: في تجربة قذف قطعة نقود مرتين متتاليتين أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

1. المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.
2. المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.
3. المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحاً منه عدد الكتابات.

w	$X(w)$	$Y(w)$	$Z(w)$

مثال 3: في تجربة قذف قطعة نقود غير متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل. ولنفرض أن هذه العملة غير متزنة بحيث أن $P(H)=1/3$ و $P(T)=2/3$. ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهره في الرميّتين.

1. أوجد الاحتمالات التالية ثم لخصها في جدول:

$$P(X=0)=$$

$$P(X=1)=$$

$$P(X=2)=$$

2. باستخدام (1) أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(0 < X < 2) =$$

$$P(X \leq 1) =$$

$$P(X \geq 2) =$$

$$P(X \geq 5) =$$

$$P(X < 5) =$$

دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً مجموعة القيم الممكنة له هي $X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

أو $X(S) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ فإن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X يرمز لها بالرمز $f_X(x)$ أو $f(x)$ وتعرف كما يلي:

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x); & x \in X(S) \\ 0; & x \notin X(S) \end{cases}$$

خواص دالة الكتلة الاحتمالية:

إن دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x)$ لابد أن تحقق الشروط التالية :

$$1. \quad 0 \leq f_X(x) \leq 1$$

$$2. \quad \sum_{\forall x} f_X(x) = 1$$

$$3. \quad P(X \in A) = \sum_{x \in A} f_X(x) = \sum_{x \in A} P(X \in A); \quad \forall A \subseteq R$$

■ مثال 4: أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X في مثال (3).

x	$f_X(x) = P(X = x)$

التوقع (المتوسط) للمتغير العشوائي المتقطع:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً مجموعة القيم الممكنة له هي $X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ أو $X(S) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ و دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x)$ فإن التوقع (أو القيمة المتوقعة أو المتوسط) للمتغير العشوائي X يرمز له بالرمز $E(X)$ أو بالرمز μ_x ويعرف بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned}\mu_x = E(X) &= \sum_{x \in X(S)} x f_X(x) = \sum_{x \in X(S)} x P(X = x) \\ &= x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots\end{aligned}$$

مثال 5: أوجد توقع المتغير العشوائي X الذي دالة كتلته الاحتمالية معطاة في الجدول التالي:

X	$f_X(x) = P(X = x)$
0	4/9
1	4/9
2	1/9

بعض خواص التوقع:

ليكن X متغيراً عشوائياً ولتكن a و b ثوابت. إن التوقع يحقق الخواص التالية:

$$E(a) = a \quad .1$$

$$E(X \pm b) = E(X) \pm b \quad .2$$

$$E(aX) = aE(X) \quad .3$$

$$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b \quad .4$$

نتيجة:

ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً ولتكن $g(x)$ دالة حقيقية في المتغير العشوائي X . إن توقع الدالة

يمكن حسابة بالصيغة التالية:

$$\mu_{g(x)} = E[g(x)] = \sum_{x \in X(S)} g(x) f_X(x) = g(x_1) f(x_1) + g(x_2) f(x_2) + \dots$$

و كحالة خاصة عندما تكون $g(x) = X^2$ فإن:

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(S)} x^2 f_X(x) = x_1^2 f(x_1) + x_2^2 f(x_2) + \dots$$

مثال 6: أوجد توقع المتغيرات العشوائية التالية في مثال 5:

أ. $g(X) = 9X + 2$

x	$f_X(x) = P(X = x)$	$x^2 f_X(x)$
0	4/9	
1	4/9	
2	1/9	

ب. $g(X) = X^2$

التباين للمتغير العشوائي:

إذا كان X متغيراً عشوائياً توقعه (متوسطه) μ_x . فإن تباين المتغير العشوائي X يرمز له بالرمز $V(X)$ أو $\text{Var}(X)$ أو σ_x^2 ويعرف بالصيغة التالية:

$$\sigma_X^2 = V(X) = E[(x - \mu_x)^2]$$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي:

يرمز للانحراف المعياري للمتغير العشوائي X بالرمز σ_X ويعرف بالصيغة التالية:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

التباين للمتغير العشوائي المتقطع :

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة كتلته الاحتمالية هي $f_X(x)$ وتوقعه μ_x فإن تباين المتغير العشوائي X يمكن أن يحسب بالصيغة التالية:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \sum_{x \in X(S)} (x - \mu_x)^2 f_X(x) = \sum_{x \in X(S)} (x - \mu_x)^2 P(X = x)$$

صيغة حسابية للتباين:

باستخدام خواص التوقع فإنه يمكن إثبات أن التباين يعطى بالصيغة الحسابية التالية:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(x)]^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(S)} x^2 f_X(x) \quad \text{حيث أن:}$$

مثال 7: أحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي دالة كتلته الاحتمالية

معطاة في الجدول أدناه:

x	$f_X(x)$	$x^2 f_X(x)$
0	0.6	
1	0.3	
2	0.1	
المجموع		

بعض خواص التباين:

ليكن X متغيراً عشوائياً ولتكن a و b ثوابت. إن التوقع يحقق الخواص التالية:

$$1. \quad \text{Var}(a) = 0$$

$$2. \quad \text{Var}(X \pm b) = \text{Var}(X)$$

$$3. \quad \text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$4. \quad \text{Var}(aX \pm b) = a^2 \text{Var}(X)$$

مثال 8: أحسبي تباين المتغيرات العشوائية التالية في مثال (7).

$$أ. \quad g(X) = 10X$$

$$ب. \quad g(X) = 10X + 2$$

إذا كانت لدينا دالة الكتلة الاحتمالية التالية:

X	-1	0	1	2	Total
f(x)	0.15	0.3	0.15	c	

15) أوجد قيمة الثابت c.

A) 0.4.

B) 1.

C) 0.3.

D) 0.

16) أوجد توقع المتغير X.

A) 2.

B) 1.

C) 0.4.

D) 0.8.

17) أوجد تباين المتغير X.

A) 1.6.

B) 1.9.

C) 1.1.

D) 1.26.

18) أوجد $E(2X+1)$

A) 1.6.

B) 2.6.

C) 0.4.

D) 0.8.

19) أوجد $V(3X+3)$

A) 11.34.

B) 3.78.

C) 14.34.

D) 6.78.

بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة هي توزيعات احتمالية (أو دوال كتل احتمالية) لمتغيرات عشوائية متقطعة.

1. توزيع برنولي

2. توزيع ذي الحدين

3. توزيع بواسون

محاولة برنولي (Bernoulli's Trial):

تجربة عشوائية لها نتيجتين فقط.

نسمي الأولى بالنجاح ونرمز لها بالرمز s . ونرمز لاحتمال النجاح بالرمز $p=P(s)$

والثانية نسميها بالفشل ونرمز لها بالرمز f . ونرمز لاحتمال الفشل بالرمز $q=P(f)$

لذا فإن فراغ العينة لمحاولة برنولي هو $S=\{s,f\}$.

ملاحظة:

$$q=1-p$$

من الأمثلة على محاولات برنولي:

- رمي قطعة نقود (صورة أو كتابة)
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح أو رسوب)
- فحص قطعة من إنتاج أحد المصانع (سليمة أو تالفة)

توزيع برنولي:

لنفرض أن لدينا محاولة برنولي و نعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد مرات النجاح عند إجراء محاولة برنولي، أي أن :

$$X(s)=1, \quad X(f)=0$$

مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي $X(S)=\{0,1\}$.
واحتمالاته هي:

$$P(X=1)=P(s)=p$$

$$P(X=0)=P(f)=q$$

بالتالي:

X	$f(x)=P(X=x)$
0	1-p
1	p

أي أن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x q^{1-x}; & x = 0,1 \\ 0; & x \neq 0,1 \end{cases}$$

■ معلمة هذا التوزيع هي احتمال النجاح p .

توزيع ذي الحدين:

نفرض أن التجربة العشوائية تتكون من تكرار محاولة برنولي عدد من المرات تحت الشروط التالية:

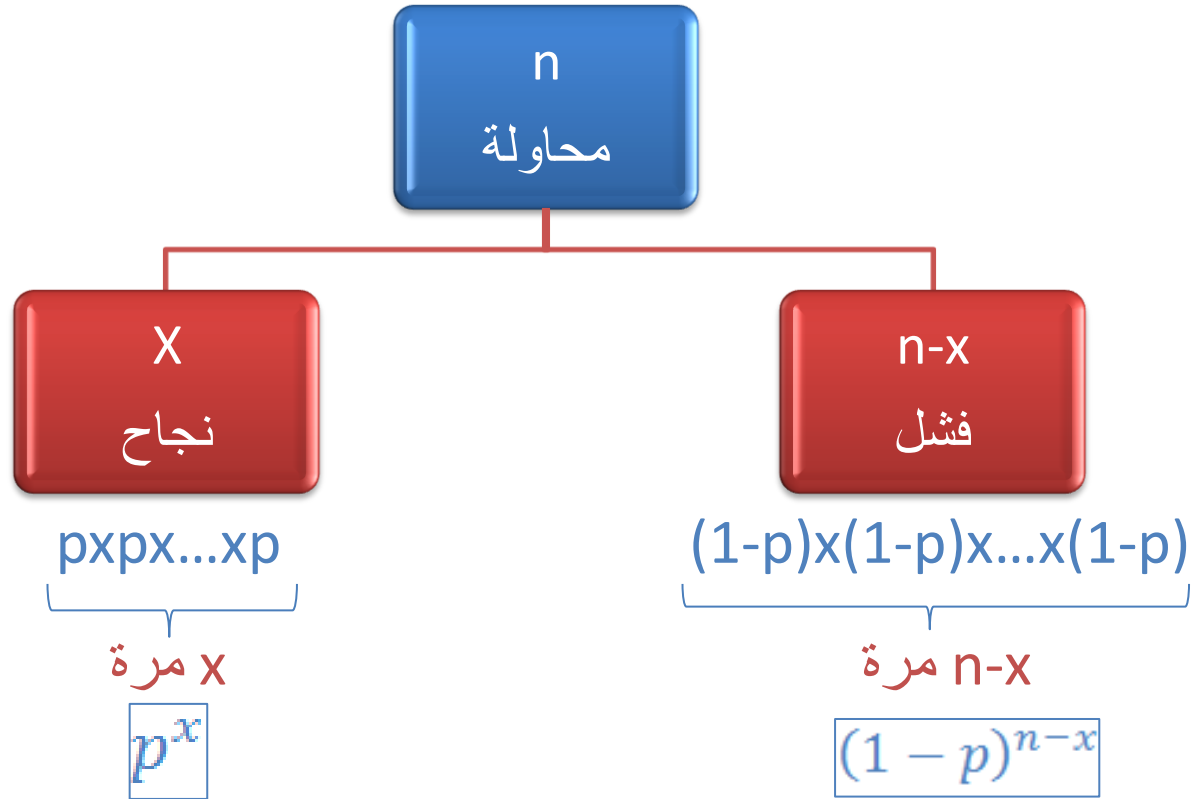
1. عدد المحاولات n

2. المحاولات مستقلة

3. احتمال النجاح p ثابت لجميع المحاولات

لنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد مرات النجاح عند تكرار إجراء محاولة برنولي. فتكون

مجموعة القيم لهذا المتغير العشوائي هي $X(S) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.



دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X هي:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; & x = 0, 1, \dots, n. \\ 0; & x \neq 0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

■ معلمتا هذا التوزيع هما عدد المحاولات n و احتمال النجاح p .

ملاحظة:

1. توزيع برنولي هو حالة خاصة من توزيع ذي الحدين عندما $n=1$.
2. ليكن المتغير X هو عدد مرات النجاح وليكن المتغير Y هو عدد مرات الفشل، أي أن $Y=n-X$. إذا كان X يتوزع وفق توزيع $\text{Binomial}(n,p)$ ، فإن Y يتوزع وفق توزيع $\text{Binomial}(n,1-p)$.

التوقع والتباين لتوزيع ذي الحدين:

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق التوزيع ذي الحدين بالمعلمتين n و p فإن المتوسط والتباين للمتغير X هما على التوالي:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^n x f_X(x) = np$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - \mu_x^2 = npq$$

مثال 9: لنفرض أن لدينا عملة غير متزنة بحيث أن $P(H)=0.4$ و $P(T)=0.6$. رميت هذه العملة ثلاث مرات بشكل مستقل. ليكن المتغير X يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث. أ. أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X .

ب. أوجد التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائي X .

ج. أوجد الاحتمالات التالية:

1. الحصول على صورتين.

2. الحصول على صورتين على الأقل.

3. الحصول على صورة واحدة على الأكثر.

4. الحصول على ثلاث كتابات.

مثال 10: نسبة الإنتاج التالف لأحد مصانع المصابيح هي 10%. إذا أخذت عينة مكونة من 5 مصابيح

بشكل عشوائي من إنتاج هذا المصنع، فأوجد مايلي:

أ. أوجد الاحتمالات التالية:

1. الحصول على مصباح واحد تالف.

2. الحصول على جميع المصابيح تالفة.

3. الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر.

4. الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل.

ب. أوجد العدد المتوقع والتباين للمصابيح التالفة في العينة.

تجربة بواسون:

عملية ينتج عنها قيم عددية لمتغير عشوائي X يمثل عدد مرات وقوع حادثة ما في فترة زمنية (أو حيز مكاني) يرمز لها بالرمز t .

من الأمثلة على متغيرات بواسون:

- عدد الأخطاء المطبعية لكل صفحة في الكتاب. (t =صفحة واحدة)
 - عدد المكالمات الهاتفية لسنترال إحدى الدوائر الحكومية لكل يوم. (t =يوم واحد)
 - عدد المكالمات الهاتفية لسنترال إحدى الدوائر الحكومية لكل خمسة أيام. (t =خمسة أيام)
- إذا فرضنا أن عدد مرات وقوع الحادثة في فترة الوحدة الزمنية (أو الحيز المكاني) ($t=1$) هو λ ، فإن متوسط عدد مرات وقوع الحادثة في الفترة الزمنية (أو الحيز المكاني) $\mu = \lambda t$.
- لنفرض أن المتغير X يمثل عدد مرات وقوع حادثة ما في الفترة الزمنية (أو الحيز المكاني) t .

توزيع بواسون:

يقال بأن المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة μ (حيث $\mu = \lambda t$) إذا كانت دالة كتلته الاحتمالية تعطى بالصورة:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & x \neq 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

وفي هذه الحالة نكتب $X \sim \text{Poisson}(\mu)$.

■ معلمة هذا التوزيع هو متوسط عدد مرات وقوع الحادثة μ .

التوقع والتباين لتوزيع بواسون:

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة μ ، أي أن $X \sim \text{Poisson}(\mu)$ فإن:

$$1. E(X) = \mu = \lambda t$$

$$2. \text{Var}(X) = \mu = \lambda t$$

ملاحظة:

1. إن λ ما هو إلا متوسط توزيع بواسون للمتغير الذي يمثل وقوع الحادثة في فترة الوحدة.
2. لنفرض أن المتغير X يمثل عدد الأعاصير التي تضرب إحدى الجزر في الشهر (الوحدة الزمنية هي الشهر) و لنفرض أن المتغير Y يمثل عدد الأعاصير التي تضرب الجزيرة في السنة ولنفرض أن W يمثل عدد الأعاصير التي تضرب الجزيرة في اليوم. إذا كان المتغير X يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة λ ، أي أن $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ، فإن:

أ. المتغير العشوائي Y يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة $\mu = 12\lambda$ ، أي أن:

$$Y \sim \text{Poisson}(12\lambda)$$

ب. المتغير العشوائي W يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة $\mu = \frac{\lambda}{30}$ ، أي أن:

$$W \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{30}\right)$$

■ مثال 11: قام أحد المتدربين على الطباعة بطباعة كتاب. ولنفرض أن عدد الأخطاء المطبعية لكل صفحة في هذا الكتاب يتوزع وفق توزيع بواسون بمتوسط 6 أخطاء لكل صفحة.

1. إذا اخترنا أحد الصفحات من هذا الكتاب بشكل عشوائي، فما هو احتمال :

أ. أن يوجد 7 أخطاء مطبعية في هذه الصفحة؟

ب. أن يوجد ما لا يقل عن خطئين مطبعيين في هذه الصفحة؟

2. إذا اخترنا صفتين اثنتين من صفحات هذا الكتاب بشكل عشوائي، فما هو احتمال أن يوجد 10

اخطاء مطبعية فيهما؟

3. إذا اخترنا نصف صفحة من صفحات هذا الكتاب بشكل عشوائي، فما هو احتمال أن لا يوجد فيها أخطاء مطبعية؟

4. ما هو متوسط عدد الأخطاء المطبعية لكل سطر من أسطر هذا الكتاب بافتراض أن كل صفحة تحتوي 32 سطرًا؟

5. ما هو توزيع ومتوسط و تباين المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل 10 صفحات؟

(20) إذا كان المتغير y يتبع توزيع بواسون بمعلمة 4 فإن انحرافه المعياري يساوي:

- A) 4. B) 1. C) 16. D) 2.

(21) إذا كان المتغير X يمثل عدد الكرات الحمراء عند سحب كرة خمس مرات بإرجاع من

صندوق يحوي 3 كرات حمراء واثنتان سوداء اكتب دالة الكتلة للمتغير X :

- A) $\binom{5}{x} 0.4^{5-x} 0.6^x$ B) $\binom{5}{x} 3^x 2^{5-x}$ C) $\binom{3}{x} 0.5^x 0.5^{5-x}$ D) $\binom{3}{x} 0.6^x 0.6^{5-x}$

(22) باستخدام الفقرة (18) أوجد متوسط المتغير X .

- A) 1.8. B) 3. C) 15. D) 1.5.

(23) إذا كان المتغير Z الذي يمثل عدد الحوادث في طريق العليا العام لكل يوم يتبع توزيع

بواسون بمعلمة 3 فإن المتغير W والذي يمثل عدد الحوادث في طريق العليا العام لكل اسبوع

يتبع توزيع بواسون بمعلمة

- A) 21. B) 3. C) 9. D) 6.

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي المتقطع (المنفصل):

إذا كان X متغيراً عشوائياً دالة كتلته الاحتمالية هي $f(x)$ ، فإن دالة توزيعه التراكمية يرمز لها بالرمز $F(x)$ وتعرف لكل قيمة حقيقية x بالصيغة التالية:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X = t) = \sum_{t \leq x} f(t); -\infty < x < \infty$$

أي أن قيمة دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي المتقطع X عند النقطة x تساوي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر من أو يساوي القيمة x .

نتيجة:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة توزيعه التراكمية هي $F(x)$ ، فإن:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

مثال 13: ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة كتلته الاحتمالية معطاة كما يلي:

X	0	1	2
$f(x)$	$10/28$	$15/28$	$3/28$

1. أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X .

2. باستخدام دالة التوزيع التراكمية، أوجد الاحتمال $P(0.5 < X \leq 1.9)$.

المتغير العشوائي المستمر (المتصل):

هو متغير عشوائي مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة أو اتحاد عدد من الفترات. ومن أمثلة الكميات التي يمكن تمثيلها بواسطة متغيرات عشوائية متصلة:

- درجة حرارة تفاعل كيميائي معين
- نسبة تركيز مركب ما في محلول كيميائي
- الفترة الزمنية بين الإصابة بمرض ما والوفاة
- المسافة المقطوعة لجسم معين خلال وحدة الزمن
- طول الشخص

دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر:

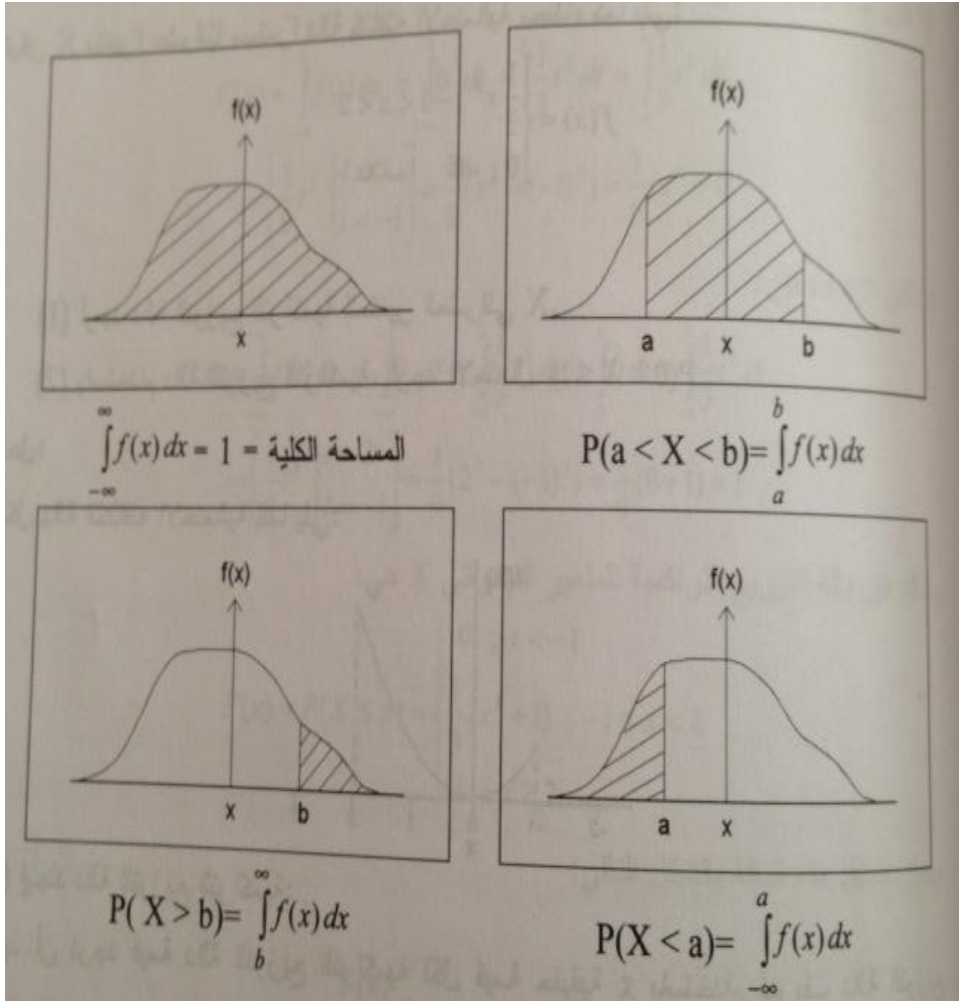
تعريف:

أي دالة حقيقية غير سالبة $f_X(x)$ والمعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbf{R} تسمى دالة كثافة احتمالية إذا وفقط إذا كان:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx; \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, a \leq b$$

أي أن احتمال وقوع المتغير العشوائي X في أي فترة يساوي المساحة فوق تلك الفترة وتحت منحنى الدالة.

ملاحظة: إذا كان X متغير عشوائي مستمرا دالة كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ ، فإن:



$f_X(x) \neq P(X = x)$ •

$f_X(x) \geq 0 \forall x \in R$ •

$P(X = x) = 0 \forall x \in R$ •

$P(b < X \leq a) = P(b \leq X < a)$ •

$= P(b < X < a) = P(b \leq X \leq a)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ •

دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المستمر:

تعريف:

إذا كان X متغير عشوائي مستمرا دالة كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ ، فإن دالة توزيعه التراكمية ويرمز لهل بالرمز $F(x)$ وتعرف لكل قيمة حقيقة x

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

ملاحظة:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المستمر:

مثال:

ليكن X متغير عشوائي مستمرا دالة كثافته الاحتمالية معطاه كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2; & -1 < x < 2 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

- أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X
- باستخدام دالة التوزيع التراكمية أوجد الاحتمال

$$P(0 < x \leq 1)$$

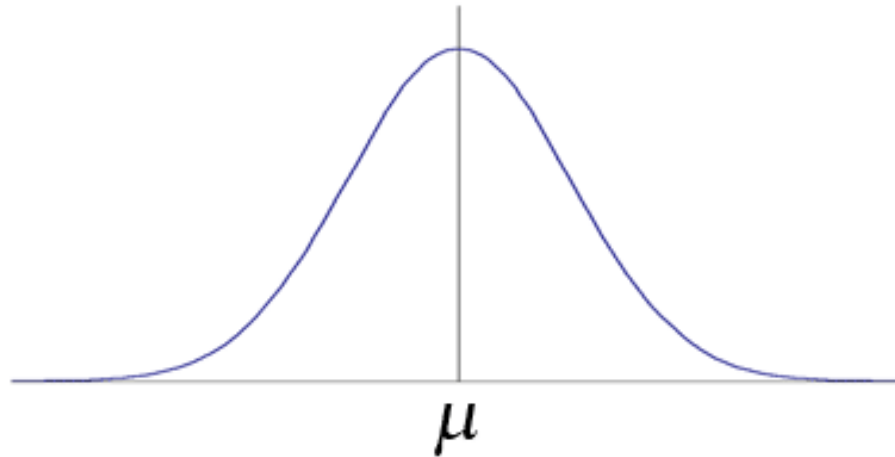
التوزيع الطبيعي (الاعتيادي):

يقال أن المتغير العشوائي المستمر X يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ وتأخذ الصيغة التالية:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right\}$$

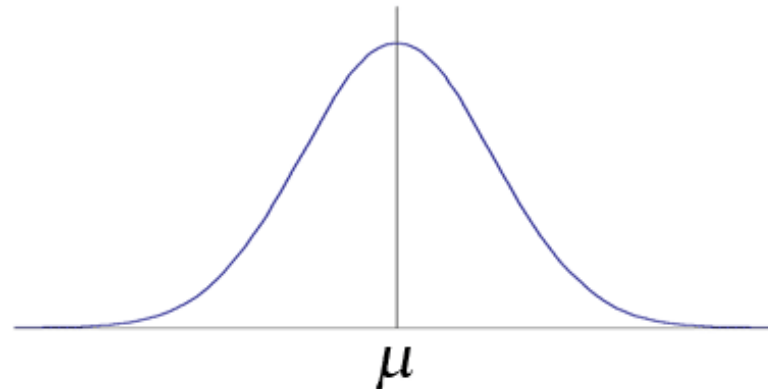
حيث: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$

وفي هذه الحالة نكتب: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

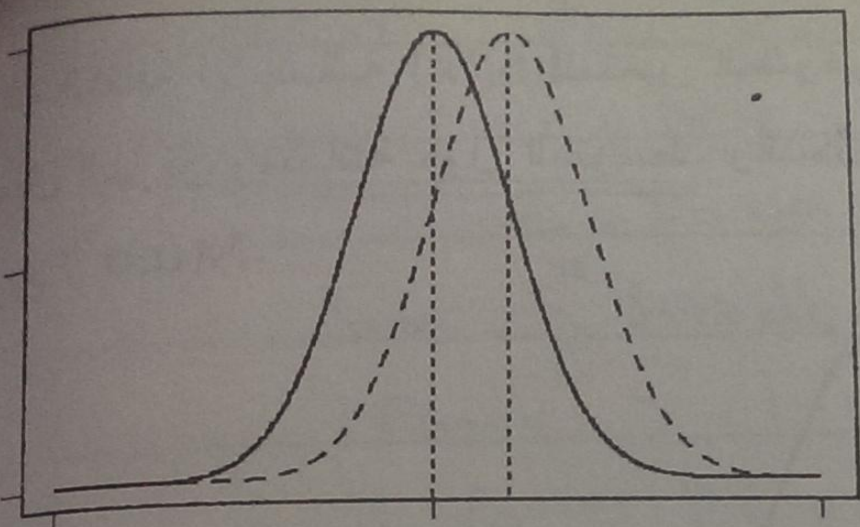


دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي

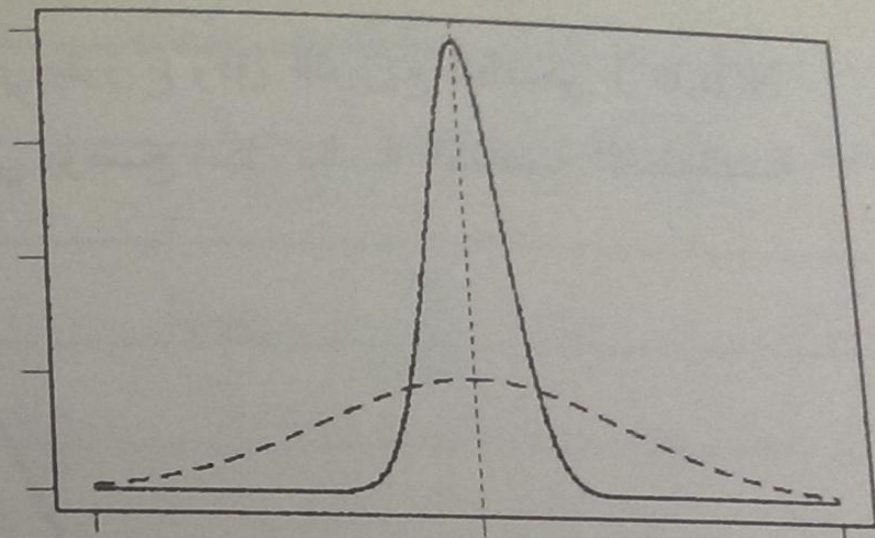
1. منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ متماثل حول المتوسط μ
2. نقطتا انقلاب دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ هما $x = \mu + \sigma$ و $x = \mu - \sigma$
3. يتميز التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ بأن المتوسط = الوسيط = المنوال = μ
4. تعتمد دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ على معلمتي التوزيع وهما المتوسط μ والتباين σ^2 لذلك نكتب: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. وهاتان المعلمتان تحددان التوزيع الطبيعي تحديداً تاماً. حيث أن المعلمة μ تحدد موضع التوزيع والمعلمة σ^2 تحدد شكل وتشتت التوزيع.
5. المساحة الكلية تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ تساوي الواحد



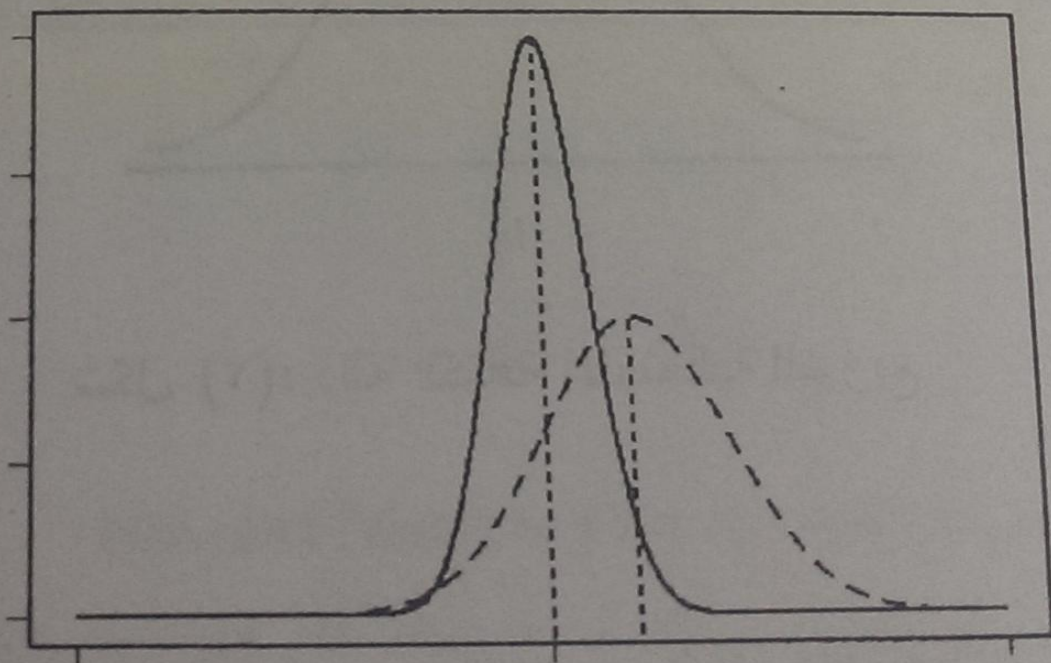
دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي



$$\mu_1 < \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

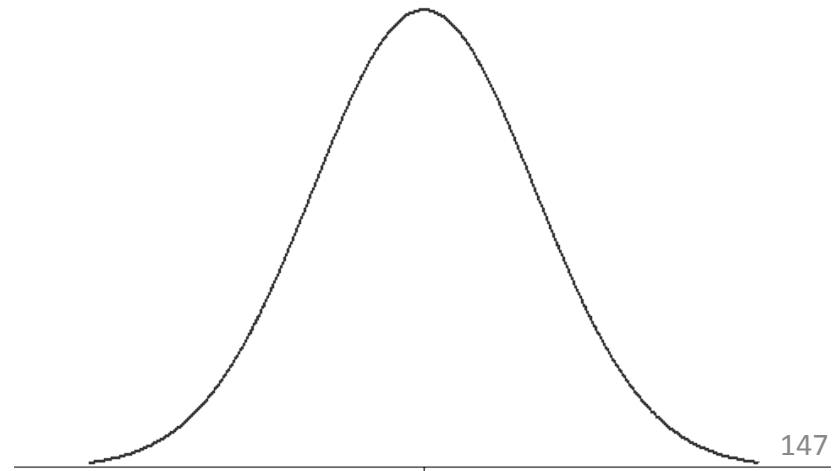
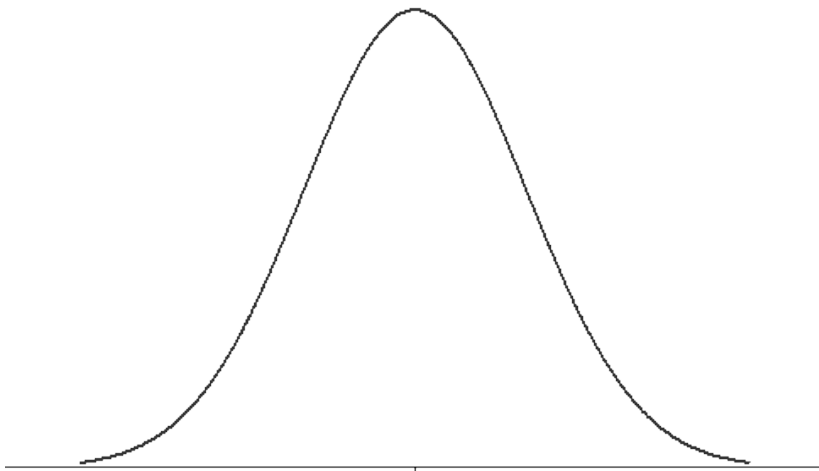
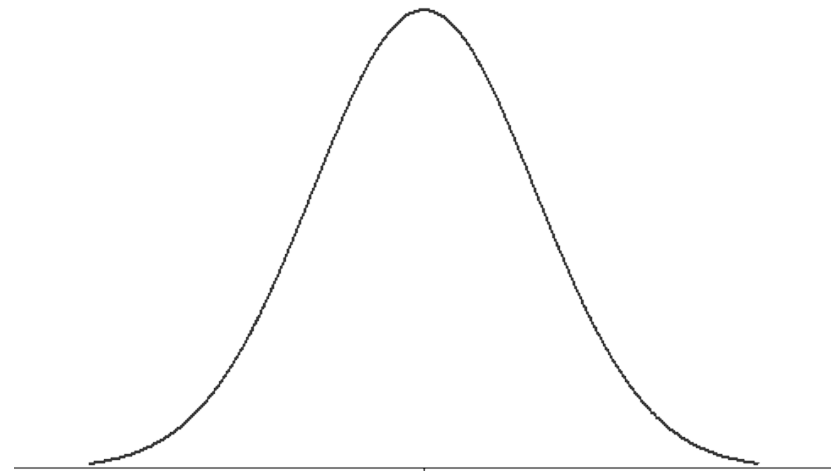
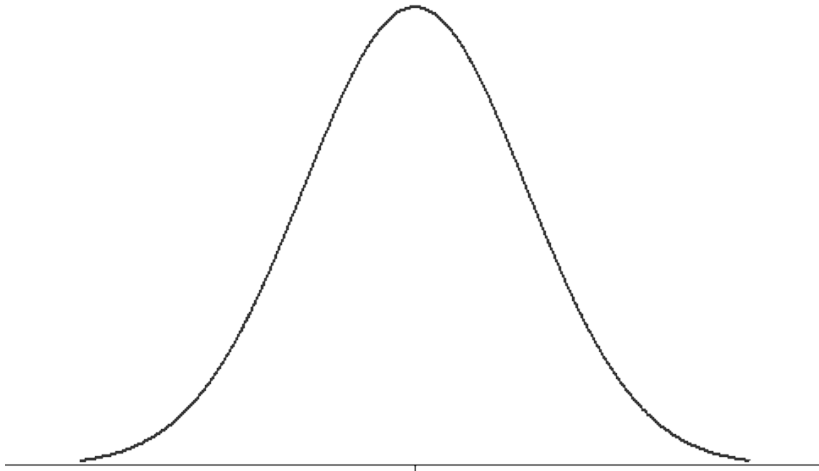


$$\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$



$$\mu_1 < \mu_2, \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

مثال 15: إذا كان طول الشخص في مجتمع ما X يتوزع تقريباً وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 160 سم وانحراف معياري 5 سم. مثل الاحتمالات التالية بمساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي:



التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي):

يقال أن المتغير العشوائي المستمر Z يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر ($\mu = 0$) وتباين يساوي الواحد ($\sigma^2 = 1$). ودالة

الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Z تأخذ الصيغة التالية:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}; \quad -\infty < z < \infty$$

وفي هذه الحالة نكتب: $Z \sim N(0,1)$



دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي القياسي

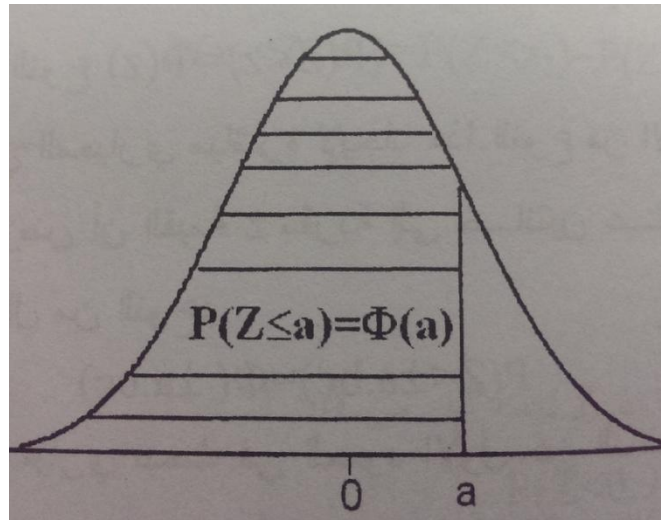
0

إيجاد الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0, 1)$:

إذا كان المتغير العشوائي Z يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري، فإن:

$$P(Z \leq a) = \int_{-\infty}^a f_Z(z) dz = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} dz$$

وهذا التكامل يساوي المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $f_Z(z)$ وعن يسار النقطة a .



يرمز للاحتمال $P(Z \leq a)$ بالرمز $\Phi(a)$ أي أن:

$$\Phi(a) = P(Z \leq a) = \int_{-\infty}^a f_Z(z) dz$$

طريقة حساب الاحتمالات من جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$.1 \quad P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

$$.2 \quad P(Z \geq z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \Phi(z)$$

$$.3 \quad P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

$$.4 \quad P(Z < 0) = P(Z > 0) = \Phi(0) = 0.5$$

$$.5 \quad P(Z = z) = 0$$

مثال 16: لنفرض أن $Z \sim N(0, 1)$

1. أوجد احتمال أن يأخذ Z قيمة أقل من 1.5.

$$P(Z < 0.98)$$

2. أوجد الاحتمال:

$$P(Z > 0.98)$$

3. أوجد الاحتمال:

$$P(-1.33 < Z < 2.42)$$

4. أوجد الاحتمال:

تحويل التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ إلى توزيع طبيعي معياري $N(0, 1)$ وإيجاد الاحتمالات للتوزيع الطبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإننا نحوله أولاً إلى متغير عشوائي طبيعي معياري $Z \sim N(0, 1)$ ومن ثم نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمالات من النوع $P(Z \leq z) = \Phi(z)$

نتيجة:

المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ إذا وفقط إذا كان المتغير العشوائي $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري $N(0, 1)$. أي أن:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

فمثلاً: إذا كان $X \sim N(10, 16)$ فإن

$$Z = \frac{X - 10}{4} \sim N(0, 1)$$

1. باستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$X < x \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma} \Leftrightarrow Z < \frac{x - \mu}{\sigma}$$

وبالتالي فإن:

1.
$$P(X < x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

2.
$$P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

3.
$$P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$$

$$= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

2. إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وكانت x هي قيمة المتغير العشوائي X فإن القيمة $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

تسمى القيمة المعيارية (أو القياسية) للقيمة x .

مثال 17: إذا كان المتغير العشوائي X الذي يمثل الطول في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 165 سم وانحراف معياري 5 سم. فأوجد مايلي:

1. القيمة المعيارية للقيمة $x=172$.

2. القيمة x إذا كانت القيمة المعيارية هي $z=-0.52$.

مثال 18: لنفرض أن وزن الحيوان الذكر البالغ لإحدى سلالات الخراف يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 16 كلجم وانحراف معياري 0.9 كلجم.

1. إذا اخترنا أحد الخراف من هذه السلالة بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يزيد وزنه عن 14 كلجم.

2. ماهي النسبة المئوية للخراف من هذه السلالة التي يزيد وزنها عن 14 كلجم.

3. ماهي النسبة المئوية للخراف من هذه السلالة التي تتراوح أوزنها من 14 إلى 18 كلجم.