١ الدوال اللوغاريتمية والأسية Logarithmic AND Expontial Functions

في هذا الباب سوف نتعرف الي بعض الدوال الخاصة والتي قد تساعد في ايجاد تكامل دالة لايمكن ايجاد تكاملها بطريقة مباشرة على سبيل المثال

$$\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \sec(x)\,dx$$

أذن سوف نتعرف على بعض الدوال الخاصة والتي قد تساهم في تحويل عملية الضرب الي عملية جمع والذي قد يسهم في تسهيل عملية ايجاد التكامل.

١.١ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

تعرف الدالة اللوغاريتمية على النحو التالي

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

أي معناها

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

١.١.١ خصائص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

$$(1)\; \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$(2)\; \frac{d}{dx}\ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

مثال: احسب مشتقة الدالة $g(x) = \ln(7x^2 + 3x - 2)$

مثال: احسب مشتقة الدالة $y = x^{\cos(\ln(x))}$

$$(3)\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

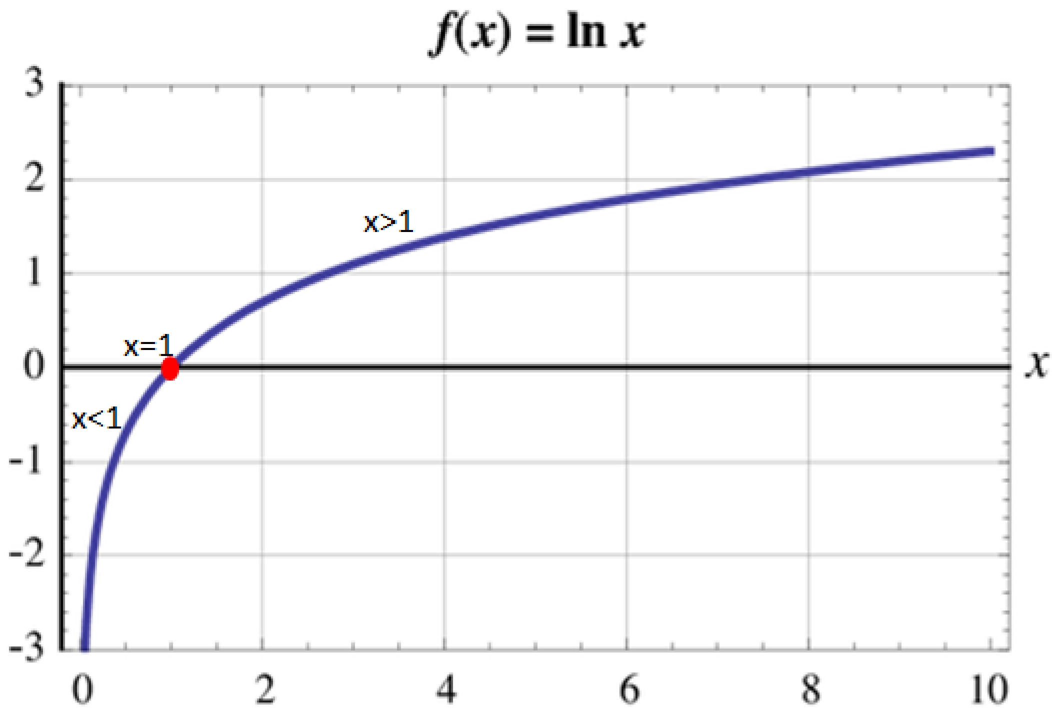
مثال: احسب التكامل

$$\int \frac{2x}{x^2+7}\,dx$$

$$(4)\ \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b$$

$$(5)\, x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$$
$$x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$$
$$x = 1 \Rightarrow \ln x = 0$$

$$(6)\ \lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$



⋆ نلاحظ من رسم الدالة $\ln x$ انها دالة متزايدة على مجالها $(0,\infty)$.

$a, b, r \in \mathbb{R}$ نحصل على الخواص التالية

$$(7)\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$(8)\, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)\, , b \neq 0$$

$$(9)\, \ln\left(a^b\right)^r = \ln(a)^{br}$$

$$(10)\, \ln\left(a\right)^r = r\ln(a)$$

مثال: احسب التكامل

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx$$

مثال:احسب التكامل

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+x+1}\,dx$$

مثال:
احسب

$$\frac{d}{dx}\ln|x|$$

الحل:

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln(x) & ,x > 1 \\ \ln(-x) & ,x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln|x| = \begin{cases} \frac{1}{x} & ,x > 1 \\ \frac{-1}{-x} & ,0 < x < 1 \end{cases}$$

أذن نلاحظ أن

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

مثال: أذا كان لدينا الدالة

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt{(1+x^2)^3}}{\sqrt[5]{x^4}}$$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:
نستطيع استخدام قوانين الاشتقاق المعروفة لايجاد الاشتقاق، الا ان الامر سيكون بحاجة الي حسابات مطولة. ولكن يمكننا تسهيل الحل بأخذ المقياس ل $\ln$ **للطرفين، فنحصل على**

$$\ln(|y|) = \ln\left(\frac{|\sqrt[3]{x}\sqrt{(1+x^2)^3}|}{|\sqrt[5]{x^4}|}\right)$$

وباستخدام خواص الدالة اللوغريتمية يمكننا أن نبسطها أكثر

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ln(|y|) &= \ln\left(|\sqrt[3]{x}\sqrt{(1+x^2)^3}|\right) - \ln|\sqrt[5]{x^4}| \\
&= \ln|\sqrt[3]{x}| + \ln|\sqrt{(1+x^2)^3}| - \ln|\sqrt[5]{x^4}| \\
&= \ln|x^{1/3}| + \ln|(1+x^2)^{3/2}| - \ln|x^{4/5}| \\
&= \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|(1+x^2)| - \frac{4}{5}\ln|x|
\end{aligned}$$

وباشتقاق الطرفين

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{1}{y} =$$

تمرين: احسب مشتقة الدالة $(\ln(x))$ $y = \cos(x)$

تمرين: أذا كان لدينا الدالة

$$y = \frac{(1+x^2)^3(1-\sqrt{x})^2}{(1+x^2)^3}$$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

تكامل الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

- $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c,$
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + c,$
- $\int \tan x dx = \ln |\sec x| + c,$
- $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c,$
- $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c,$
- $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c.$

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{x^2}{3x^3+9}dx$$

$$(2) \int \frac{1}{x - x\ln x}\,dx$$

$$(3) \int \frac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$