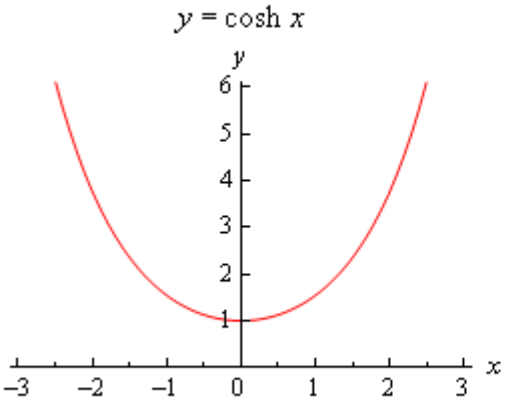
١ الدوال الزائدية و معكوساتها
: Hyperbolic Function and their Inverses

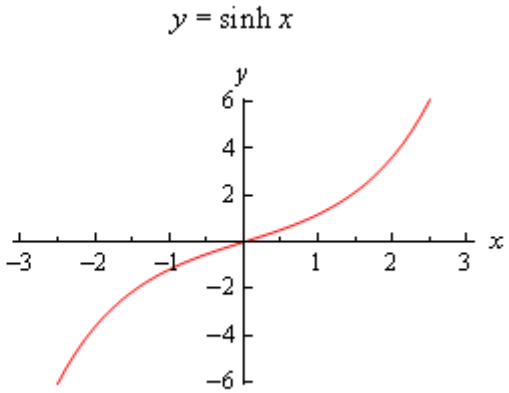
١.١ الدوال الزائدية :

عبارة عن مجموعة من الدوال التي تكون بدلالة e^x و تعرف بالشكل التالي:

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \forall x \neq 0$
- $\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\text{csch } x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \forall x \neq 0$

يمكننا أن نلاحظ من الرسم البياني أن مدى الدالة $\sinh x$ هو $\mathbb{R}$ و مدى الدالة $\cosh x$ هو $[1, \infty)$





بعض الملحوظات المهمة:

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$
$$\cosh(-x) = \cosh x$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

١.١.١ اشتقاق الدوال الزائدية Derivatives of Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

مثال: احسب اشتقاق الدوال التالية:

$$(1)\ y = \cosh(\sqrt{x})$$

$$(2)\ y = 3^{\sinh(3x)}$$

(3) $y = \cosh(x^3) + \ln(\tanh x)$

(4) $y = x^{\cosh(x^3)}$

٢.١.١ تكامل الدوال الزائدية Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + c \qquad \int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + c$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + c \qquad \int \operatorname{csch} x \coth x\,dx = -\operatorname{csch} x + c$$

مثال: جد تكامل الدوال التالية:

$$(1)\ \int \frac{\sinh(3x)}{\cosh(3x)}\,dx$$

(2) $\int \sinh^5 x \tanh x \, dx$

(3) $\int \frac{e^{\cosh x}}{cschx}\, dx$

٢.١ الدوال الزائدية العكسية:

- **الدالة** $\sinh$ **لها معكوس بحيث**
$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\sinh y = x \Leftrightarrow y = \sinh^{-1} x$

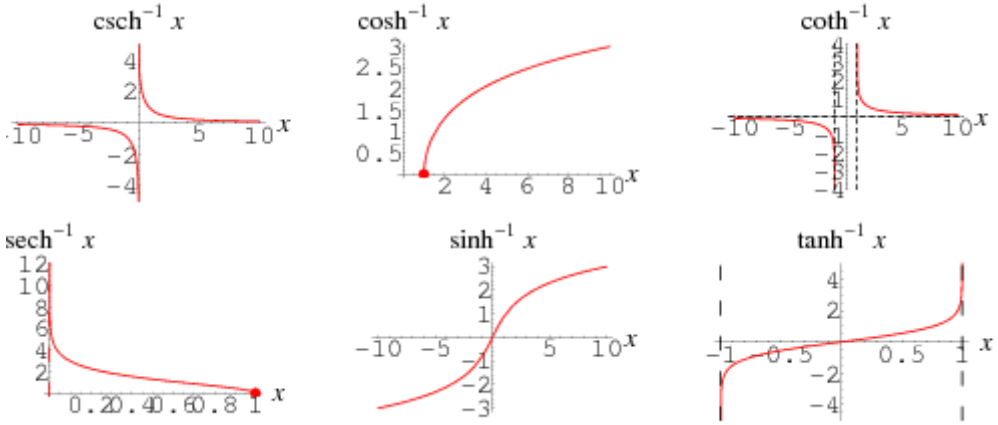
- **الدالة** $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ **لها معكوس بحيث**
$\cosh^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$
$\cosh y = x \Leftrightarrow y = \cosh^{-1} x$

- **الدالة** $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ **لها معكوس بحيث**
$\tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$
$\tanh y = x \Leftrightarrow y = \tanh^{-1} x$

- **الدالة** $\coth : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - [-1, 1]$ **لها معكوس بحيث**
$\coth^{-1} : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}$
$\coth y = x \Leftrightarrow y = \coth^{-1} x$

- **الدالة** sech **على** $[0, \infty)$ **لها معكوس بحيث**
$\text{sech}^{-1} : (0, 1] \to [0, \infty)$
$\text{sech}\, y = x \Leftrightarrow y = \text{sech}^{-1} x$

- $\text{csch} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ **لها معكوس بحيث**
$\text{csch}^{-1} :: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$\text{csch}\, y = x \Leftrightarrow y = \text{csch}^{-1} x$



مبرهنة: نستطيع أن نستنتج صياغة الدوال الزائدة العكسية عن طريق الدوال اللوغاريتمية بالشكل التالي:

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|}\right)$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

بحيث أن مجال الدوال الزائدية العكسية ومداها تكون بالشكل:

$\sinh^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < \sinh^{-1} x < \infty$
$\cosh^{-1} x$	$1 \leq x < \infty$	$0 \leq \cosh^{-1} x < \infty$
$\tanh^{-1} x$	$-1 < x < 1$	$-\infty < \tanh^{-1} x < \infty$
$\operatorname{csch}^{-1} x$	$-\infty < x < \infty, x \neq 0$	$-\infty < \operatorname{csch}^{-1} x < \infty, \operatorname{csch}^{-1} x \neq 0$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$0 < x \leq 1$	$0 \leq \operatorname{sech}^{-1} x < \infty$
$\coth^{-1} x$	$\{-\infty < x < -1\} \cup \{1 < x < \infty\}$	$-\infty < \coth^{-1} x < \infty, x \neq 0$

١.٢.١ اشتقاق الدوال الزائديةالعكسية
Derivatives of Inverse Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\coth^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x|>1$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0<x<1$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1-x^2}}, \quad x\neq 0$$

مثال: احسب اشتقاق الدوال التالية:

$(1)\ y=\tanh^{-1}(\cos x)$

(2) $y = \ln\left(\cosh^{-1}(x)\right)$

(3) $y = \sinh^{-1}(\tanh x)$

(4) $y = \tan^{-1}(\sinh x)$

تمرين: احسب $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية

$(i) \quad y = \cosh^2(x) + \sinh^{-1}(x^2)$

$(ii) \quad y = \tanh^{-1}(\sqrt{x})$

٢.٢.١ تكامل الدوال الزائدية العكسية
Integrals of Inverse Hyperbolic Functions

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c,\ x > a$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + c,\ |x| < a$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} + c,\ |x| > a$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}sech^{-1}\frac{|x|}{a} + c,\ |x| < a$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{-1}{a}csch^{-1}\frac{|x|}{a} + c,\ |x| \neq a$$

مثال: جد تكامل الدوال التالية:

$$(1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{25+9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(5)^2+(3x)^2}}$$

نفرض $u = 3x$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(5)^2+(3x)^2}} &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{(5)^2+(u)^2}} \\ &= \frac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{u}{5}+c \\ &= \frac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{3x}{5}+c\end{aligned}$$

$$(2)\ \int \frac{e^x}{16-e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{(4)^2-(e^x)^2}\,dx$$

نفرض $u = e^x$

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{(4)^2-(e^x)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(4)^2-u^2}\,du \\ &= \frac{1}{4}\tanh^{-1}(\frac{e^x}{4})\end{aligned}$$

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$

(4) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{4-x^2}$

تمرين: احسب التكامل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$