

١ التكامل بالتعويض Integration by Substitution

في بعض مسائل التكامل لانستطيع ايجاد التكامل بطريقة مباشرة لذلك نقوم باستخدام طريقة ما لتسهيل عملية التكامل والتي تجعله يكون بصورة قريبة لمسائل التكامل التي نعرفها، فعلى سبيل المثال لو طلب منا إيجاد التكامل التالي

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 3} dx$$

نلاحظ أنه من الصعب إيجاد التكامل السابق بطريقة مباشرة. لذلك نقوم باستخدام طرق توصلنا لشكل تكامل يمكننا حسابه بطريقة سهلة ومباشرة. من هذه الطرق طريقة التعويض وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون جزء من التكامل هو عبارة عن مشتقة (أو صورة عن المشتقة) لجزء اخر بالتكامل

أي بشكل عام تستخدم طريقة التكامل بالتعويض إذا كان التكامل المطلوب على الصورة:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int x\sqrt{x^2 + 9} dx$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x}} dx$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int x^2 \cos x^3 dx$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int \tan x \sec^3 x dx$$

أمثلة: أحسب التكاملات التالية:

$$(1) \int \sqrt{x^3 - 1} \, x^2 dx$$

$$(2) \int \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$$

$$(3) \int \cos^3 x \, dx$$

ملاحظة مهمة جدا بالنسبة لاستخدام طريقة التعويض للتكامل المحدد
فلا بد من التعويض في حدود التكامل حسب العلاقة المستخدمة في التعويض

مثال: أوجد التكامل

$$\int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 2} dx$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos^2 x \, dx$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot 6x \sin 6x dx$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(2x) \sin^5(2x) dx$$

تمرین: أوجد التكامل

$$\int_1^8 \frac{(1 + x^{2/3})^3}{x^{1/3}} dx$$