



Phys 570

Lecture #15

Physics & Astronomy Dept.

College of Science

King Saud University

Nasser S. Alzayed

nalzayed@ksu.edu.sa

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

معادلات لندن London Equations

- افترض لندن في معادلات أنه ليس فقط مشتقة الزمن للمجال المغناطيسي $\dot{B} = 0$
- وإنما المجال نفسه يساوي الصفر $B = 0$ داخل الموصل فائق التوصيل
- كذلك يفترض أن التيار ينقسم إلى نوعين: تيار فائق التوصيل J_s و تيار عادي J_n
- بحيث أن التيار الكلي:
$$J = J_n + J_s \quad (1)$$

- بالنسبة للجزء المتعلق بالتيار العادي، من قانون أوم: $J_n = \sigma E$
- بالنسبة للمركبة الخاصة بالتيار الفائق فيمكن أخذها من ميكانيكا الكم:

$$J(r) = \frac{qh}{4\pi Mi} [\psi^*(r) \nabla \psi(r) - \nabla \psi^*(r) \psi(r)] \quad (2)$$

- مع الحل التالي:

$$\psi(r) = \Phi(r) e^{i\varphi(r)} \quad (3)$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

معادلات لندن London Equations

- حيث أن φ تمثل زاوية الطور
- مع المعلومات التالية: $q = 2e$ و $M = 2m$ (شحنة وكتلة زوج إلكترونات).
- نضع الآن المعادلة (3) في المعادلة (2): مع ملاحظة أن:

$$\psi^*(r) = \Phi^*(r)e^{-i\varphi(r)}$$

$$\psi(r)\psi^*(r) = \Phi(r)\Phi^*(r)e^{i\varphi(r)}e^{-i\varphi(r)} = \Phi(r)\Phi^*$$

• الحد الأول:

$$\begin{aligned}\psi^*(r)\nabla\psi(r) &= \left[\Phi^* e^{-i\varphi(r)} \right] \left[\Phi' e^{i\varphi(r)} + i\Phi e^{i\varphi(r)} \nabla\varphi \right] \\ &= \left[\Phi^* \Phi'(r) + i\Phi^* \Phi \nabla\varphi(r) \right] \quad (4)\end{aligned}$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

معادلات لندن London Equations

• الحد الثاني:

$$\begin{aligned}\nabla \psi^*(r)\psi(r) &= [\Phi^* e^{-i\varphi(r)} - \Phi^* i e^{-i\varphi(r)} \nabla \varphi] \Phi e^{i\varphi(r)} \\ &= [\Phi^* \Phi - \Phi^* \Phi i \nabla \varphi] \quad (5)\end{aligned}$$

• نقوم الآن بالتعويض من كل من (4) و (5) في معادلة رقم (2):

$$\begin{aligned}J(r) &= \frac{2eh}{4\pi 2mi} [2i\Phi^*(r)\Phi(r)\nabla\varphi(r)] \\ &= \frac{eh}{2\pi m} |\psi(r)|^2 \nabla\varphi(r) \quad (6)\end{aligned}$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

معادلات لندن London Equations

• نحتاج إلى إضافة تأثير التزاوج مع المجال المغناطيسي، أي أن:

$$\nabla \rightarrow \nabla + \frac{2\pi ie}{h} A \quad (7)$$

$$\text{Where : } B = \nabla \times A$$

• نقوم الآن بالتعويض من (7) في معادلة رقم (6):

$$J_s(r) = \frac{eh}{2\pi m} |\psi(r)|^2 \nabla \varphi(r) - \frac{2e^2}{m} A |\psi(r)|^2 \quad (9)$$

• معادلة (9) تمثل الشكل العام لمعادلة لندن

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

معادلات لندن London Equations

• ولكن نحتاج إلى إدخال تعديلات حيث نفترض وجود أثر مايزنر أي أن:

$$B = 0 \quad \text{or} \quad |\psi(r)|^2 = \text{const} .$$

$$\text{Let} : |\psi(r)|^2 = n_s \quad (\text{density of superpairs})$$

$$\nabla \times J_s(r) = -\frac{2n_s e^2}{m} \nabla \times A$$

$$\Rightarrow \nabla \times J_s(r) + \frac{2n_s e^2}{m} \nabla \times A = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times J_s(r) + \frac{2n_s e^2}{m} B = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times J_s(r) + \frac{1}{\mu_o \lambda^2} B = 0 \quad (11)$$

• فإذن الحد الأول في (9) يساوي الصفر ويتبقى الحد الثاني مع أخذ البرم للطرفين الأيسر والأيمن وتغيير الكميات يصبح لدينا:

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

معادلات لندن London Equations

- المعادلة الأخيرة (11) تمثل معادلة لندن London Equation وهي تسمى نسبة للأخوين الألمانين فرتز لندن وهينز لندن. مع ملاحظة أن λ تسمى عمق الاختراق. ويقصد بها العمق في داخل الموصل الذي يصل إليه المجال المغناطيسي الخارجي.

$$\lambda^2 = \frac{m}{2 \mu_0 n_s e^2} \quad (12)$$

- وكمعلومات مبسطة فإن: $\lambda \sim 500 \text{ \AA}$ for $n_s = 10^{28}$
- ويمكن كذلك الحصول على معادلة أخرى بإجراء بعض الحركات الرياضية وذلك للحصول على تعبير عن علاقة المجال المغناطيسي مع العمق داخل الموصل الفائقة.
- نبدأ من معادلة ماكسويل الشهيرة:

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

معادلات لندن London Equations

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (\text{Max. Eq.}) \quad (13)$$

$\nabla \times$ for both sides :

$$\nabla \times \nabla \times B = \mu_0 \nabla \times J \quad (14)$$

(11) in (14) \Rightarrow :

$$\nabla \times \nabla \times B + \frac{1}{\lambda^2} B = 0 \quad (15)$$

$$\because \nabla \times \nabla \times B = \nabla (\nabla \cdot B) - \nabla^2 B$$

$$\text{But } \nabla \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 B = \frac{1}{\lambda^2} B \quad (16)$$

$$\Rightarrow B = B(0) e^{-r/\lambda} \quad (17)$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

معادلات لندن London Equations

• نتأمل في معادلة رقم (12):

$$\lambda^2 = \frac{m}{2 \mu_o n_s e^2} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{as } T &\rightarrow T_c \\ n_s &\rightarrow \infty \\ \lambda &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \frac{-r}{\lambda} &\rightarrow \infty \\ \Rightarrow B &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{as } T &\rightarrow \infty \\ n_s &\rightarrow 0 \\ \lambda &\rightarrow \infty \\ \Rightarrow \frac{-r}{\lambda} &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow e^{-\frac{r}{\lambda}} &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

• ومعنى ذلك أنه مع ارتفاع درجة الحرارة تختفي الإلكترونات الفائقة ويتم دخول المجال المغناطيسي بالكامل إلى داخل الموصل.

• والعكس صحيح حيث أن انخفاض درجة الحرارة يؤدي إلى ارتفاع كبير في عدد الإلكترونات الفائقة، وبالتالي إلى ميل المجال المغناطيسي الداخلي إلى الصفر، وهو ما يتطابق مع أثر مايزنر تماما.

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

نظرية بي سي أس BCS Theory

• قام كل من باردين وكوبر وشريفر في عام 1957 م بوضع نظرية لتفسير الظاهرة التوصيلية الفائقة.



- سوف نحاول أن نذكر النقاط الأساسية فقط:
- افترضت النظرية أن الألكترونات تتحرك في أزواج
- تم تسمية الأزواج بأزواج كوبر: $\uparrow\downarrow$
- تتفاعل الألكترونات تحت ظروف معينة بصورة تجاذبية مما يؤدي إلى خلق حالة أرضية تحت الحالة المثارة
- يتكون فجوة طاقة بين الحالتين
- يصبح المجال المغناطيسي الحرج هو المجال الذي ينقل الألكترونات من الحالة الأرضية إلى الحالة المثارة (يُدمر التوصيلية الفائقة)
- كيف يحصل ذلك؟
- يقوم الألكترون الأول بالتأثير على الشبكة بطريق ما

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

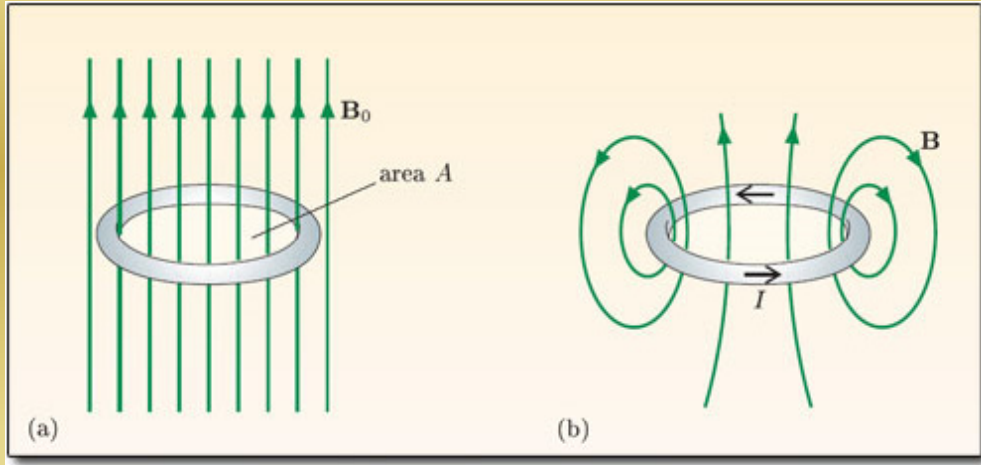
نظرية بي سي أس BCS Theory

- يستفيد الألكترون الثاني من الوضع فيقترب من الشبكة لأن هذا يفيد في تقليل طاقته.
- إذن صارت الشبكة وسيلة تفاعل بين الالكترونين
- تتوقع النظرية أن النظير الاثقل لديه درجة حرارة تحول أقل (وتتفق مع التجربة في ذلك).
- استطاعت النظرية أن تفسر الظاهرة التوصيلية الفائقة التقليدية لكنها لم تتمكن من تفسير الأجيال الجديدة من الموصلات حيث أن النظرية لم تكن تتوقع أن تصل درجات حرارة التحول إلى ما وصلت إليه، حيث – بحسب النظرية – تؤدي الحرارة العالية إلى ضجيج يفسد التوصيلية الفائقة، وهذا ثبت لاحقاً أنه غير صحيح.
- هناك نظريات جديدة للتوصيلية الفائقة خاصة لبعض المركبات الجديدة ليس هنا مجال بسطها.

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

تكميم الفيض المغناطيسي Flux Quantization in a Superconducting Ring

- طبعا المقصود هو تكميم الفيض المغناطيسي عند مروره بحلقة مصنوعة من موصل فائق التوصيل.
- يتكون الفيض المغناطيسي من خطوط مغناطيسية كل خط يتكون من كمية مغناطيسية واحدة فقط (كما سبق)
- مقدار الكمية المغناطيسية: $\phi_0 = 2.0678 \times 10^{-15} \text{ Tesla.m}^2$ وتسمى الفلكسويد.
- عندما يكون لدينا حلقة فائقة التوصيل
- ويطبق مجال خارجي



- فإن عدد الخطوط التي تمر مكمم
- أي عدد الخطوط يساوي عددا
- صحيحا من الكمات بدون كسور.

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

تكميم الفيض المغناطيسي Flux Quantization in a Superconducting Ring

- سوف نعتبر أن بحر الأزواج هو عبارة عن بوزونات.
- ونريد إثبات أن هذه البوزونات تخضع لمعادلة لندن:
- سوف نعتبر أن $\psi(r)$ تمثل موجة الجسيم.
- ونعتبر أن n_s تمثل كثافة الأزواج.

$$n_s = \psi^* \psi$$

$$\therefore 2e \rightarrow 1 \text{ pair}$$

$$\therefore n_s = \frac{1}{2} n \text{ (electron concentration)}$$

$$\therefore \psi = n_s^{1/2} e^{i\theta}$$

$$\psi^* = n_s^{1/2} e^{-i\theta}$$

- من معادلات ماكسويل لدينا:

$$v = \frac{1}{m} \left[p - \frac{q}{c} A \right] = \frac{1}{m} \left[-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} A \right] \quad (18)$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

تكميم الفيض المغناطيسي Flux Quantization in a Superconducting Ring

• يمكن أذن التعبير عن تدفق الجسيمات كالتالي:

$$\psi^* v \psi = \frac{n_s}{m} \left[\hbar \nabla \mathcal{G} - \frac{q}{c} A \right] \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{Where } : \psi^* i \hbar \nabla \psi &= n_s^{1/2} e^{-i\mathcal{G}} (i \hbar \nabla) n_s^{1/2} e^{i\mathcal{G}} \\ &= n_s^{1/2} n_s^{1/2} (i \hbar) e^{-i\mathcal{G}} e^{i\mathcal{G}} i \nabla \mathcal{G} \\ &= -n_s \hbar \nabla \mathcal{G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{and } : \psi^* \left(\frac{q}{c} A \right) \psi &= n_s^{1/2} e^{-i\mathcal{G}} \left(\frac{q}{c} A \right) n_s^{1/2} e^{i\mathcal{G}} \\ &= n_s \frac{q}{c} A \end{aligned}$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

تكميم الفيض المغناطيسي Flux Quantization in a Superconducting Ring

• كثافة التيار Current Density:

$$j = q \psi^* v \psi = \frac{qn_s}{m} \left[\hbar \nabla \mathcal{G} - \frac{q}{c} A \right] \quad (20)$$

• بأخذ البرم Curl للطرفين نحصل على معادلة لندن:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \mathcal{G} &= 0 \quad (\text{Curl Grade} = 0) \\ \nabla \times A &= B \\ \Rightarrow \nabla \times j + \frac{n_s q^2}{mc} B &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

- فحصنا على معادلة لندن بطريقة مختلفة.
- معادلة (20) ممكن أن تبرهن تكميم المجال المغناطيسي بطريقة ثانية

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

تكميم الفيض المغناطيسي Flux Quantization in a Superconducting Ring

$$j = 0 = \frac{qn_s}{m} \left[\hbar \nabla \mathcal{G} - \frac{q}{c} A \right]$$
$$\Rightarrow \hbar c \nabla \mathcal{G} = qA \quad (22)$$

- نتخيل أن لدينا حلقة
- بما أن أثر مايزنر يعني أن $B = 0$
- معادلة (21) تعني أن: $j = 0$ كذلك
- لمسار مغلق لدينا العلاقة الرياضية:

$$L.H.S.: \oint \nabla \mathcal{G} \cdot dl = \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1 \quad (\text{Change in phase}) \quad (23)$$

for integer No. of Cycles :

$$\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1 = 2\pi s \quad (24)$$

$$R.H.S.: \oint A \cdot dl = \int_C (\nabla \times A) \cdot d\sigma = \oint_C B \cdot d\sigma = \Phi \quad (25)$$

- حيث $d\sigma$ تمثل العنصر السطحي Surface Element

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

تكميم الفيض المغناطيسي Flux Quantization in a Superconducting Ring

• المعادلات (23) و (24) و (25) تعطينا:

$$\hbar c (2\pi s) = q\Phi \Rightarrow \Phi = \frac{\hbar c \cdot 2\pi s}{q}$$

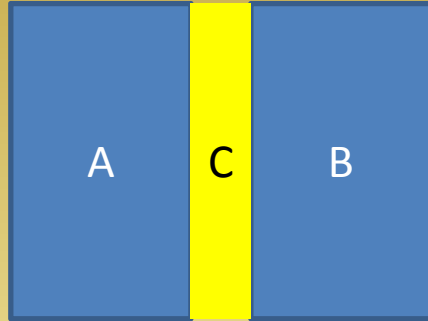
• وهي نفس معادلة التكميم السابقة.

$$\Phi_o = \frac{\hbar c \cdot 2\pi}{2e} = 2.0678 \times 10^{-7} G \cdot cm^2 = 2.0678 \times 10^{-15} T \cdot m^2$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

تملص الجسيم الواحد Single Particle Tunneling

- التملص يقصد به قدرة جسيم ما أن يعبر من فوق الحاجز الكموني أو عبر عازل يقع بين موصلين بشرط أن يكون العازل رقيقا بما يكفي.



- في الشكل A و B موصلان معدنيان
- C عازل

- عندما تتحرك الألكترونات من A إلى B أو العكس يعمل C كحاجز كموني

- إذا كان هذا الحاجز رقيقا في حدود 20 \AA فإن هناك فرصة للألكترونات أن تمر من خلاله (تتملص).

- في حالة كون كلا من A و B موصلات فائقة، فسوف يمكن للزوج الألكتروني (أزواج كوبر) أن تتملص من خلا الحاجز

- كما يمكن استبدال الحاجز بوصلة ضعيفة جدا وتعطي نفس النتيجة:



الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

وصلة جوزيف صن للتيار الثابت *DC Josephson Junction*

- سوف نقوم بدراسة وصلة واحدة فقط من وصلات جوزيف صن.
- الوصلة عبارة عن موصلين متصلين عن طريق رابط ضعيف *Weaklink*
- بافتراض أن سعة الموجة في الطرف الأول للزوج هي: ψ_1 وفي الطرف الثاني ψ_2 كما نفترض بأن الطرفين يقعان عند فرق مساوي للصفر.
- نعبر عن حركة الموجة في الطرفين باستخدام معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 \quad \text{and} \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1 \quad (38)$$

- حيث T تمثل معدل عبور الأزواج من خلال الرابط الضعيف. أي تمثل معدل انتقال الموجة اليسرى إلى اليمين واليميني إلى اليسار.
- سوف نقوم بالتعبير عن كل دالة موجية كما فعلنا في السابق.

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

وصلة جوزيف صن للتيار الثابت *DC Josephson Junction*

$$\psi_1 = n_s^{1/2} e^{i\theta_1} \quad \text{and} \quad \psi_2 = n_s^{1/2} e^{i\theta_2}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2} n_1^{-1/2} e^{i\theta_1} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i\psi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT\psi_2 ; \quad (39)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{2} n_2^{-1/2} e^{i\theta_2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + i\psi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT\psi_1 . \quad (40)$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

وصلة جوزيف صن للتيار الثابت DC Josephson Junction

We multiply (39) by $n_1^{1/2} e^{-i\theta_1}$ to obtain, with $\delta = \theta_2 - \theta_1$,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i n_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT(n_1 n_2)^{1/2} e^{i\delta} . \quad (41)$$

We multiply (40) by $n_2^{1/2} e^{-i\theta_2}$ to obtain

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + i n_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT(n_1 n_2)^{1/2} e^{-i\delta} . \quad (42)$$

Now equate the real and imaginary parts of (41) and similarly of (42):

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = 2T(n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta ; \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} = -2T(n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta ; \quad (43)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -T \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{1/2} \cos \delta ; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -T \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2} \cos \delta . \quad (44)$$

If $n_1 \cong n_2$ as for identical superconductors 1 and 2, we have from (44) that

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} ; \quad \frac{\partial}{\partial t} (\theta_2 - \theta_1) = 0 . \quad (45)$$

From (43) we see that

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{\partial n_1}{\partial t} . \quad (46)$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

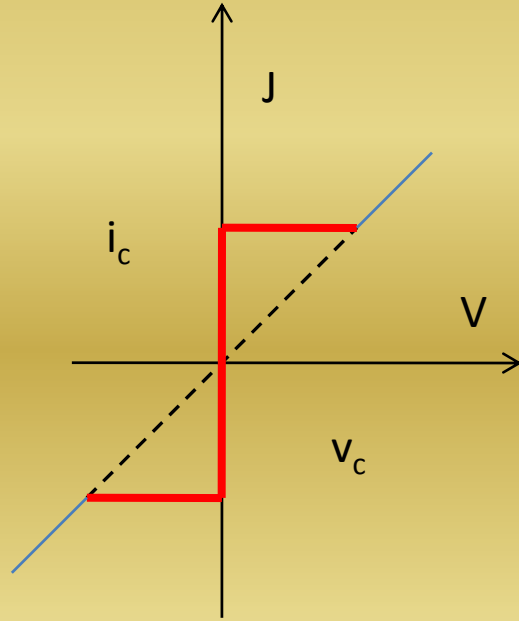
وصلة جوزيف صن للتيار الثابت *DC Josephson Junction*

$$\therefore J \propto \frac{\partial n_2}{\partial t} \quad \text{or} \quad J \propto -\frac{\partial n_1}{\partial t}$$

$$\text{But } \frac{\partial n_2}{\partial t} \quad \text{and} \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} \propto \sin \delta$$

$$\therefore J \propto \sin \delta$$

$$\therefore J = J_0 \sin \delta = J_0 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad (47)$$



- وهو يمثل التيار الأقصى الذي يمر من خلال الوصلة الضعيفة بدون نشوء فرق جهد.
- الشكل يمثل علاقة الفولت بالتيار ونشوء الجهد الحرج والتيار الحرج.

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

وصلة جوزيف صن للتيار المتردد AC Josephson Junction

- عندما يتم تطبيق فرق جهد بين طرفي الوصلة نحصل على أثر جوزيف صن للتيار المتردد.

$$i\hbar \partial\psi_1/\partial t = \hbar T\psi_2 - eV\psi_1 ; \quad i\hbar \partial\psi_2/\partial t = \hbar T\psi_1 + eV\psi_2 . \quad (48)$$

We proceed as above to find in place of (41) the equation

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + in_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = ieVn_1\hbar^{-1} - iT(n_1n_2)^{1/2} e^{i\delta} . \quad (49)$$

This equation breaks up into the real part

$$\partial n_1 / \partial t = 2T(n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta , \quad (50)$$

exactly as without the voltage V , and the imaginary part

$$\partial \theta_1 / \partial t = (eV/\hbar) - T(n_2/n_1)^{1/2} \cos \delta , \quad (51)$$

which differs from (44) by the term eV/\hbar .

Further, by extension of (42),

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + i n_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -i eV n_2 \hbar^{-1} - iT(n_1 n_2)^{1/2} e^{-i\delta} , \quad (52)$$

whence

$$\partial n_2 / \partial t = -2T(n_1 n_2)^{1/2} \sin \delta ; \quad (53)$$

$$\partial \theta_2 / \partial t = -(eV/\hbar) - T(n_1/n_2)^{1/2} \cos \delta . \quad (54)$$

From (51) and (54) with $n_1 \cong n_2$, we have

$$\partial(\theta_2 - \theta_1) / \partial t = \partial \delta / \partial t = -2eV/\hbar . \quad (55)$$

We see by integration of (55) that with a dc voltage across the junction the relative phase of the probability amplitudes varies as

$$\delta(t) = \delta(0) - (2eVt/\hbar) . \quad (56)$$

The superconducting current is given by (47) with (56) for the phase:

$$J = J_0 \sin [\delta(0) - (2eVt/\hbar)] . \quad (57)$$

الفصل العاشر: الموصلات الفائقة

وصلة جوزيف صن للتيار المتردد *AC Josephson Junction*

• يمر التيار عبر الوصلة الضعيفة بتردد معين:

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar} \quad (58)$$

• عندما يمر زوج كوبر من خلال الوصلة يؤدي ذلك إلى انبعاث فوتون بطاقة مقدارها: $\hbar\omega = 2eV$