١ التكامل غير المحدد Indefinite Integral

تعريف:
إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I فإن التكامل غير المحدد للدالة f يعرف على انه الدالة الأصلية العامة للدالة f على I ويرمز للتكامل غير المحدد عند x بالرمز:

$$\int f(x)\,dx$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة F دالة أصلية للدالة f فإن :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

حيث $C \in \mathbb{R}$ **يسمى ثابت التكامل** Constant of Integration
مثال:
أوجد التكامل

$$\int (2x-1)\,dx$$

بعض قوانين الدوال المثلثية:

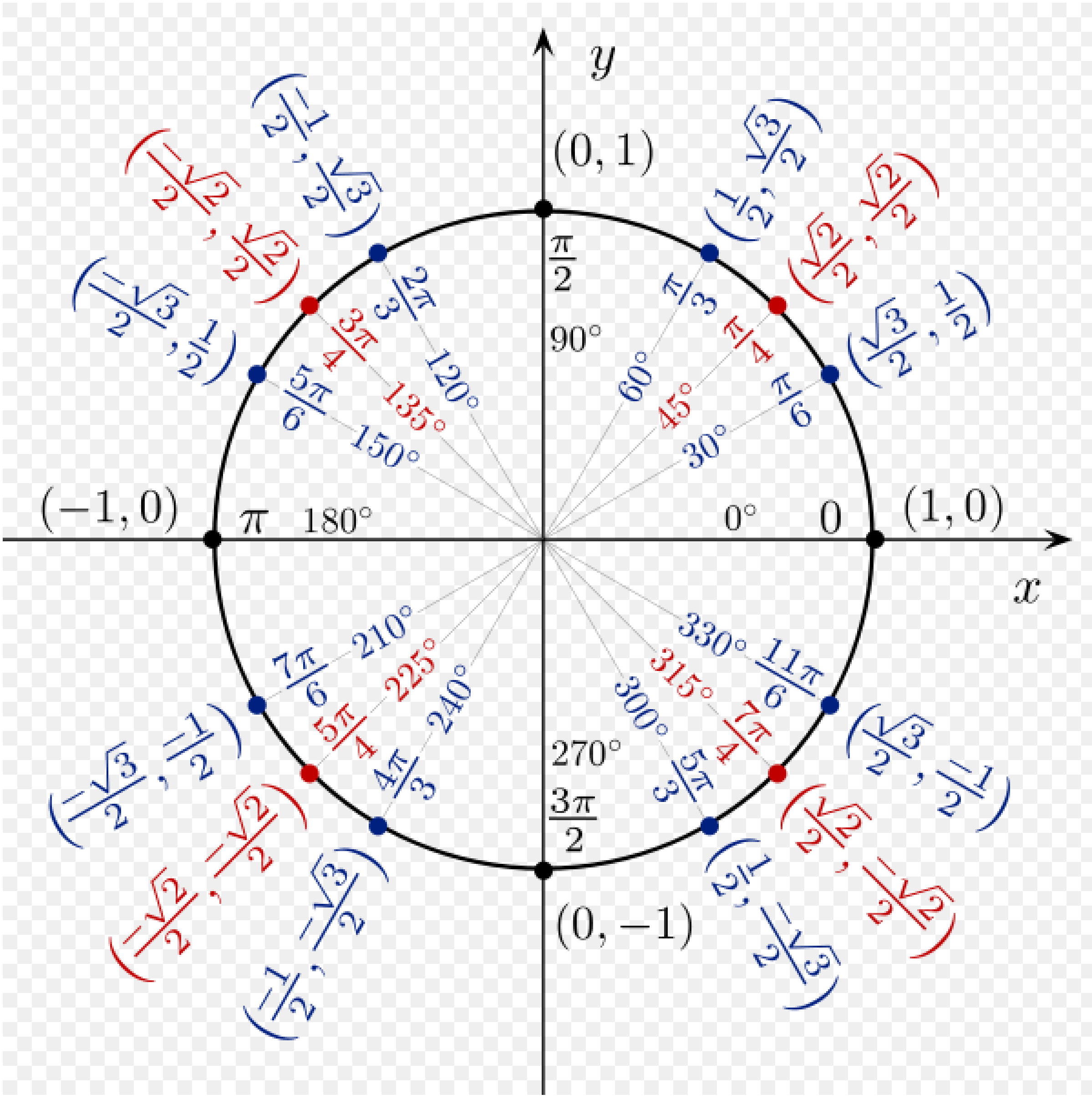
$$* \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$* \ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad * \ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$* \ \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad * \ \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$* \ \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

المتطابقات النسبية (المقام لا يساوي صفر)		
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	
متطابقات المقلوب (المقام لا يساوي صفر)		
$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس		
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات الزاويتين المتتامتين		
$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية		
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$



y
x
$(0,1)$
$(1,0)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
$\frac{\pi}{2}$
90°
π
180°
0°
0
270°
$\frac{3\pi}{2}$
$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$
60°
$\frac{\pi}{4}$
45°
$\frac{\pi}{6}$
30°
$\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\frac{2\pi}{3}$
120°
$\frac{3\pi}{4}$
135°
$\frac{5\pi}{6}$
150°
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{7\pi}{6}$
210°
$\frac{5\pi}{4}$
225°
$\frac{4\pi}{3}$
240°
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{11\pi}{6}$
330°
$\frac{7\pi}{4}$
315°
$\frac{5\pi}{3}$
300°

قوانين اشتقاق الدوال المثلثية:

1) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

2) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

3) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

4) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \ \tan x$

5) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

6) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

الدوال المثلثية العكسية:

$\sin^{-1} x = y \quad (x \in [-1, 1]) \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x \text{ and } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos^{-1} x = y \quad (x \in [-1, 1]) \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x \text{ and } y \in [0, \pi]$

$\tan^{-1} x = y \quad (x \in R) \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x \text{ and } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\csc^{-1} x = y \quad (|x| \geq 1) \quad \Leftrightarrow \quad \csc y = x \text{ and } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

$\sec^{-1} x = y \quad (|x| \geq 1) \quad \Leftrightarrow \quad \sec y = x \text{ and } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

$\cot^{-1} x = y \quad (x \in R) \quad \Leftrightarrow \quad \cot y = x \text{ and } y \in (0, \pi)$

قوانين اشتقاق الدوال المثلثية العكسية:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ومن قوانين الاشتقاق السابقة يمكن أن نحصل على التكاملات غير المحددة التالية:

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int sinx\,dx = -cosx + C$$

$$\int cosx\,dx = sinx + C$$

$$\int sec^2x\,dx = tanx + C$$

$$\int csc^2x\,dx = -\,cotx + C$$

$$\int secx\,tanx\,dx = secx + C$$

$$\int cscx\,cotx\,dx = -cscx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}sec^{-1}\frac{x}{a} + C$$

أمثلة: أحسب التكاملات التالية:

$$I_1 = \int (3x + \tan^2 x)\, dx$$

$$I_2 = \int \frac{2}{4+x^2}\,dx$$

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1 + \sin u \, du$$