١ الدوال اللوغاريتمية والأسية Logarithmic AND Expontial Functions

١.١ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

تعرفنا على الدالة اللوغاريتمية في المحاضرة السابقة والتي هي على النحو التالي

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

أي معناها

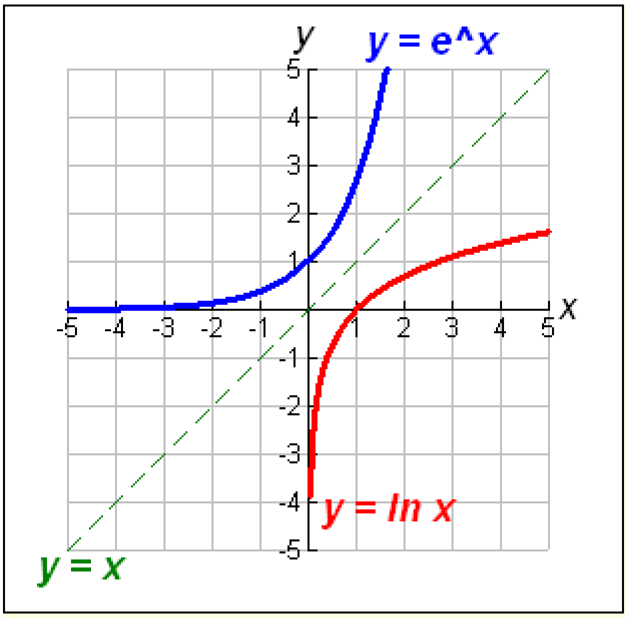
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + c$$

اليوم سوف نبين الدالة الخاصة الثانية

٢.١ الدالة الأسية الطبيعية

هذه الدالة هي دالة عكسية للدالة اللوغاريتمية ويرمز لها بالرمز exp أو e، بحيث أن هذه الدالة يكون الاساس هو exp

$$\begin{aligned} \exp &: \mathbb{R} \to (0, \infty) \\ y &= \exp(x) \Leftrightarrow \ln y = x \end{aligned}$$



١.٢.١ ملحوظات على الدالة الأسية الطبيعية

- $$\exp(x) = \begin{cases} \exp(x) > 1 & , x > 0 \\ \exp(x) < 1 & , x < 0 \\ \exp(x) = 1 & , x = 0 \end{cases}$$
- $\exp$ متزايدة و متلة على مجالها
- $\exp(x) = e^x \, \forall \, x \in \mathbb{R}$
- $\exp(1) = e$
- $\ln e = 1$
- $\ln(e^r) = r \ln e = r$
- $\forall \, x, y \in \mathbb{R}$ و $\forall \, r \in \mathbb{Q}$
  - $e^x e^y = e^{x+y}$
  - $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
  - $(e^x)^r = e^{xr}$
- $\ln(e^x) = x \ln e = x, \, \forall \, x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln x} = x, \, \forall \, x \in (0, \infty)$

٢.٢.١ اشتقاق الدالة e^x

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \, \forall \, x \in \mathbb{R}$$

اي أن

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)} f'(x)$$

مثال: أوجد المشتقة الاولى للدوال التالية:

$$(1) \, f(x) = e^{x^2+2x}$$

$$(2) \, y = x^2 e^{\sin x}$$

$$(3)\, y = \sqrt[3]{x}\, e^{\sec(2x)}$$

$$(4)\, y = \tan(\sqrt{x})\, e^{x^5}$$

٣.٢.١ تكامل الدالة e^x

$$\int (e^x)\,dx = e^x + c$$

وعن طريق التكامل بالتعويض يمكن ان نوجد أن:

$$\int (e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c, \forall\, a \neq 0$$

مثال: أوجد تكامل الدوال التالية:

$$(1)\ \int e^{2x}\,dx$$

$$(2)\ \int xe^{-3x^2}\,dx$$

$$(3)\ \int e^x \sqrt{5+e^x}\, dx$$

$$(4)\ \int e^{\tan x}\,\sec^2 x\,dx$$

$$(5)\ \int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3}\,dx$$

مبرهنة:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{x},\forall\, x\in\mathbb{R}$$

البرهان: